Бомба А. Нелінійна математична модель процесу магнітного осадження домішок / А. Бомба, В. Гаращенко, А. Сафоник; О. Гаращенко // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 3. — С. 118-123. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 628.113.2 : 66.067.1 + 517.95

А. Бомба[1], докт. техн. наук; В. Гаращенко[2], канд. техн. наук; А. Сафоник[2]; О. Гаращенко[2]

[1]*Рівненський державний гуманітарний університет;*
[2]*Національний університет водного господарства та природокористування*

НЕЛІНІЙНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ МАГНІТНОГО ОСАДЖЕННЯ ДОМІШОК

Запропоновано математичну модель процесу магнітного осадження домішок у пористій фільтруючій насадці, яка враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри. Побудовано алгоритм розв'язку відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі типу „конвекція-масообмін".

Ключові слова: *фільтрування, магнітний фільтр, магнітне очищення, модель магнітного осадження, асимптотичні розв'язки, нелінійні задачі, зворотний вплив.*

A. Bomba, V. Garaschenko, A. Safonyk, O. Garaschenko

NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL OF PROCESS OF MAGNETIC SEDIMENTATION OF ADMIXTURES

The mathematical model of process of the magnetic besieging of admixtures is offered in porous filter attachment which takes into account reverse influence of descriptions of process (concentrations of sediment) on lauter parameters. The algorithm of decision of the proper nonlinear singular perturbative task of type is built „convection-mass-transfer".

Key words: *filtering, the magnetic filter, magnetic clearing, model of magnetic sedimentation, asymptotic decisions, nonlinear problems, reverse influence.*

Вступ. Рідкі середовища різних галузей виробництва, таких як теплоенергетика, атомна енергетика (живильні води, конденсат), металургія (оборотні й стічні води), хімічна промисловість (рідкий, газоподібний аміак, кислоти, луги) збагачуються домішками продуктів корозії унаслідок неперервної корозії технологічного обладнання [1]. Дослідження засвідчують, що 70-95% цих домішок мають феромагнітні властивості [1]. Тому для їхнього видалення запропоновано використовувати метод магнітного осадження. Існуючі методи і технології не дозволяють ефективно очищати технологічні рідкі середовища [1], оскільки живильні води, конденсати мають температуру вищу за 100ºС, рідкі середовища хімічної промисловості – агресивні, а відомі фільтруючі матеріали обмежені за термостійкістю (не вище 60ºС) і кислотостійкістю. Окрім того, швидкість фільтрування в існуючих апаратах механічного очищення коливається у межах 20-50м/год, а в апаратах магнітного очищення сягає 1000 м/год. Таким чином, метод магнітного очищення є перспективним, а його використання дозволяє підвищити чистоту і якість рідких середовищ.

Процес очищення рідких середовищ від феромагнітних домішок найбільш ефективно відбувається у намагнічених пористих насадках. Домішкові частинки середовищ, під дією магнітного силового фактора $F_c = H \cdot gradH$, осаджуються у точках контакту гранул насадок, де величина F_c може сягати значення порядку $2 \cdot 10^{15}$ А²/м³ (H – напруженість магнітного поля). У початковий момент часу ($t=0$)

пориста насадка відносно „чиста”, тобто не насичена домішковими частинками, її пористість – σ_0. У процесі осадження домішок величина пористості σ поступово зменшується, коефіцієнт гідравлічного опору збільшується, а у випадку замкнутості системи – збільшується величина перепаду тиску ΔP у пористій насадці. Ефективність процесу очищення середовища залишається на досить високому рівні протягом певного часу $t = \tau_ç$ (часу фільтроциклу, часу захисної дії фільтра). При накопиченні критичної маси домішок в об’ємі пористої насадки, що характеризується величиною робочої ємності поглинання, ефективність процесу очищення ψ, що дорівнює відношенню різниці концентрацій домішок на вході й виході фільтра до концентрації на вході, знижується, і режим очищення переходить у нестаціонарну стадію (рис.1). Як відомо [1], при $t > \tau_ç$ певна кількість домішок ще осаджується у порових прошарках насадки, а більша їх частина „зривається” і виноситься із середовищем, що очищується. Поступово комірки по довжині пористої насадки максимально насичуються домішками і самовідмикаються, при досягненні деякого часу $\tau_п$ ефективність очищення знижується до нуля.

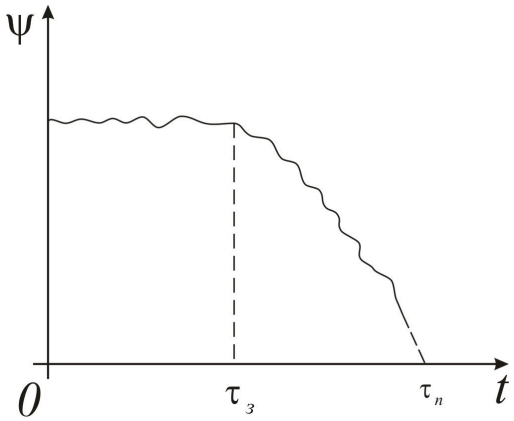

Рисунок 1 – Ефективність процесу очищення

У даній роботі запропонована математична модель процесу магнітного осадження домішок у пористій фільтруючій насадці, що враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, зокрема на пористість, коефіцієнт, що характеризує процес відривання від гранул насадки частинок домішок, коефіцієнт фільтрації, що дає можливість уточнити такі параметри процесу фільтрування, як час фільтроциклу (час стабільного очищення, протягом якого ефективність процесу очищення практично не змінюється), граничну масу домішок у насадці, граничну величину перепаду тиску і аналогічно [2-3] побудовано алгоритм розв’язку відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі типу „конвекція-масообмін”.

Постановка задачі. Відомі аналітичні рівняння, які описують процес фільтрування [4] і процес магнітного осадження [1,5], не дозволяють у широкому діапазоні зміни параметрів описувати процес очищення, окрім того, не враховують зворотній вплив характеристики цього процесу. Тому актуальним завданням теоретичних досліджень є розроблення нелінійного математичного моделювання процесу магнітного осадження домішок у намагнічених пористих насадках. Розв’язок цієї задачі дозволить прогнозувати і розраховувати ефективність процесу магнітного осадження домішок різних технологічних водно-дисперсних систем.

Розглянемо процес магнітного осадження домішок, що реалізується у магнітному фільтрі ($0 \le x \le L$) з однорідною гранульованою фільтруючою насадкою. Процес здійснюється за законами, прототипом яких є класична модель фільтрування [4], з урахуванням зворотного впливу осаджених частинок на пористість σ та коефіцієнт α, а також на коефіцієнт фільтрації.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\left(\sigma\left(\rho(x,t)\right)c(x,t)\right)}{\partial t}+\dfrac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+V\dfrac{\partial c(x,t)}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=\beta c(x,t)-\varepsilon\alpha\left(\rho(x,t)\right)\rho(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

$$c\big|_{x=0}=c_*^*(t),\ c\big|_{t=0}=0,\ \rho\big|_{x=0}=0,\ \rho\big|_{t=0}=0, \tag{2}$$

$$V=\kappa\cdot grad\ P, \tag{3}$$

де $c(x,t)$ – концентрація домішок у рідкому середовищі, що фільтрується; $\rho(x,t)$ – концентрація домішок, осаджених у фільтруючій насадці; β – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги осадження домішкових частинок за одиницю часу, $\alpha(\rho)$ – коефіцієнт, що характеризує масові обсяги відірваних за той же час від гранул насадки домішкових частинок;

$$\alpha(\rho)=\alpha_0+\varepsilon\alpha_*\rho(x,t), \tag{4}$$

де V – швидкість фільтрування ($V=const$, що характеризує замкненість технологічного процесу), $c_*^*(t)$ – концентрація домішкових частинок на вході фільтра, $\sigma(x,t)$ – пористість фільтруючої насадки (σ_0 – вихідна пористість насадки),

$$\sigma(x,t)=\sigma_0-\varepsilon\sigma_*\rho(x,t), \tag{5}$$

$\kappa(x,t)$ – коефіцієнт фільтрування, $\rho_0=\rho(L,\tau_ç)$,

$$\kappa(x,t)=\left[\begin{array}{l}\kappa_0-\varepsilon\gamma\rho(x,t),\ \rho<\rho_0,\\ \kappa_0-\varepsilon\gamma\rho(x,\tau_ç),\ \rho\geq\rho_0,\end{array}\right. \tag{6}$$

$\alpha_0,\alpha_*,\sigma_*,\kappa_0,\gamma,\varepsilon$ – жорсткі параметри (вони характеризують відповідні коефіцієнти $\alpha(\rho),\sigma(x,t),\kappa(x,t)$ – м'які параметри, їх визначають дослідним способом), ε – малий параметр, P – тиск.

Такий характер зміни пористості та коефіцієнта відірваних частинок пояснюється тим, що при збільшенні домішкових частинок у насадці змінюються відповідні параметри фільтрування. Оскільки система є замкненою, то зміна коефіцієнта фільтрування призводить до зміни величини перепаду тиску $\Delta P=P(L,t)-P(0,t)$ у пористій насадці.

Алгоритм (асимптотика) розв'язку. Розв'язки системи (1) за умов (2) шукаємо у вигляді асимптотичних рядів (див. [2 – 3]):

$$c(x,t)=c_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i c_i(x,t)+R_1(x,t,\varepsilon),$$

$$\rho(x,t)=\rho_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\rho_i(x,t)+R_2(x,t,\varepsilon), \tag{7}$$

де R_1,R_2 – залишкові члени, $c_i(x,t)$, $\rho_i(x,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин асимптоти.

Аналогічно до [2], підставивши (7) в (1) та застосувавши стандартну "процедуру прирівнювання", для знаходження функцій c_i і ρ_i ($i=\overline{0,n}$) приходимо до таких задач:

$$\begin{cases} \sigma_0 \dfrac{\partial c_0}{\partial t} + v\dfrac{\partial c_0}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \ \ \dfrac{\partial \rho_0}{\partial t} = \beta c_0, \\ c_0\big|_{x=0} = c_*^*(t), \ c_0\big|_{t=0} = 0, \ \rho_0\big|_{x=0} = 0, \ \rho_0\big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_* \rho_{i-1} \dfrac{\partial c_i}{\partial t} + v\dfrac{\partial c_i}{\partial x} + \sigma_* \dfrac{\partial \rho_{i-1}}{\partial t} c_i + \dfrac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, \ \dfrac{\partial \rho_i}{\partial t} = \beta c_i - g_i, \\ c_i\big|_{x=0} = 0, \ c_i\big|_{t=0} = 0, \ \rho_i\big|_{x=0} = 0, \ \rho_i\big|_{t=0} = 0, i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

розв’язавши їх, маємо:

$$c_0(x,t) = \begin{cases} c_*^*\left(t - \dfrac{\sigma_0 x}{v}\right) \cdot e^{-\frac{\beta x}{v}}, \ t \ge \dfrac{\sigma_0 x}{v}, \\ 0, \ t < \dfrac{\sigma_0 x}{v}, \end{cases} \qquad \rho_0(x,t) = \beta \int_0^t c_0(x,\tau)d\tau,$$

$$c_i(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda_i(x,t)}}{v} \cdot \int_0^x g_i\left(\xi, f_i(\xi) + x - f_i(x)\right) \cdot e^{\lambda_i(\xi,t)} d\xi, \ t \ge f_i(x), \\ 0, \ t < f_i(x), \end{cases}$$

$$\rho_i(x,t) = \int_0^t \left(\beta c_i(x,\tau) - g_i(x,\tau)\right) d\tau,$$

де $g_i(x,t) = \sum_{j=1}^{i} \rho_{j-1}\left(\alpha_0 + I(i,j)\sum_{j=2}^{i}(\alpha_* \rho_{i-2})\right)$, $\lambda_i(x,t) = \dfrac{1}{v}\int_0^x \psi_i\left(\xi, f_i(\xi) + x - f_i(x)\right)d\xi$,

$\psi_i(x,t) = \sigma_* \dfrac{\partial \rho_{i-1}(x,t)}{\partial t} + \beta$, $I(a,b) = \begin{cases} 1, \ \text{ÿêù î } a \ge b, \\ 0, \ \text{ÿêù î } a < b. \end{cases}$ Наближені значення функцій $f_i(x)$ визначаємо інтерполюванням масиву (x_j, t_j), $j = \overline{1,n}$, де $x_j = \Delta x \cdot j$, $t_{j+1} = t_j + \dfrac{\Delta x}{v}\sigma_* \rho_{i-1}(x_j, t_j)$.

Для оцінювання залишкових членів маємо відповідну задачу, аналогічну до [2].

Числові розрахунки та питання автоматизації. Згідно з [1] коефіцієнти захоплених домішкових частинок і відірваних частинок осаду обчислюємо за такою формулою: $\beta = \dfrac{\beta_0 H^{0.75}}{vd^2}$ [1], де β_0 – вільний параметр, H – напруженість магнітного поля, V – швидкість фільтрування, d – діаметр гранульованої насадки фільтра.

Наведемо результати розрахунків за формулами (4) при $c_*^*(t) = 2$ *мг/л*, $V = 200$ *ì / ãî ä*, $L = 1$ *м*, $\beta_0 = 0.7 \cdot 10^{-9}$ *м²/с*, $\alpha_0 = 0.35$ *м²/с*, $H = 60$ *кА/м*, $d = 2.4$ *мм*. $\alpha_* = 1$.

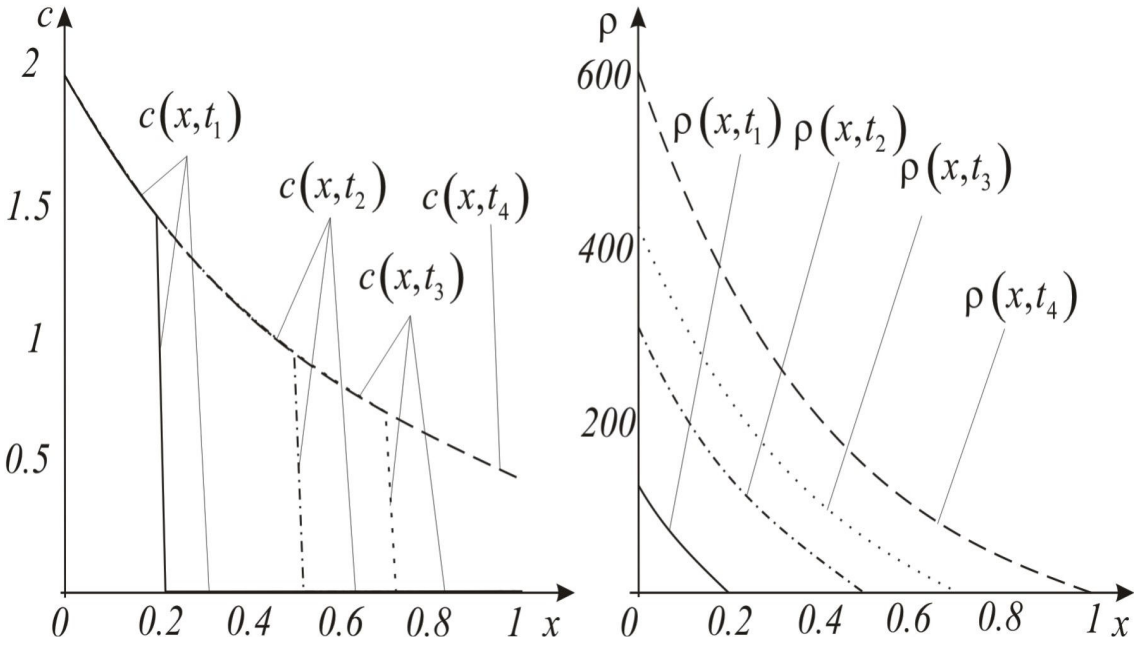

Рисунок 2 – Розподіл концентрації домішок у рідині та осаду вздовж фільтра у моменти часу $t_1 = 20$ *год*, $t_2 = 40$ *год*, $t_3 = 60$ *год*, $t_4 = 80$ *год*

На рисунку 2 зображено розподіл концентрації домішок у рідині та осаду у певні моменти часу. Звідси, задавши на виході фільтра (при $x = 1$) допустиме значення концентрації $c = c_{ёд} = 0.59$ *мг/л*, знаходимо час його захисної дії: $t = \tau_ç = 71$ *год*, що на 4 години відрізняється від даних, отриманих дослідним способом [1]. При цьому фільтр накопичить 240 *г* осаду.

Наголосимо, що у процесі розрахунку ми приймали $v = const$, хоча коефіцієнт фільтрації (як і пористості) спадає через прилипання до стінок (засипки) твердих частинок. Це дає можливість знаходити у кожному поперечному перерізі фільтра (кожній точці x, $0 \le x \le L$) градієнт напору (тиску), зокрема, використовуючи формулу $grad\ P = \dfrac{v}{\kappa(x,t)}$, можна знайти час надходження більшого за критичне значення градієнта і приймати відповідні „рішення автоматизації”. Зміна $grad\ P$ з часом зображена на рисунку 3.

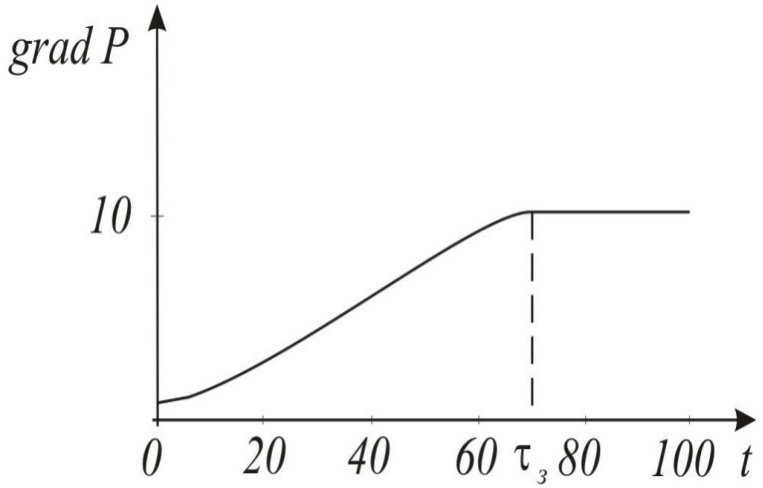

Рисунок 3 – Зміна $grad\ P$ на виході фільтра з часом

Як бачимо (рисунок 4), у випадку $c_*^*(t) = c_*^* = const$ ефективність фільтра

практично не змінюється до моменту часу $\tau_ç$, після якого починає спадати, що підтверджує відомий факт розподілу ефективності фільтра з часом.

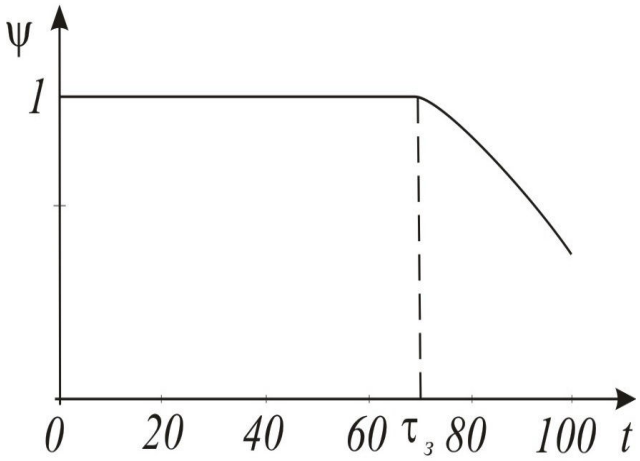

Рисунок 4 – Розподіл ефективності фільтра $\left(\psi = \frac{c_*^* - c}{c_*^*}\right)$

Висновки. Побудована математична модель, що описує закономірності магнітного осадження домішок у пористій фільтруючій насадці, закономірності накопичення („заносу”) домішок у насадці, яка враховує зворотний вплив характеристик процесу (концентрації осаду) на фільтраційні параметри, запропонований алгоритм розв’язання відповідної задачі з визначення часу $\tau_ç$ захисної дії фільтруючої насадки, визначення граничної величини перепаду тиску ΔP, величини $grad\ P$ при зміні ($0 \le x \le L$) і часу ($0 \le t \le \tau_ç$). Наведені результати розрахунків розподілу концентрації домішок та масового обсягу домішок по висоті фільтруючої пористої насадки для різних моментів часу, величини коефіцієнта фільтрування при різних значеннях довжини насадки *L*, що відповідає часу захисної дії (фільтроциклу) насадки. У рамках даної моделі **передбачається** можливість автоматизованого контролю процесу ефективного осадження домішок у намагніченій фільтруючій насадці – залежно від вихідних даних водного середовища, що очищається.

Література

1. Сандуляк А.В. Очистка жидкостей в магнитном поле / Сандуляк А.В. – Львів: Вища школа, 1984. – 168 с.
2. Бомба А. Я. Про асимптотичний метод розв’язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі / А.Я. Бомба // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 4, № 4. – С. 493–496.
3. Сафоник А. П. Нелінійні сингулярно збурені математичні моделі процесів фільтрування / А.П. Сафоник // Волинський математичний вісник. Серія: Прикладна математика. – 2007. – Вип. 4(13). – С. 119–128.
4. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды / Минц Д.М. – М.: Стройиздат, 1964. – 156 с.
5. Сандуляк А.В. Магнитно-фильтрационная очистка жидкостей и газов / Сандуляк А.В. – М.: Химия.– 1988.– 132 с.

Одержано 24.06.2009 р.