Шелестовський Б. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором / Б. Шелестовський, І. Габрусєва // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 3. — С. 48-53. — (механіка та матеріалознавство).

УДК. 539.3

Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук; І. Габрусєва

Тернопільський державний технічний університет ім. І.Пулюя

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ІЗ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИМ ПІВПРОСТОРОМ

Побудовано розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа складної конфігурації на попередньо напружений півпростір із використанням лінеаризованої теорії пружності. Розглянуто числовий приклад побудови функції розподілу контактних напружень. Проаналізовано вплив наявності залишкових деформацій у півпросторі на розподіл контактних напружень під штампом.

Ключові слова: *кільцевий штамп, півпростір, попередні деформації, контактні напруження.*

B. Shelestovsky, I. Gabruseva

CONTACT INTERACTION OF THE ANNULAR PUNCH AND SEMISPACE WITH RESIDUAL DEFORMATIONS

The solving of tasks on the contakt interaction of the annular punch and semispace with residual deformations is built. Numerical example of searching components of contact strain under the punch, is consider. The effect of parameters of the field of residual deformations on distributing contact stresses tensions is analysed.

Key words: *annular punch, semispace, residual deformations, contact stresses.*

Підвищення надійності та довговічності конструкцій та механізмів – одне з найактуальніших завдань сучасного будівництва та машинобудування. Як відомо [1], у елементах конструкцій та деталях машин майже завжди наявні залишкові деформації. Природа їх виникнення може бути дуже різною: незворотні деформації (пластичність, повзучість), структурні перетворення у матеріалі, зміна агрегатного стану в окремих місцях конструкцій, механічні, хімічні та технологічні процеси тощо. До того ж напруження, що при цьому виникають, так, як і будь-які інші, можуть спричинити руйнування, прискорити певні фазові переходи, корозію. Урахування залишкових деформацій при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд дозволяє точніше оцінювати запас міцності матеріалу, а отже – суттєво зменшити його витрати, зберігаючи при цьому необхідні функціональні характеристики елементів у цілому.

Саме тому дослідження контактної взаємодії пружних тіл із залишковими деформаціями – надзвичайно актуальне завдання сьогодення, і залишатиметься таким у майбутньому.

Задачі про контактну взаємодію тіл із залишковими деформаціями раніше розв'язували багато вітчизняних та закордонних учених. Достатньо повний опис та класифікацію робіт, присвячених теорії контактної взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими штампами, можна знайти у статті [2]. Проте недостатньо вивченим залишається питання взаємодії саме жорстких кільцевих штампів складної конфігурації із пружним півпростором та шаром, у якому наявні залишкові деформації.

Розглянемо осесиметричну задачу про тиск жорсткого кільцевого штампа на пружний півпростір, у якому є залишкові деформації, зумовлені наявністю потенціалу гармонічного типу [1].

Штамп втискується у півпростір поступально, без обертання та тертя із постійною силою P. Його утворено обертанням навколо спільної осі двох віток парабол, спряжених у вершинах відрізком прямої, перпендикулярної до осі обертання. Осі парабол, що обмежують штамп, паралельні до спільної осі обертання, що співпадають із лінією дії сили P.

Виберемо циліндричну систему координат $(0, r, \varphi, z)$ так, щоб координатна площина $(r, 0, \varphi)$ збігалася із граничною площиною півпростору, а вісь Oz – із лінією дії сили P – рис. 1.

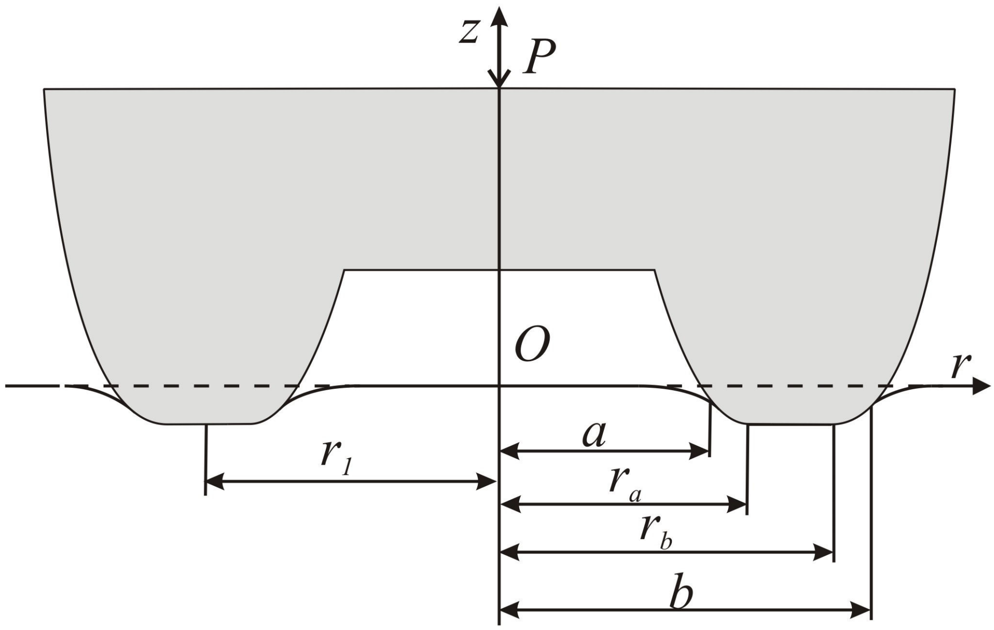

Рисунок 1 – Схема контактної взаємодії

Будемо вважати залишкові напруження, що виникли у півпросторі, однорідними. Отже, згідно із [1], можна використати такі вирази для компонентів тензора напружень (1) та вектора переміщень (2):

$$\sigma_{rz}(r,z) = \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 \left\{ \left[A_1 + A_2(s_0 + \alpha z) \right] e^{\alpha z} + \left[B_1 + B_2(s_0 - \alpha z) \right] e^{-\alpha z} \right\} J_0(\alpha r)\, d\alpha ;$$

$$\sigma_{zz}(r,z) = c_{44}(1+m_1) l_1 \int_0^\infty \alpha^3 \left\{ \left[A_1 + A_2(s + \alpha z) \right] e^{\alpha z} + \left[B_1 + B_2(s - \alpha z) \right] e^{-\alpha z} \right\} J_0(\alpha r)\, d\alpha ; \tag{1}$$

$$u_r(r,z) = -\int_0^\infty \alpha^2 \left\{ \left[A_1 + A_2(1 + \alpha z) \right] e^{\alpha z} + \left[B_1 + B_2(1 + \alpha z) \right] e^{-\alpha z} \right\} J_1(\alpha r)\, d\alpha ;$$

$$u_z(r,z) = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^2 \left\{ \left[A_1 + A_2(s_1 + \alpha z) \right] e^{\alpha z} + \left[B_1 + B_2(s_1 - \alpha z) \right] e^{-\alpha z} \right\} J_0(\alpha r)\, d\alpha . \tag{2}$$

У співвідношеннях (1) та (2) константи c_{44}, m_1, n_1, l_1 залежать від характеру пружного потенціалу та підбираються у кожному окремому випадку відповідно до [3].

На граничній площині півпростору при $z = 0$, увівши позначення $F_1 = A_1 + B_1$, $F_2 = A_2 + B_2$, будемо мати

$$\sigma_{rz}(r,0) = \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^3 \left\{ F_1 + s_0 F_2 \right\} J_0(\alpha r)\, d\alpha ; \tag{3}$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = c_{44}(1+m_1) l_1 \int_0^\infty \alpha^3 \left\{ F_1 + s F_2 \right\} J_0(\alpha r)\, d\alpha ; \tag{4}$$

$$u_r(r,0) = -\int_0^\infty \alpha^2 \{F_1 + F_2\} J_1(\alpha r)\, d\alpha\,; \tag{5}$$

$$u_z(r,0) = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^2 \{F_1 + s_1 F_2\} J_0(\alpha r)\, d\alpha\,. \tag{6}$$

Граничні умови поставленої задачі матимуть вигляд

$$\sigma_{rz}(r,0) = 0,\ 0 \le r < \infty\,; \tag{7}$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = 0,\ 0 \le r \le a,\ b \le r\,; \tag{8}$$

$$u_z(r,0) = w(r),\ a \le r \le b\,. \tag{9}$$

Функція $w(r)$, що описує форму жорсткого штампа має вигляд

$$w(r) = \begin{cases} w(a) + \dfrac{1}{2R_1}\left[(r_a - r)^2 - (r_a - a)^2\right],\ a \le r < r_a; \\ w(a) - \dfrac{1}{2R_1}(r_a - a)^2,\ r_a \le r < r_1; \\ w(b) - \dfrac{1}{2R_2}(r_b - b)^2,\ r_1 \le r < r_b; \\ w(b) + \dfrac{1}{2R_2}\left[(r_b - r)^2 - (r_b - b)^2\right],\ r_b \le r \le b; \end{cases} \tag{10}$$

де $r_1 = \dfrac{r_a + r_b}{2}$.

Задовольнивши граничну умову (7), одержуємо співвідношення між невідомими функціями F_1 та F_2

$$F_1 = -s_0 F_2\,. \tag{11}$$

Із урахуванням (11) вирази (4) та (6) набувають вигляду

$$\sigma_{zz}(r,0) = c_{44}(1+m_1)(s-s_0)\, l_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r)\, d\alpha\,; \tag{12}$$

$$u_z(r,0) = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^2 F_2 J_0(\alpha r)\, d\alpha\,. \tag{13}$$

Задовольнивши граничну умову (8), матимемо

$$c_{44}(1+m_1)(s-s_0)\, l_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0,\ 0 \le r \le a,\ b \le r\,. \tag{14}$$

Уведемо невідому функцію $x(r)$, $a \le r \le b$, за допомогою якої продовжимо співвідношення (14) на проміжок $0 \le r < \infty$

$$c_{44}(1+m_1)(s-s_0)\, l_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r)\, d\alpha = x(r)\left[U(r-a) - U(r-b)\right],\ 0 \le r < \infty\,, \tag{15}$$

де $U(r)$ – функція Гевісайда.

Функція $x(r)$ визначає розподіл контактних напружень під штампом. Урахувавши її неперервність, а також рівність нулю на границі області контакту (при $r = a$ та $r = b$) зобразимо $x(r)$ у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є за функціями $L_n(r) = J_0\left(\dfrac{\gamma_n}{a} r\right) Y_0(\gamma_n) - Y_0\left(\dfrac{\gamma_n}{a} r\right) J_0(\gamma_n)$, де γ_n – додатні корені рівняння

$J_0\left(\frac{b}{a}x\right)Y_0(x)-Y_0\left(\frac{b}{a}x\right)J_0(x)=0$. Тобто у вигляді

$$x(r)=\sum_{n=1}^{N}a_nL_n(r), \tag{16}$$

де a_n – невідомі коефіцієнти.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (15), одержуємо вираз

$$\alpha^2F_2=\frac{1}{c_{44}(1+m_1)(s-s_0)l_1}\sum_{n=1}^{N}a_n\int_a^b rL_n(r)J_0(\alpha r)dr,\ 0\le\alpha<\infty . \tag{17}$$

Уведемо позначення

$$\Phi_n(\alpha)=\int_a^b rL_n(r)J_0(\alpha r)dr=$$

$$=\frac{\gamma_na^2}{\gamma_n^2-(\alpha a)^2}\left\{\frac{b}{a}\left[J_1\left(\frac{b}{a}\gamma_n\right)Y_0(\gamma_n)-Y_1\left(\frac{b}{a}\gamma_n\right)J_0(\gamma_n)\right]\times J_0(\alpha b)-\right.$$

$$\left.-\left[J_1(\gamma_n)Y_0(\gamma_n)-Y_1(\gamma_n)J_0(\gamma_n)\right]\times J_0(\alpha a)\right\}.$$

Використавши співвідношення (13), (17) та граничну умову (9), матимемо:

$$k_1\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^\infty\Phi_n(\alpha)\left[J_0(\alpha r)-J_0(\alpha a)\right]d\alpha=w_1^*(r),\ 0\le r<r_1; \tag{18}$$

$$k_1\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^\infty\Phi_n(\alpha)\left[J_0(\alpha r)-J_0(\alpha b)\right]d\alpha=w_2^*(r),\ r_1\le r<b. \tag{19}$$

У співвідношеннях (18) та (19) використані такі позначення:

$$w_1^*(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{2R_1}\left[(r_a-r)^2-(r_a-a)^2\right],\ a\le r<r_a;\\ -\dfrac{1}{2R_1}(r_a-a)^2,\ r_a\le r<r_1;\end{cases}$$

$$w_2^*(r)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2R_2}(r_b-b)^2,\ r_1\le r<r_b;\\ \dfrac{1}{2R_2}\left[(r_b-r)^2-(r_b-b)^2\right],\ r_b\le r\le b;\end{cases}$$

$$k_1=\frac{m_1(s-s_0)}{c_{44}(1+m_1)(s-s_0)l_1\sqrt{n_1}}.$$

Помноживши співвідношення (18) та (19) на $rL_q(r)$ та проінтегрувавши одержані вирази по r від a до b, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^\infty\Phi_n(\alpha)\left[\Phi_q(\alpha)-K_q^{(1)}J_0(\alpha a)-K_q^{(2)}J_0(\alpha b)\right]d\alpha=\frac{1}{k_1}\{w_1+w_2\},\ q=\overline{1,N}, \tag{20}$$

де $K_q^{(1)}=\int_a^{r_1}rL_q(r)dr$, $K_q^{(2)}=\int_{r_1}^{b}rL_q(r)dr$,

$$w_1=\int_a^{r_1}rw_1^*(r)L_q(r)dr,\ w_2=\int_{r_1}^{b}rw_2^*(r)L_q(r)dr.$$

Використавши метод суперпозиції та увівши позначення

$$a_n = \frac{1}{k_1}\left[a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2\right], \text{ де } z_1 = \frac{1}{2R_1},\ z_2 = \frac{1}{2R_2} \tag{21}$$

із (20) одержуємо дві системи відносно невідомих $a_n^{(1)}$ та $a_n^{(2)}$.

Величини z_i у співвідношеннях (21) знаходимо із умов рівноваги штампа та рівності вертикальних переміщень граничної площини півпростору при $r = r_a$ та $r = r_b$

$$\begin{cases} 2\pi \int\limits_a^b r\sigma_{zz}(r,0)\,dr = -P; \\ w(r_a) = w(r_b). \end{cases} \tag{22}$$

Увівши позначення $z_i^* = z_i \dfrac{2\pi}{Pk_1}$, $i = 1,2$, із співвідношень (22) одержуємо систему відносно безрозмірних невідомих z_1^* та z_2^*

$$\begin{cases} z_1^* \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(1)} K_n + z_2^* \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(2)} K_n = -1; \\ z_1^* \left[\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(1)} M_n^2 + (r_a - a)^2\right] + z_2^* \left[\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(1)} M_n^2 - (r_b - b)^2\right] = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Розв'язавши систему (23), із використанням (21) та (16), одержуємо формулу для знаходження розподілу контактних напружень під штампом:

$$\sigma_{zz}(r,0) = x(r) = \frac{P}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} \left\{a_n^{(1)} z_1^* + a_n^{(2)} z_2^*\right\} L_n(r). \tag{24}$$

На рисунку 2 зображено графіки безрозмірної функції $\sigma_{zz}^* = \dfrac{2\pi}{P}\sigma_{zz}(r,0)$, що описує закон розподілу контактних напружень для наступних значень параметрів площадки контакту $a = 0.4$, $r_a = 0.7$, $r_b = 0.7$, $b = 1$. Пунктирна крива відповідає випадку, коли немає залишкових деформацій, крива 1 – наявності розтягувальних, а крива 2 – наявності стискувальних залишкових деформацій у півпросторі.

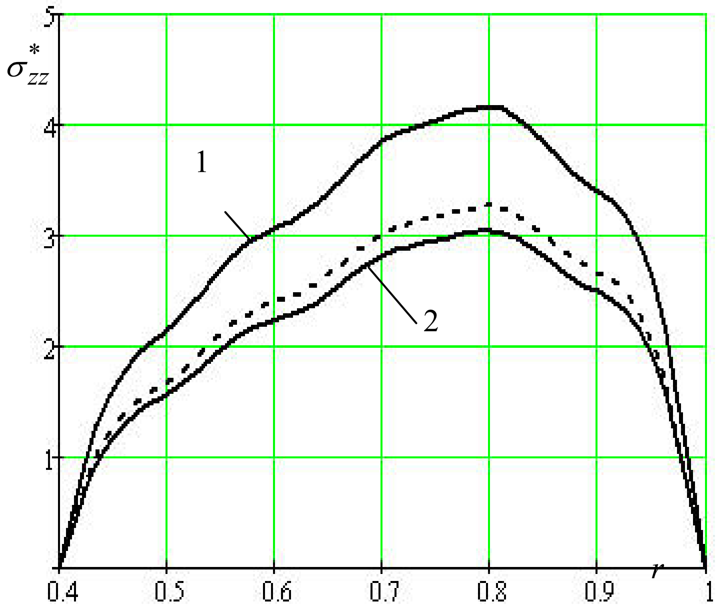

Рисунок 2 – Розподіл напружень під штампом

Висновки. На основі числового експерименту можна зробити висновок, що максимальні за модулем значення контактних напружень досягаються не безпосередньо під вершиною штампа (при $r = r_1$), а у точках, розміщених дещо ближче до зовнішньої межі площадки контакту.

Проаналізувавши одержані результати, можна зробити висновок, що навіть при сталому зовнішньому навантаженні зміна характеру пружного потенціалу спричиняє зміну площадки контакту та відповідну зміну характеру розподілу контактних напружень під штампом. Зокрема, поява у півпросторі розтягувальних залишкових деформацій зумовлює збільшення контактних напружень під штампом, а стискувальних – їхнє зменшення. Достовірність зроблених висновків підтверджує їхнє узгодження із результатами, одержаними іншими авторами [4, 5].

Література

1. Гузь А. Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. – Хмельницкий : 2004. – 682 с.
2. Бабич С. Ю. Контактные задачи для упругих тел. С начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам / С. Ю. Бабич, А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41– 69.
3. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / Александр Николаевич Гузь. – Київ : Наукова думка, 1983. – 296 с.
4. Рудницький В.Б. Просторові контактні задачі лінеаризованої теорії пружності для багатошарових середовищ / В'ячеслав Броніславович Рудницький // Вісник Херсонського національного університету. – 2006. – № 46(6). – С. 420.
5. Гузь О.М. Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями / О. М. Гузь, В. Б. Рудницький // Проблеми математичного моделювання сучасних технологій: зб. наук. пр. за матеріалами міжнар. наук.-техн. конф. – Хмельницький: ХДУ, 2004. – С. 5–35.

Одержано 14.07.2009 р.