

УДК 539.3

О. Максимович, канд. техн. наук

Луцький національний технічний університет

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНОГО СТАНУ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНОК З ОТВОРАМИ І КРИВОЛІНІЙНИМИ ТРІЩИНАМИ ПРИ ВРАХУВАННІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

У статті запропоновано алгоритм розрахунку напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами з урахуванням контакту їхніх берегів. Досліджено вплив механічних характеристик матеріалу на значення КІН при врахуванні контакту берегів тріщин.

Ключові слова: анізотропна пластинка, тріщина, контакт берегів.

О. Махymovych

A CALCULATION OF THE TENSE STATE OF ANISOTROPIC PLATES IS WITH OPENINGS AND CURVILINEAR CRACKS AT ACCOUNT OF CONTACT OF THEIR BANKS

In the article the algorithm of calculation of the tense state of anisotropic plates of weak is offered by cracks taking into account the contact of their banks. Thus, the area of contact can consist of a few areas of contact. Investigational influence of mechanical descriptions of material on a value stress intensity factors.

Key words : anisotropic plate, crack, contact of banks.

Методи дослідження напруженого стану біля тріщин в ізотропних і анізотропних пластинках достатньо повно розроблені при розтяжних навантаженнях. При стиску і зсуві пластинок може виникати контакт берегів тріщин, який істотно змінює напружений стан та коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Контакт берегів тріщин може бути і при розтягові пластинок з отворами, якщо тріщини розміщені в зонах стискувальних напружень. Огляд виконаних у цьому напрямку робіт для ізотропних пластинок наведено в [1, 2, 3]. Для анізотропних пластинок таким задачам (у випадку криволінійних тріщин) присвячені окремі роботи [4]. Для визначення областей контакту в літературі, як правило, використовують ітераційні процедури, за допомогою яких досліджували в основному задачі для випадку, коли область контакту одна і прилягає до вершини тріщини або розміщена симетрично. У даній роботі запропоновано підхід, який застосовують у загальному випадку, коли область контакту може складатися із кількох ділянок.

Нехай пружна анізотропна пластинка послаблена отвором і системою тріщин, які лежать на контурі L . Розглянемо випадок, коли пластинка перебуває під дією зусиль на нескінченності, зосереджених сил та зусиль, прикладених до берегів тріщин.

Розглянемо довільну криву Γ , яка лежить в області D , що займає пластинка. Вектори напружень (X_Γ, Y_Γ) і переміщень (u, v) на цій кривій через комплексні потенціали Лехніцького визначимо за формулами [5]

$$Y_\Gamma = -2\operatorname{Re}\left[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'\right], \quad X_\Gamma = 2\operatorname{Re}\left[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'\right], \quad (1)$$

$$u = 2\operatorname{Re}\left[p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)\right], \quad v = 2\operatorname{Re}\left[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)\right], \quad (2)$$

де $z_j = x + s_j y$, $p_j = a_{11}s_j^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16}s_j$, $q_j = \alpha_{12}s_j + \alpha_{22}/s_j - \alpha_{26}$, $j = 1, 2$; s_j – корені

характеристичного рівняння $\alpha_{11}r^4 - 2\alpha_{16}r^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})r^2 - 2\alpha_{26}r + \alpha_{22} = 0$, причому $\text{Im } s_j > 0$, α_{ij} – пружні сталі, $z'_j = dz_j / ds$, ds – диференціал дуги на кривій.

Уведемо вектор напружень $P_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$ у точці кривої Γ на дотичній до неї площині, де N_Γ, T_Γ – проекції вектора на нормаль та дотичну. Цей вектор на основі (1) через комплексні потенціали визначимо за формулою

$$P_\Gamma(z) = \left[(1 + is_1)z'_1 \Phi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1)\bar{z}'_1 \overline{\Phi(z_1)} + (1 + is_2)z'_2 \Psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_2)\bar{z}'_2 \overline{\Psi(z_2)} \right] e^{-iy}, \quad (3)$$

де γ – кут нахилу дотичної у точці $z \in \Gamma$ з координатами (x, y) . При записуванні формули враховано, що $P_\Gamma = i(X_\Gamma + iY_\Gamma)e^{-iy}$.

Інтегральні рівняння задачі для нескінченної пластинки відносно похідних від стрибків переміщень. Розглянемо спочатку нескінченну пластинку з криволінійними тріщинами. Будемо виходити з інтегрального зображення у вигляді [6]

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1(z_1, t)g'_1(s) + \Phi_2(z_1, t)g'_2(s)]ds + \Phi_s(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1(z_2, t)g'_1(s) + \Psi_2(z_2, t)g'_2(s)]ds + \Psi_s(z_2), \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\Phi_j(z_1, t) = \frac{A_j}{z_1 - z_{j0}}, \quad \Psi_j(z_2, t) = \frac{B_j}{z_2 - z_{j0}}, \quad (5)$$

$z_{j0} = \xi + s_j\eta$, t – точка з координатами (ξ, η) , за якими здійснюємо інтегрування,

$$A_1 = \frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = -\frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = \frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = -\frac{i}{2\pi\Delta_2},$$

$\Delta_1 = a_{11}(s_1 - \bar{s}_1)(s_1 - s_2)(s_1 - \bar{s}_2)$, $\Delta_2 = a_{11}(s_2 - \bar{s}_1)(s_2 - s_1)(s_2 - \bar{s}_2)$, $s = s(\xi, \eta)$ – дугова

координата, $g'_j = dg_j / ds$, g_j – невідомі функції, які дорівнюють стрибкам переміщень u і v на берегах тріщини. Комплексні потенціали з індексом s визначають напружений стан суцільної нескінченної пластинки, який виникає тільки від дії зосереджених сил і навантаження на безмежності.

Підставивши (4) у формули для визначення вектора напружень на тріщині (3), отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_L [Q_1(z, t)g'_1(s) + Q_2(z, t)g'_2(s)]ds = Q_T(z) - Q_S(z), \quad (6)$$

де $Q_j(z, t)$ і $Q_S(z)$ – вектори напружень P_L в точці z кривої L , які визначимо за формулою (3) відповідно через комплексні потенціали $\Phi_j(z_1, t), \Psi_j(z_2, t)$ і $\Phi_s(z_1), \Psi_s(z_2)$, Q_T – заданий вектор напружень на тріщинах, який приймаємо однаковим на протилежних берегах. При побудові рівняння (6) використано формулу Племеля-Сохоцького, причому інтеграли типу Коші розглянуто як головні.

Числовий алгоритм розв'язування отриманих рівнянь. У рівняння (6) входять такі інтеграли:

$$A = \int_\Gamma F(\xi, \eta)ds, \quad B(z_1) = \int_\Gamma \frac{F(\xi, \eta)}{t_1 - z_1}ds, \quad C(z_2) = \int_\Gamma \frac{F(\xi, \eta)}{t_2 - z_2}ds, \quad (7)$$

де Γ – гладкий розімкнений контур, ds – диференціал дуги на контурі. Інтеграл B і C розглядаємо як головні, тобто приймаємо, що точка $(x, y) \in \Gamma$. Розглядатимемо випадок, коли контур інтегрування заданий параметрично у вигляді

$\xi = \alpha(\theta), \eta = \beta(\theta), -1 \leq \theta \leq 1$. Функції B і C будемо знаходити в точках $x = \alpha(\tau), y = \beta(\tau), -1 \leq \tau \leq 1$.

Відомо, що невідомі функції в інтегральних рівняннях для тріщин мають кореневі особливості на кінцях тріщин [2,5]. Тому зобразимо $F(\alpha(\theta), \beta(\theta)) = U(\theta) / \sqrt{1 - \theta^2}$, де $U(\theta)$ – гладка, обмежена функція.

Для обчислення цих інтегралів використаємо квадратурну формулу Лобатто і отримаємо [5]

$$A = \sum_{n=1}^N A_n U_n s'_n, B(z_{1\nu}) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{U_k s'_k}{t_{1k} - z_{1\nu}}, C(z_{2\nu}) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{U_k s'_k}{t_{2k} - z_{2\nu}}, \quad (8)$$

де $s'_k = s'(\theta_k), s'(\theta) = \sqrt{\alpha'(\theta)^2 + \beta'(\theta)^2}, t_{1k} = \omega_1(\theta_k), t_{2k} = \omega_2(\theta_k),$

$U_k = U(\theta_k); \theta_k = -\cos(\pi_N(k-1)), k = 1, \dots, N; \pi_N = \frac{\pi}{N-1}; A_k = \pi_N,$ при $k \neq 1$ і

$k \neq N; A_1 = A_N = 0, 5\pi_N; N$ – вибрана кількість вузлових точок, $z_{1\nu} = \omega_1(\tau_\nu), z_{2\nu} = \omega_2(\tau_\nu), \tau_\nu = \cos[\pi_N(\nu - 0,5)]$ при $\nu = 1, \dots, N-1$ □

$\omega_0(\theta) = \alpha(\theta) + i\beta(\theta), \omega_j(\theta) = \alpha(\theta) + s_j\beta(\theta), j = 1, 2$. Зазначимо, що θ_k при $1 < k < N-1$ є коренями полінома Чебишева $U_{N-2}(x)$.

Прийmemo, що для невідомих функцій у нових змінних справедливі формули

$$\frac{dg_1}{d\theta} = \frac{U'(\theta)}{\sqrt{1-\theta^2}}, \frac{dg_2}{d\theta} = \frac{V'(\theta)}{\sqrt{1-\theta^2}}, \quad (9)$$

де $U'(\theta), V'(\theta)$ – гладкі функції.

Підставивши в рівняння (6) співвідношення (9) та використавши наведені квадратурні формули, дійдемо до розв'язування системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^N A_k (q_{vk}^{(1)} U'_k + q_{vk}^{(2)} V'_k) = Q_T(z_\nu) - Q_S(z_\nu), \text{ при } \nu = 1, \dots, N-1, \quad (10)$$

де введено позначення $U'_k = U'(\theta_k), V'_k = V'(\theta_k), q_{vk}^{(j)} = Q_j(z_\nu, t_n), z_{\nu B}$ – точка з координатами $(\alpha(\tau_\nu), \beta(\tau_\nu)), t_n$ – точка з координатами $(\alpha(\theta_n), \beta(\theta_n)), Q_T$ – прикладені до берегів тріщини зусилля.

Доповнивши цю систему рівнянням, що забезпечує умови однозначності переміщень,

$$\sum_{k=1}^N A_k (U'_k + iV'_k) = 0, \quad (11)$$

отримаємо замкнену систему рівнянь.

Знайдемо КІН біля вершини тріщини, якій відповідає параметр $\theta = 1$. Позначимо кут між дотичною до тріщини в околі цієї вершини і віссю Ox через λ . Використавши [1], отримаємо

$$K_I = -2\sqrt{\pi} \operatorname{Im}(W \delta_1 \bar{\delta}_2) / \sqrt{s'_N}, K_{II} = -2\sqrt{\pi} \operatorname{Im}(W \delta_1 \gamma_2) / \sqrt{s'_N}, \quad (12)$$

де $W = \frac{s_1 U_N - V_N}{\Delta_1 z_{1N}} \frac{s_2 - s_1}{s_2 - s_2}, \gamma_j = \sin \lambda - s_j \cos \lambda, \delta_j = \cos \lambda + s_j \sin \lambda$.

Аналогічно запишемо систему рівнянь для випадку, коли анізотропна пластинка додатково послаблена отвором [5,6].

КІН визначимо за знайденими із цієї системи рівнянь значеннями U'_1, V'_1 і U'_N, V'_N [5].

Врахування контакту берегів тріщин. Для врахування можливості контакту берегів тріщини модифікуємо спочатку систему рівнянь (10) таким чином, щоби невідомими у ній були стрибки переміщень.

Для цього розглянемо довільну точку K , яка лежить на тріщині. Позначимо у ній через u_τ, u_n – проєкції вектора переміщень на дотичну і нормаль до тріщини. Переміщення у декартовій системі координат тоді будуть

$$u + iv = (u_\tau + iu_n)dz / ds = (u_\tau + iu_n)e^{i\gamma},$$

де γ – кут нахилу дотичної до тріщини в точці K . Рівняння тріщини опишемо параметрично у вигляді $x + iy = \omega(\xi)$, $-1 \leq \xi \leq 1$. Зобразимо у нових змінних

$$g_\tau = U_\tau(\xi)\sqrt{1-\xi^2}, \quad g_n = U_n(\xi)\sqrt{1-\xi^2},$$

де g_τ, g_n – стрибки переміщень u_τ, u_n ; U_τ, U_n – гладкі функції. Тоді $g_1 + ig_2 = f(\xi)\sqrt{1-\xi^2}$, де $f(\xi) = (U_\tau + iU_n)\exp(i\gamma(\xi))$.

Звідси отримаємо $d(g_1 + ig_2) / d\xi = F(\xi) / \sqrt{1-\xi^2}$, де

$$F(\xi) = f'(\xi)(1-\xi^2) - \xi f(\xi). \quad (13)$$

Для функції $f(\xi)$ при $|\xi| \leq 1$ використаємо інтерполяційну формулу з вузловими точками, що складаються із коренів полінома Чебишева $U_{M-1}(\xi)$ і точок -1 і 1 [7]

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^M \varepsilon_n C_n T_n(\xi), \quad (14)$$

де

$$C_n = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^M \varepsilon_k f_k T_n(\xi_k), \quad f_k = f(\xi_k), \quad \xi_k = \cos \frac{\pi(M-k)}{M}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & 1 < n < M, \\ 0,5, & n = 0; n = M. \end{cases}$$

Підставивши формулу (14) в (13), отримаємо

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^M C_n w_n(\xi),$$

де $w_n(\xi) = -(n+1)\xi T_n(\xi) + nT_{n-1}(\xi)$, при $n > 0$, $w_0(\xi) = -\varepsilon_0 T_1(\xi)$. Тут враховано, що при $n > 0$ отримаємо $(1-\xi^2)T_n'(\xi) = n[T_{n-1}(\xi) - \xi T_n(\xi)]$.

Перепишемо її у вигляді

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^M f_k W_k(\xi), \quad \text{де } W_k(\xi) = \frac{2\varepsilon_k}{M} \sum_{n=0}^M T_n(\xi_k) g_n(\xi). \quad (15)$$

При $\xi = \cos \theta$, враховуючи, що $\xi_k = \cos \lambda_k$, $\lambda_k = \pi(M-k)/M$, формула спрощується:

$$W_k(\cos \theta) = -\frac{2\varepsilon_k}{M} \sum_{n=0}^M \cos n\lambda_k [(n+1)\cos \theta \cos n\theta + n \cos(n-1)\theta].$$

Використавши формули для сум тригонометричних функцій, отримаємо замкнені прості формули для знаходження функції $W_k(\cos \theta)$.

Розглянемо систему комплексних рівнянь (10), які виникають при знаходженні НДС пластинок з тріщинами за використання інтегрального рівняння відносно похідних від стрибків переміщень, яку запишемо

$$\sum_{n=1}^N A_{vn} U_n' + \sum_{n=1}^N B_{vn} V_n' = q_v, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (16)$$

де $A_{vn} = A_n q_{vn}^{(1)}$, $B_{vn} = A_n q_{vn}^{(2)}$, $q_v = Q_T(z_v) - Q_S(z_v)$, $U_n' = U'(\theta_n)$, $V_n' = V'(\theta_n)$. Додаткове рівняння, яке забезпечує однозначність переміщень, не виписуємо, оскільки у використаному далі підході ці умови виконуються тотожно.

Використовуючи (15), запишемо $F_n = \sum_{k=0}^{N-2} f_k W_{nk}$, де

$F_n = F(\theta_n) = U'_n + iV'_n$, $W_{nk} = W_k(\theta_n)$, $n = 1, \dots, N$. Тут функції $W_k(t)$ визначимо за наведеними вище формулами при $M=N-2$.

Звідси отримаємо

$$U'_n = \sum_{k=0}^{N-2} W_{nk} (U_k l_k - V_k m_k), \quad V'_n = \sum_{k=0}^{N-2} W_{nk} (U_k m_k + V_k l_k),$$

де $U_k = U_\tau(\xi_k)$, $V_k = U_n(\xi_k)$, $l_k = \cos \gamma_k$, $m_k = \sin \gamma_k$, $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$.

Підставивши їх у рівняння (16), отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-2} \alpha_{vk} U_k + \sum_{k=0}^{N-2} \beta_{vk} V_k = q_v, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (17)$$

де $\alpha_{vk} = a_{vk} l_k + b_{vk} m_k$, $\beta_{vk} = -a_{vk} m_k + b_{vk} l_k$, $a_{vk} = \sum_{n=1}^N A_{vn} W_{nk}$, $b_{vk} = \sum_{n=1}^N B_{vn} W_{nk}$.

Знаходження КІН. КІН знайдемо через величини $U'(\pm 1), V'(\pm 1)$. Їх визначимо з формули $U'(\xi) + iV'(\xi) = F(\xi) = f'(\xi)(1 - \xi^2) - \xi f(\xi)$. Звідси

$$(U' + iV')(\pm 1) = mf(\pm 1) = m(U_\tau(\pm 1) + iU_n(\pm 1)) \exp(i\gamma(\pm 1)).$$

Тут $U_\tau(1) = U_{N-2}, U_n(1) = V_{N-2}, U_\tau(-1) = U_0, U_n(-1) = V_0$.

Знаходження контактних напружень. У випадку контакту берегів тріщини будуть невідомими контактні нормальні напруження σ (далі обмежимося випадком гладких берегів тріщин).

Для розв'язування задачі спочатку виключимо із системи (17) невідомі U_k . Для цього перепишемо її у матричному вигляді

$$\begin{cases} D_{11}U + D_{12}V = S, \\ D_{21}U + D_{22}V = T, \end{cases} \quad (18)$$

де $D_{11} = \text{Re } \alpha, D_{12} = \text{Re } \beta, D_{21} = \text{Re } \beta, D_{22} = \text{Im } \beta$, α і β – матриці, які складаються із коефіцієнтів α_{vk} і β_{vk} ; $S = \text{Re } q, T = \text{Im } q$; U, V, q – стовпчики, що відповідно складаються із коефіцієнтів U_k, V_k, q_v .

Із другого рівняння (18) отримаємо $U = -(D_{21}^{-1}D_{22})V + D_{21}^{-1}T$. Тоді з першого рівняння матимемо матричне рівняння

$$DV = p, \quad (19)$$

де $D = D_{12} - D_{11}D_{21}^{-1}D_{22}$, $p = S - (D_{11}D_{21}^{-1})T$.

При розгляді контактних задач додатково будуть невідомі контактні напруження на берегах тріщин. Позначимо невідомі контактні напруження у вузлових точках z_v через σ_v , а стовпчик, що складається із цих значень, позначимо через σ . Тоді систему рівнянь (19) запишемо так:

$$\sum_{k=0}^{N-2} D_{nk} V_k = p_n + \sigma_n, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

де p_n – елементи стовпчика $p = S - (D_{11}D_{21}^{-1})T$, D_{nk} – коефіцієнти матриці D .

Невідомі контактні напруження і стрибки переміщень у вузлових точках задовольняють нерівності $\sigma_n \leq 0, V_n \geq 0$. У зв'язку з цим розв'язок контактної задачі задовольняє альтернативну систему рівнянь-нерівностей

$$\sum_{k=0}^{N-2} D_{nk} V_k = p_n, \text{ при } V_n > 0, \quad (20)$$

$$\sum_{k=0}^{N-2} D_{nk} V_k \leq p_n, \text{ при } V_n = 0, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (21)$$

Розглянемо величину

$$I = - \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{N-2} (D_{nk} V_k - p_n) V_n. \quad (I = - \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{N-2} D_{nk} V_k V_n + \sum_{n=0}^{N-2} p_n V_n)$$

та прийнемо, що змінні V_n задовольняють умови (20), (21).

Очевидно, що величина I є додатною та на точному розв'язку контактної задачі вона дорівнює нулю. Тому розглянемо таку задачу: знайдемо мінімум величини I , виконуючи умови (20, 21) та нерівності $V_n \geq 0$.

Така задача належить до добре вивченої задачі квадратичного програмування. Після її розв'язування просто визначити точність розв'язку – на основі отриманого значення величини I , яка на точному розв'язку дорівнює нулю.

Знайшовши величини V_n із задачі квадратичного програмування, контактні напруження визначимо за формулою

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{N-2} D_{nk} V_k - p_n.$$

Результати розрахунків. Розглянемо пластинку з тріщиною, що лежить на дузі параболи і описується рівнянням $y = ka(x^2 / a^2 - 1)$, $-a \leq x \leq a$.

Розраховані контактні напруження для $k=1$ при стиску пластинки зусиллями p , що діють під кутом $-\pi/4$ до вісі Ox для ізотропної пластинки, зображено на рис.1а. На рис.1б зображено контактні напруження для скло-епоксидної пластинки, для якої пружні сталі дорівнюють $E_y = 54,18$ ГПа; $E_x = 18$ ГПа; $G_{xy} = 9$ ГПа; $\nu_{xy} = 0,25$. На рис.1в зображено аналогічні дані для пластинки з того ж матеріалу, коли вісі ортотропії повернуті на 90^0 . Зверху на рисунку наведено відносні значення КІН $F_{I,II} = K_{I,II} / p\sqrt{\pi a}$ у лівій A та правій B вершинах.

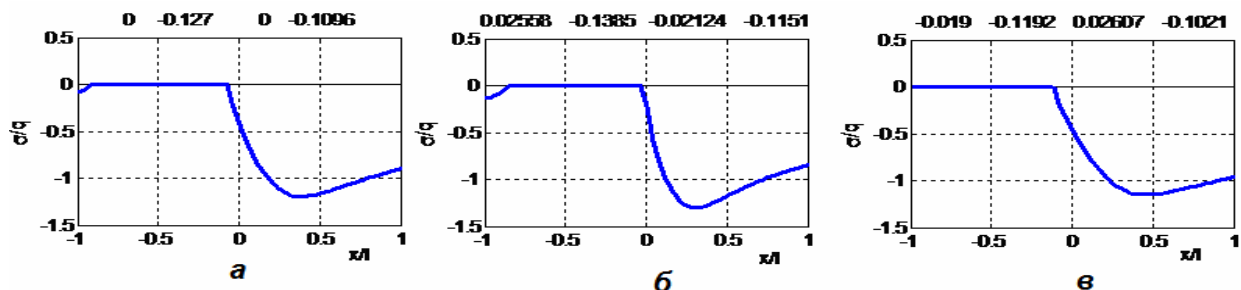


Рисунок 1. Розподіл контактних напружень на берегах тріщини

Як бачимо, для перших двох випадків виникали дві ділянки контакту, а в третьому – одна. Для ізотропного матеріалу за контакту берегів тріщини біля вершин КІН $K_I = 0$, а для анізотропних пластинок ця величина не дорівнює нулю.

Розглянуто пластинку з круговим отвором радіуса R , послаблену прямолінійною тріщиною півдовжиною a , центр якої розміщено в точці з координатами $x_c = (R + 2d) \cos \alpha$, $y_c = (R + 2d) \sin \alpha$, тріщина нахилена під кутом α до вісі Ox .

Розраховані значення КІН та максимальні значення контактних напружень при $\alpha = 7/16\pi$, $d = 0,1R$ у випадку розтягу пластинки в напрямку вісі Oy наведено в таблиці 1 для ізотропного матеріалу та скло-епоксидної пластинки (у третьому рядку вісі ортотропії повернуті на 90^0). Зазначимо, що в цьому випадку контакт мав місце на усій тріщині.

Таблиця 1 – КІН для тріщини в пластинці з круговим отвором

	$F_I(A)$	$F_{II}(A)$	$F_I(B)$	$F_{II}(B)$	σ_{\max}
Ізотр.	0	0,1656	0	0,2072	0,4734
Скло-епок.	-0,2594	0,2849	-0,1267	0,2484	0,2725
Скло-епок.*	0,0069	0,084	0,0093	0,1126	0,3227

Висновки. Запропоновано алгоритм дослідження напруженого стану анізотропних пластинок із тріщинами з врахуванням контакту їхніх берегів, який базується на методі інтегральних рівнянь. Задачу знаходження стрибків переміщень зведено до системи альтернативних рівнянь-нерівностей і далі до задачі квадратичного програмування. Ефективність алгоритму проілюстровано при дослідженні напружень біля тріщин при різних навантаженнях із несиметрично розміщеними ділянками контакту. Встановлено випадки, коли значення КІН мало або істотно залежать від механічних характеристик матеріалу.

Література

1. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. — Київ: Наукова думка, 1983. — 277 с.
2. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / Саврук М.П. — Київ: Наукова думка, 1981. — 324 с.
3. Дацишин О.П. Напружений стан півплощини з крайовою тріщиною під герцівським навантаженням / О.П. Дацишин, Г.П. Марченко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – №1 – С. 23–35.
4. Стрельникова Е.А. О влиянии контакта берегов криволинейной трещины в анизотропной пластине на коэффициенты интенсивности / Е.А. Стрельникова // Проблемы машиностроения. – 1980. – № 12. – С. 15–19.
5. Божидарнік В.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
6. Максимович О.В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у анізотропних пластинчастих елементах конструкцій та деталях машин / О.В. Максимович // Международный сборник научных трудов «Прогрессивные технологии и системы машиностроения» Донецкого национального технического университета. – 2009. – Выпуск 37. – С. 136–144.
7. Mason J.C. Chebyshev Polynomials / J.C. Mason, D.C. Handscomb. – London, New York, Washington: CRC Press LLC, 2003. – 335 p.

Одержано 14.07.2009 р.