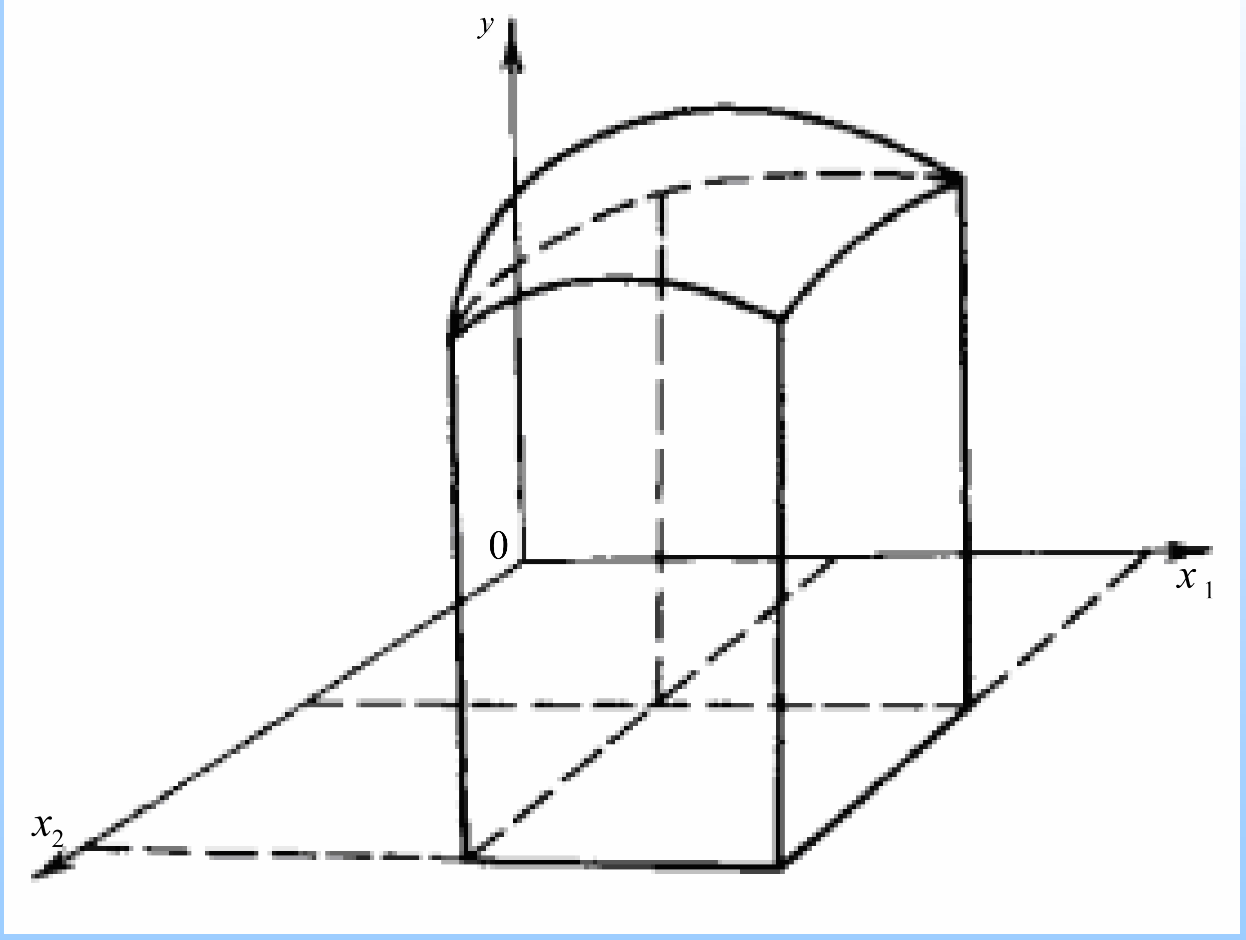
Оптимізаційні методи планування експериментів. Крокова процедура, метод Гаусса-Зейделя, метод крутого сходження

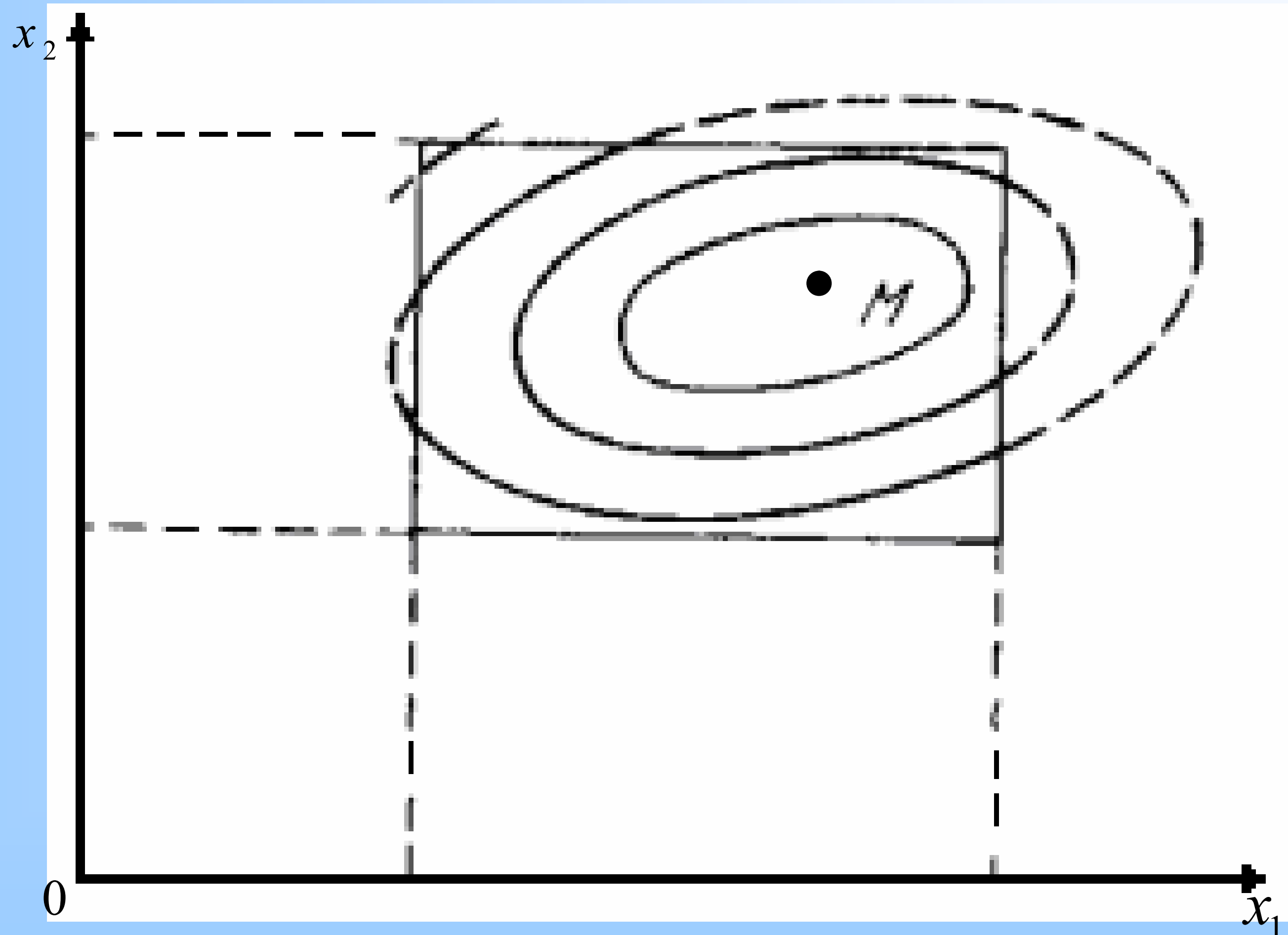
Підготував:
Студент групи СНм-51
Готович В. А.

Тернопіль, 2010

Поверхня відгуку у факторному просторі для експерименту із двома факторами і одних параметром



Проекція поверхні відгуку на площину, на якій визначені фактори експерименту



Задача оптимізації

Задається або вибирається деякий параметр оптимізації, який залежить від вектора керованих параметрів (факторів варіювання): $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Задача оптимізації зводиться до пошуку таких значень параметрів експерименту $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ при яких цільова функція досягає екстремуму (максимуму або мінімуму):

$$y_{onm}(x) = y_{max}(x);$$

$$y_{onm}(\overrightarrow{x^0}) = y_{max}(\vec{x}).$$

Залежність $y(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ утворює деяку поверхню в $(n+1)$ вимірному просторі. Цю поверхню називають поверхнею відклику.

Якщо залежність $y = (\vec{x})$ задана або утворена в аналітичній формі, координати $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ точки екстремуму $\overrightarrow{x^0}$ функції $y = (\vec{x})$ можна знайти, розв'язавши систему диференціальний рівнянь виду:

$$\frac{\partial y(\vec{x})}{\partial x_i} = 0; i = 1, 2, \ldots, n$$

Розв'язком цієї системи буде стаціонарна точка $\vec{x}$, в якій градієнт функції $y = (\vec{x})$ перетворюється в нуль:

$$grady(\vec{x}) = \frac{\partial y}{\partial x_1}\overrightarrow{L_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\overrightarrow{L_2} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\overrightarrow{L_n} = 0,$$

де $\overrightarrow{L_i}$ – напрямний вектор координатної осі x_i .

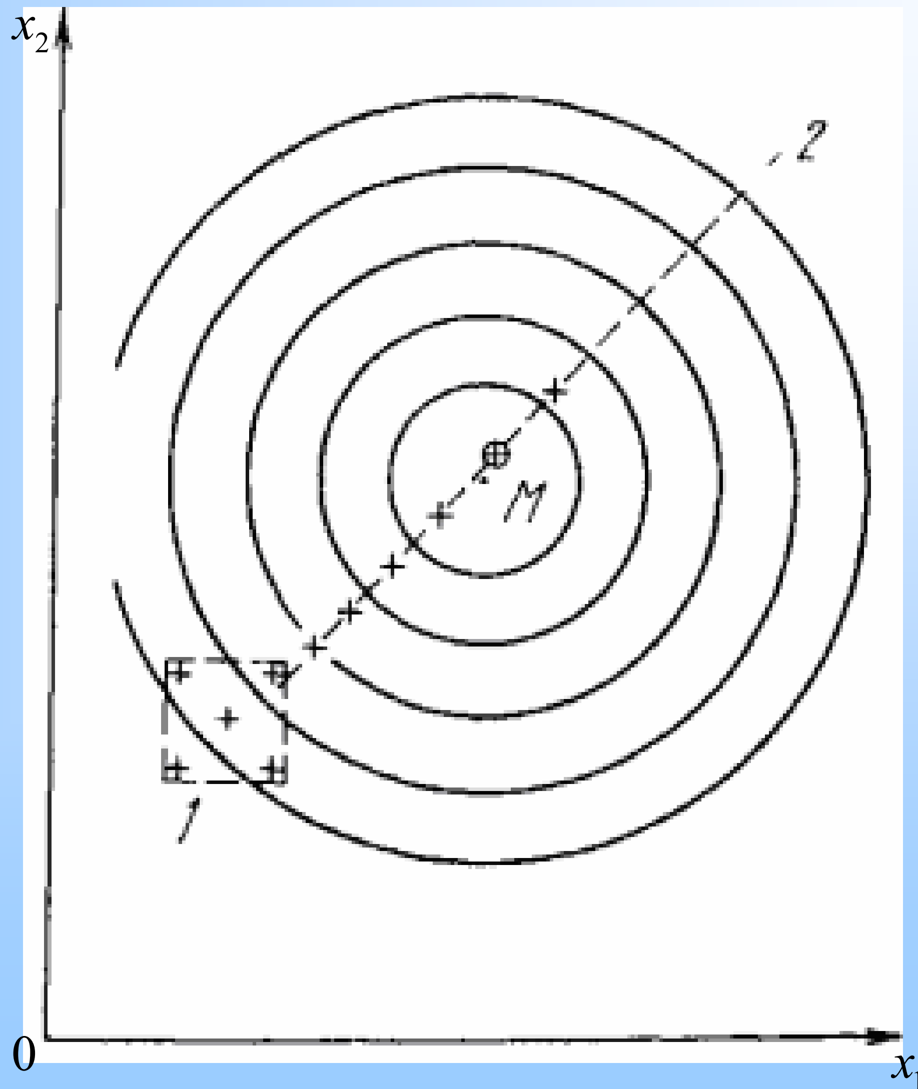
Часто на практиці, аналітична залежність $y = (\vec{x})$ невідома, і експериментатор може лише спостерігати значення відклику при будь-якій комбінації варійованих факторів $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Відомі способи розв'язання задачі оптимізації

1. Визначають повну математичну модель досліджуваного явища. Задачу оптимізації розв'язують аналітичним або чисельним способом.

2. Здійснюють експериментальний пошук стаціонарної точки у факторному просторі змінних .

Кроковий принцип пошуку оптимуму



Метод Гаусса-Зейделя

Метод полягає у послідовному просуванні до екстремум шляхом почергового варіювання кожним із факторів до досягнення часткового екстремуму вихідної величини.

Робоча точка x пересувається поперемінно вздовж кожної із координатних осей $x_i; i=1,2,\ldots,n$ факторного простору, причому перехід до нової $(i+1)$ -ї координати здійснюється після досягнення часткового екстремуму $y=(\vec{x})$ цільової функції на попередньому напрямі, тобто в точці x_{i0}, де

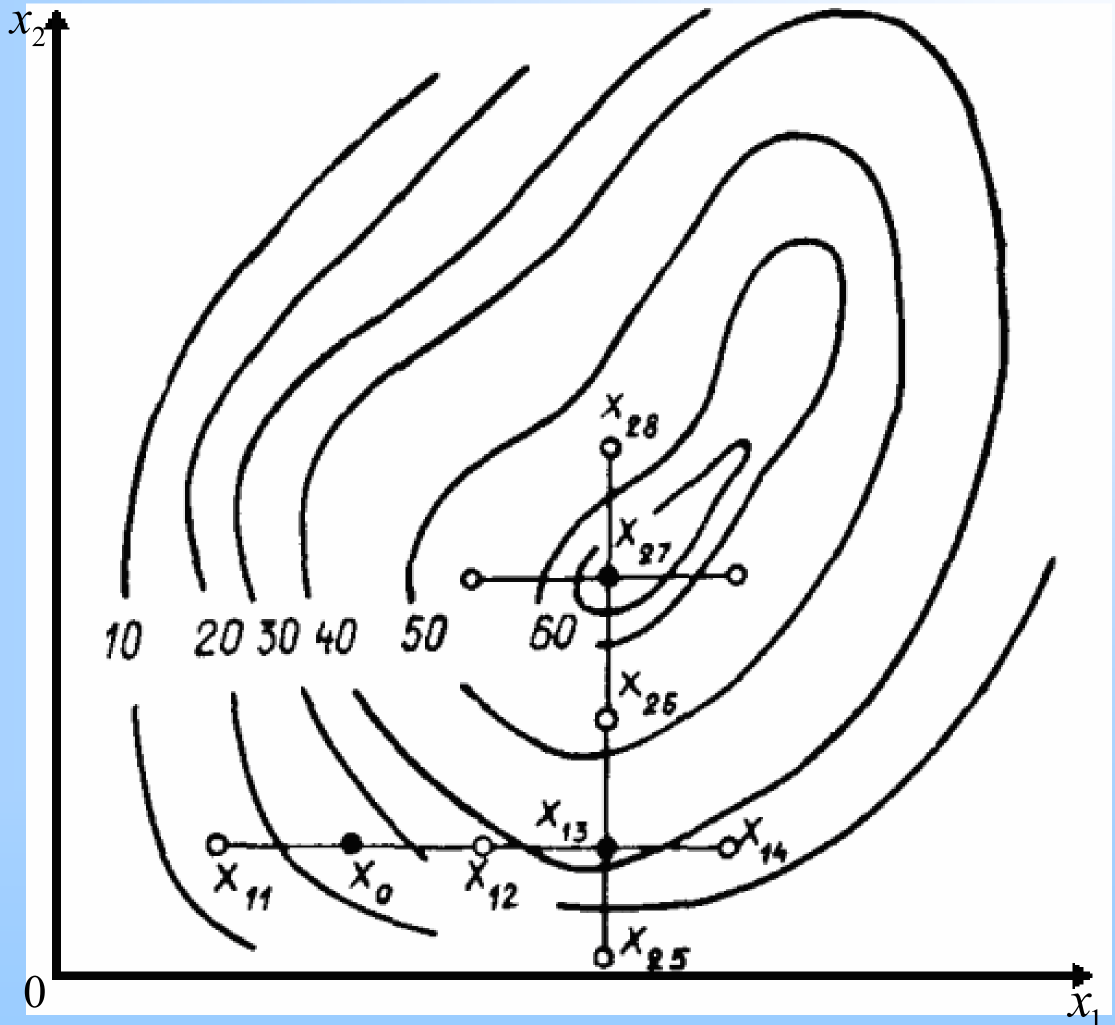
$$\frac{\partial y\left(x_1, x_2, \ldots, x_{i0}, \ldots, x_n\right)}{\partial x} = 0.$$

Досягнувши часткового екстремуму по останній координаті x_n, переходять знов до варіювання першої і т.д.

Напрям руху вздовж $(i+1)$–ї координатної осі обирається за результатами двох пробних експериментів, які полягають у вимірюванні відклику $y(\overrightarrow{x_{i+1;1}})$ і $y(\overrightarrow{x_{i+1;2}})$ в околі базової точки $x_{i,0}$, тобто точки часткового екстремуму по i–й змінній.

Пошук припиняється в деякій точці $\overrightarrow{x_m}$, подальший рух від якої призводить до зменшення (збільшення) значення вихідного параметра. З точністю до максимального кроку варіювання $(\Delta x_i)_{\max}$ це і буде точка екстремуму цільової функції.

Застосування методу Гаусса-Зейделя при пошуку точки оптимуму для двофакторної задачі



Метод крутого сходження (Бокса-Уілсона)

Будується лінійна модель досліджуваного об’єкта: $y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n$

Проводиться експеримент з центром у вихідній точці. Перевіряється значущість оцінок коефіцієнтів b_i лінійної моделі об'єкта.

Обчислюються добутки $b_i \Delta x_i$, де Δx_i – крок варіювання i–го параметра при проведенні повнофакторного експерименту, і фактор, для якого цей добуток максимальний, береться як базовий $\max(b_i \Delta x_i)$

Для базового фактора вибирають крок варіювання при крутому сходженні ρ, залишаючи старий крок або впроваджуючи дрібніший;

Визначаються розміри ρ_i за рештою змінних процесу. Оскільки під час руху по градієнту варійовані параметри повинні змінюватися пропорційно коефіцієнтам $b_j = \dfrac{\Delta y}{\Delta x_i}$, які є компонентами вектора $grad y(x)$, то відповідні ρ_j знаходяться за формулою

$$\rho_j = \frac{b_j \Delta x_j}{\left|\max(b_i \Delta x_i)\right|} \rho .$$

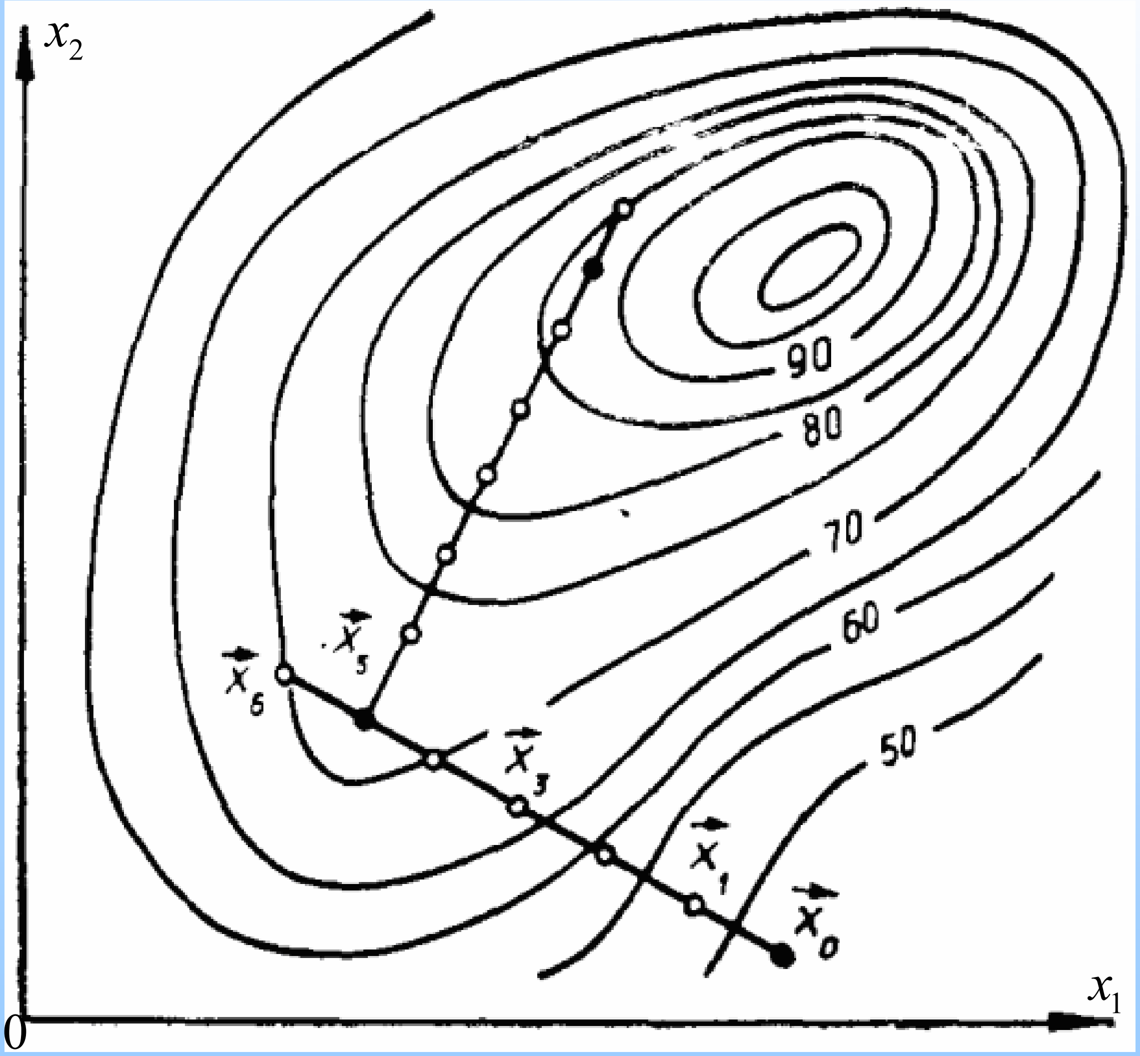
Проводяться уявні досліди, які полягають у завбаченні значень виходу $y_{зав.k}(\vec{x}_k)$ у певних точках $\vec{x}_k$ факторного простору. Для цього незалежні змінні лінійної моделі об'єкта змінюються з урахуванням таким чином, щоб зображуюча точка $\vec{x}$ виконувала кроковий рух у напрямку вектора $grad(\vec{x}_1)$, займаючи послідовно положення $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, \ldots, \vec{x}_m$.

Уявні досліди продовжуються до тих пір, поки виконується нерівність $y_{зав.k} \le (1..2) y_{\max}$, де $y_{\max}$ максимально можливий вихід, який визначається з фізичних міркувань.

Точка $\vec{x}_m$, де в реальному досліді утворено максимальне значення виходу, береться за нову початкову точку, і етап крутого сходження, описаний вище, повторюється;

Пошук припиняється, коли всі коефіцієнти $b_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ лінійної моделі об'єкта виходять незначущими (коли модуль градієнта стає малою величиною $grad y(x) \cong 0$). Це свідчить про вихід в область екстремуму цільової функції.

Застосування методу крутого сходження при пошуку точки оптимуму для двофакторної задачі



Перелік використаних джерел:

- Аністратенко В. О., Федоров В. Г. Математичне планування експериментів в АПК: Навч. Посібник. – К.: Вища шк., 1993. – 375 с. іл..
- Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский Планирование єксперимента при поиске оптимальних условий. Программированное введение в планирование эксперимента.:М. Наука 1971 г.
- http://uk.wikipedia.org/wiki/Метод_Гауса_—_Зейделя – Метод Гауса — Зейделя (січень 2010)
- http://uk.wikipedia.org/wiki/Метод_Бокса_—_Вілсона – Метод Бокса — Вілсона (січень 2010)

Дякую за увагу :)