

УДК 519.63.001.57

О. Гладка

Національний університет водного господарства та  
природокористування

## ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК СЕРЕДОВИЩА І ПАРАМЕТРІВ КВАЗІІДЕАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ЗА УМОВ ЇХ ВЗАЄМОВПЛИВУ

**Резюме.** На основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень у поєднанні з декомпозицією області за методом Шварца розроблено метод числового розв'язання нелінійних модельних задач теорії комплексного квазіпотенціалу для нелінійно-шаруватих криволінійних областей за умов зворотного впливу функції течії на коефіцієнт провідності середовища та ідентифікації параметрів. Розглянуто пряму задачу на знаходження потенціалу поля і побудову динамічної сітки з визначенням ліній течії, що розділяють підобласті сталості коефіцієнта провідності, та обернені – задачі ідентифікації значень коефіцієнта провідності, витрат (потоків) за відомими вимірами на границі області. Проведені тестові числові розрахунки підтверджують ефективність запропонованих алгоритмів.

**Ключові слова:** квазіконформні («кусково-конформні») відображення, комплексний квазіпотенціал, метод сумарних зображень, декомпозиція області, альтернуючий метод Шварца, нелінійно-шарувате середовище.

О. Hladka

## PROBLEMS OF IDENTIFICATION OF CHARACTERISTICS OF THE MEDIUM AND PARAMETERS OF QUASIIDEAL PROCESS IN CONDITIONS THEIR MUTUAL INFLUENCE

**Summary.** The method for numerical solving of nonlinear model problems of the theory of complex quasipotential in nonlinear-layered curvilinear domain in the conditions of inverse influence of the function of flow on the coefficient of the medium conductivity and the identification of parameters was developed on the basis of numerical methods quasiconformal mappings synthesis and summary representations combined with the domain decomposition by the Schwarz method has been developed. In the article the direct problem of finding the potential of field and the construction of the dynamic grid with defining flow lines that separate subdomain constancy coefficient conductivity and inversed ones, problems of identification of coefficient conductivity, values the flows for the known measurements on boundary of domain have been analysed.

The computing technology that automatically solves the problem of choice of nodes and building of the dynamic grid, finding of the unknown dividing lines constancy coefficient of the conductivity medium, constant coefficient the calculation of the velocity field and calculation of other characteristic parameters of the model has been created. Using the synthesis of methods of summary representations and quasiconformal mappings makes possible to increase significantly the effectiveness of the proposed algorithm because it enables to take into account in complex the influence of all boundary and internal nodes that accelerate the achievement of the conjugacy of the desired harmonic functions. Using the alternative Schwarz method for domain decomposition along layers with constant conductivity coefficient enables to find efficiently continuous solutions of boundary value problems with discontinuous coefficients, and to solve problems in more «comfortable» subdomain, than the entire domain of the original problem, to make the computational process parallel, since the calculations in subdomain at each iteration step are independent of each other and can be performed parallel simultaneously using modern computer technologies. Carried out numerical calculations tests testify the effectiveness of the proposed algorithms.

**Key words:** quasiconformal («piecewise-conformal») mappings, complex quasipotential, summary representations method, domain decomposition, alternative Schwarz method, doubly-layered medium.

**Постановка проблеми.** При моделюванні нелінійних процесів витіснення у нафтогазових (сланцевих) пластах за геологічно складних умов виникає потреба враховувати зворотний вплив характеристик процесу на вихідні характеристики середовища. Сучасні математичні моделі, які описують такі процеси і дозволяють тією

чи іншою мірою врахувати ці проблеми (див., напр., [1]), як правило, є дуже складними, потребують спеціальних методів для їх розв'язання. У роботах [2, 3] запропоновано дещо інший підхід до моделювання таких процесів, що полягає у представленні їх стаціонарним квазіідеальним полем з так званим фіктивним коефіцієнтом провідності, що «сумарно» характеризує неоднорідну проникність пористого середовища та фільтраційні властивості речовини, що рухається, і їх взаємовплив.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблема ідентифікації параметрів математичних моделей, розробленню підходів до постановок і розв'язування відповідних задач присвячено велику кількість робіт багатьох учених. Зокрема, це низка методів, що базуються на принципі регуляризації А.Н.Тихонова [4–5], градієнтні методи ідентифікації параметрів багатокомпонентних розподілених систем, що полягають у побудові градієнтів квадратичних функціоналів-нев'язок на основі розв'язання прямих і обернених задач, які описані у роботах В.С. Дейнеки та ін. [6–8], методи граничних інтегральних рівнянь [9] тощо. Проте спеціальні класи задач ідентифікації параметрів квазіідеальних процесів, що описуються еліптичними системами диференціальних рівнянь, залишилися поза увагою дослідників.

У попередніх спільних роботах проф. А.Я. Бомби [10–11] розроблено методіку моделювання квазіідеальних полів для одно-, дво- та трив'язних криволінійних областей, обмежених лініями течії й еквіпотенціальними лініями, що базується на поєднанні числових методів комплексного аналізу [12–14], сумарних зображень [15–17] та декомпозиції області за методом Шварца [18]. Використання синтезу методів сумарних зображень і квазіконформних відображень дозволяє суттєво підвищити ефективність запропонованого алгоритму, оскільки, дає можливість у комплексі (сумарно) враховувати вплив усіх граничних і внутрішніх вузлів, що пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій. Застосування альтернуючого методу Шварца для декомпозиції шаруватих областей по прошарках сталості коефіцієнта провідності (ділянках з «накладками») дає змогу ефективно знаходити неперервні розв'язки задач з розривними коефіцієнтами, розв'язувати задачі у більш «зручних» підобластях, аніж уся область вихідної задачі, розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних технологій.

Розроблені обчислювальні технології розв'язання нелінійних модельних задач для одно-, дво- та трив'язних криволінійних шаруватих областей, у яких провідність середовища задається як кусково-стала функція, залежна від шуканого квазіпотенціалу і/або функції течії, можуть бути успішно використані не лише для дослідження й числового розв'язання прямих задач на побудову динамічної сітки, знаходження поля швидкості, витрат, інших характерних параметрів моделі, а й для числового знаходження розв'язків певного класу обернених задач.

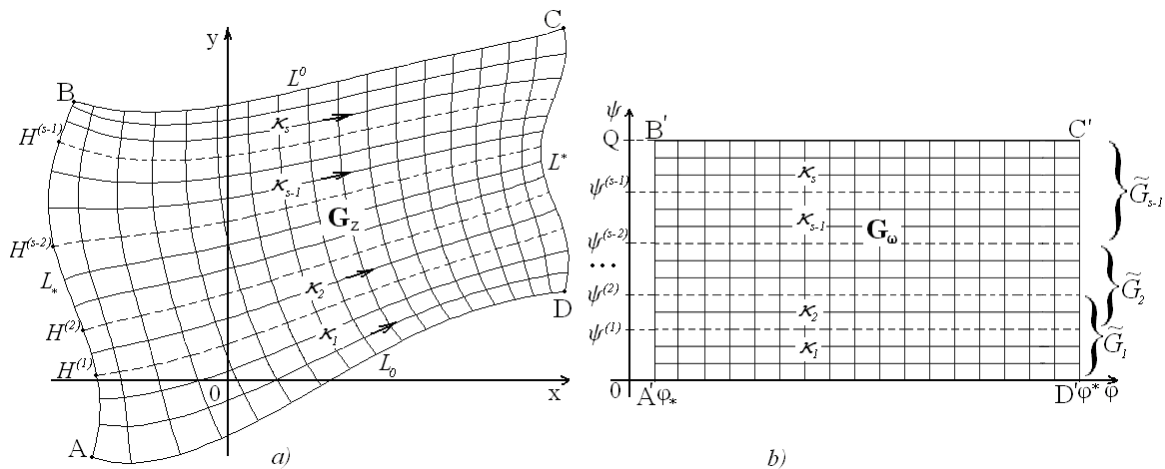
**Метою даної роботи** є поширення запропонованого підходу для розв'язання нелінійних задач ідентифікації значень кусково-сталого коефіцієнта провідності у підобластях сталості (з урахуванням зворотного впливу на конфігурацію цих підобластей функції течії), а також значень витрат (потоків) через ділянки границі цих підобластей, що обмежені відповідними шуканими лініями течії, у криволінійних нелінійно-шаруватих областях (під нелінійно-шаруватими маємо на увазі середовища із кусково-сталим коефіцієнтом провідності, підобласті сталості якого визначаються відповідними лініями течії).

Нижче, спочатку пропонується нова постановка та підхід до розв'язання таких прямих задач, далі у відповідних розділах сформульовані додаткові умови (умови перевизначення) та наведені відповідні зміни до вихідного алгоритму для розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта провідності і значень фільтраційних локальних витрат.

**Математична модель.** Розглянемо стаціонарний процес фільтрації у криволінійній області  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), обмеженій лініями течії  $L_0 = \{z : f_1(x, y) = 0\}$ ,  $L^0 = \{z : f_3(x, y) = 0\}$  і еквіпотенціальними лініями  $L_* = \{z : f_2(x, y) = 0\}$ ,  $L^* = \{z : f_4(x, y) = 0\}$ , який описується рівняннями [12]:  $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$ ,  $\text{div } \vec{v} = 0$ , де  $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$  – швидкість,  $\varphi$  – потенціал поля, такий, що  $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$ ,  $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{L_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{L^0} = 0$  ( $n$  – зовнішня нормаль до відповідної лінії),  $\psi = \psi(x, y)$  – функція течії, комплексно спряжена до  $\varphi$ ,  $\kappa$  – так званий фіктивний коефіцієнт провідності, що характеризує проникність пористого середовища та фільтраційні властивості речовини, що рухається, – кусково-стала функція із розривами вздовж шуканих ліній течії  $L_z^{(l)} = \{z \in G_z : \psi = \psi^{(l)}\}$ , що проходять через задані точки  $H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L_z^{(l)} \cap L_*$ ,  $l = \overline{1, s-1}$ ,  $H^{(0)} = A$ ,  $H^{(s)} = B$  (див. рис.1). З метою моделювання такого нелінійно-шаруватого процесу покладемо

$$\kappa(\psi(x, y)) = \begin{cases} \kappa_l, & \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} = \psi^{(l-1)} + Q_l, \\ l = \overline{1, s}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\kappa_l$  – дійсні додатні числа,  $\psi^{(0)} = 0$ ,  $Q_l = \int_{L_*^{(l)}} -v_y dx + v_x dy$  – невідомі витрати (потоки) через лінії  $L_*^{(l)} = \{z \in L_* : H^{(l-1)} \leq (x, y) \leq H^{(l)}\}$ .



**Рисунок 1.** Схема області фільтрації (а) та відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу (б)

**Figure 1.** Scheme of filtration domain (a) and the corresponding domain of complex quasipotential (b)

Аналогічно до [10–11], розглядаємо більш загальну задачу на квазіконформне («кусково-конформне») відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  області  $G_z = \left( \bigcup_{l=1}^s G_z^{(l)} \right) \cup \left( \bigcup_{l=1}^{s-1} L_z^{(l)} \right)$  ( $G_z^{(l)} = \{z \in G_z : \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\}$ ) на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \left( \bigcup_{l=1}^s G_\omega^{(l)} \right) \cup \left( \bigcup_{l=1}^{s-1} L_\omega^{(l)} \right)$  ( $G_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\}$ ),

$L_\omega^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \psi = \psi^{(l)}\}$  з невідомою повною витратою  $Q = \sum_{l=1}^s Q_l = \int_{L_*} -v_y dx + v_x dy$  і

невідомими лініями розділу  $L_z^{(l)}$  (вздовж яких задані відповідні умови спряження):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^{(l)}, \\ \kappa = \kappa_l, \quad (x, y) \in G_z^{(l)}, \quad l = \overline{1, s}, \\ \psi(x^{(l)}, y^{(l)}) = \psi^{(l)}, \quad [\psi]_{L_z^{(l)}} = 0, \quad \left[ \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]_{L_z^{(l)}} = 0, \quad l = \overline{1, s-1}, \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_0} = 0, \quad \psi|_{L^0} = \int_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \end{array} \right. \quad (2)$$

де  $[f]$  – стрибок функції  $f$  при переході по нормалі через відповідну лінію.

Обернена до (2), в сенсі [11], крайова задача на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  з урахуванням (1) зводиться до задачі [2, 10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x(\varphi, \psi) = 0, \quad \Delta y(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega^{(l)}, \quad l = \overline{1, s}, \\ [(x, y)]_{\psi=\psi^{(l)}} = 0, \quad \left[ \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = \left[ \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right]_{\psi=\psi^{(l)}} = 0, \\ x(\varphi_*, \psi^{(l)}) = x^{(l)}, \quad y(\varphi_*, \psi^{(l)}) = y^{(l)}, \quad l = \overline{1, s-1}, \\ f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0, \\ \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_4}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_4}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=0} = 0, \\ Q = \sum_{l=1}^s Q_l, \quad Q_l = \kappa_l \int_0^{Q_l} \frac{1}{J} \left( \frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi} \right) d\psi, \quad J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}. \end{array} \right. \quad (3)$$

**Різницьвий аналог.** Для знаходження розв'язку задачі (3) в області комплексного квазіпотенціалу визначимо сіткову область  $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^s G_\omega^{\gamma(l)} : G_\omega^{\gamma(l)} = \{(\varphi_i, \psi_j) :$

$$\varphi_i = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad \Delta_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \psi_j = \Delta_\psi^{(l)} \cdot j, \quad j = \overline{n_{l-1}, n_l}, \quad \psi_{n_l} = \psi^{(l)},$$

$$\Delta_\psi^{(l)} = \frac{Q_l}{n_l - n_{l-1}}, \quad 0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{s-1} < n_s = n+1, \quad m, n, n_l \in \mathbf{N}\}, \quad \gamma_l = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta_\psi^{(l)}} -$$

квазіконформні інваріанти.

Розв'язки рівнянь Лапласа у внутрішніх вузлах сіткової області комплексного квазіпотенціалу (сукупності суміжних вздовж горизонтальних ліній сіткових прямокутників) з урахуванням умов спряження знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца [10, 18] і методу сумарних зображень для

диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами у багатошарових областях з горизонтальними лініями розділу [19–20]. Для цього область  $G_\omega^\gamma$  “розіб’ємо” на сіткові прямокутники з “накладками”:  $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{s-1} \tilde{G}_l$ , де  $\tilde{G}_l = G_\omega^{\gamma(l)} \cup G_\omega^{\gamma(l+1)}$ . При цьому отримуємо  $s-1$  підзадачу (проекцію задачі (3) стосовно підобластей  $\tilde{G}_l$ ) [18, 20], яку у внутрішніх вузлах прошарків  $\tilde{G}_l$  з відповідними умовами спряження вздовж ліній  $L_\omega^{(l)}$  апроксимуємо різницевиими рівняннями [16–17]

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_l \mathbb{L}_\gamma x_{i,j} + \tilde{\gamma}^2 \kappa_l (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n_{l-1} + 1, n_l - 1}, \\ \frac{\kappa_l + \kappa_{l+1}}{2} \mathbb{L}_\gamma x_{i,n_l} + \tilde{\gamma}^2 (\kappa_l x_{i,n_{l-1}} + \kappa_{l+1} x_{i,n_{l+1}}) = 0, \\ \kappa_{l+1} \mathbb{L}_\gamma x_{i,j} + \tilde{\gamma}^2 \kappa_{l+1} (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n_l + 1, n_{l+1} - 1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, s-1}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_l \mathbb{L}_\gamma y_{i,j} + \tilde{\gamma}^2 \kappa_l (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n_{l-1} + 1, n_l - 1}, \\ \frac{\kappa_l + \kappa_{l+1}}{2} \mathbb{L}_\gamma y_{i,n_l} + \tilde{\gamma}^2 (\kappa_l y_{i,n_{l-1}} + \kappa_{l+1} y_{i,n_{l+1}}) = 0, \\ \kappa_{l+1} \mathbb{L}_\gamma y_{i,j} + \tilde{\gamma}^2 \kappa_{l+1} (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n_l + 1, n_{l+1} - 1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, s-1}, \end{array} \right.$$

( $\mathbb{L}_\gamma u_{i,j} = u_{i+1,j} - 2(1 + \tilde{\gamma}^2)u_{i,j} + u_{i-1,j}$ ), розв’язки яких представляємо формулами сумарних зображень [19–20]

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\tilde{n}_l} p_{j-n_{l-1},k} \left( \mu_k^i a_k + \nu_k^i b_k + \tilde{\gamma}^2 \sum_{g=1}^m \frac{\nu_k^{|i-g|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{g,n_{l-1}} + p_{\tilde{n}_l,k} x_{g,n_{l+1}}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^{\tilde{n}_l} p_{j-n_{l-1},k} \left( \mu_k^i c_k + \nu_k^i d_k + \tilde{\gamma}^2 \sum_{g=1}^m \frac{\nu_k^{|i-g|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{g,n_{l-1}} + p_{\tilde{n}_l,k} y_{g,n_{l+1}}) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{n_{l-1} + 1, n_{l+1} - 1}, \quad \tilde{n}_l = n_{l+1} - n_{l-1} - 1,$$

де елементи матриць  $P$ -трансформацій

$$P = [p_{j,k}]_{j,k=1}^{\tilde{n}_l}, \quad p_{j,k} = C_k \begin{cases} \sin j \theta_k, & j = \overline{n_{l-1} + 1, n_l}, \\ \alpha_k \sin(\tilde{n}_l - j) \theta_k, & j = \overline{n_l + 1, n_{l+1} - 1}, \end{cases}$$

$\theta_k$  – корені рівняння  $\sin \tilde{n}_l \theta + \frac{\kappa_l - \kappa_{l+1}}{\kappa_l + \kappa_{l+1}} \sin(\tilde{n}_l - 2n_l) \theta = 0$  в інтервалі  $(0, \pi)$ ,

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\sin n_l \theta_k}{\sin(\tilde{n}_l - n_l) \theta_k}, & \text{якщо } \sin(\tilde{n}_l - n_l) \theta_k \neq 0, \\ -\frac{\kappa_l \cos n_l \theta_k}{\kappa_{l+1} \cos(\tilde{n}_l - n_l) \theta_k}, & \text{якщо } \sin(\tilde{n}_l - n_l) \theta_k = 0, \end{cases}$$

$$C_k = \left[ \frac{\kappa_l}{2} \left( n_l - \frac{\cos(n_l - 1)\theta_k \sin n_l \theta_k}{\sin \theta_k} \right) + \frac{\kappa_l + \kappa_{l+1}}{2} \sin^2 n_l \theta_k + \right. \\ \left. + \frac{\kappa_{l+1}}{2} \alpha_k^2 \left( \tilde{n}_l - n_l - \frac{\cos(\tilde{n}_l - n_l - 1)\theta_k \sin(\tilde{n}_l - n_l)\theta_k}{\sin \theta_k} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

елементи діагональних матриць  $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^{\tilde{n}_l}$ ,  $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^{\tilde{n}_l}$  визначаються за формулами

$$\mu_k = \nu_k^{-1} = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \eta_k = 1 + \tilde{\gamma}^2 \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{\tilde{n}_l + 1} \right),$$

знаходяться із крайових умов на ділянках границь  $L_*^{(l)} \cup L_*^{(l+1)}$ ,  $L^{*(l)} \cup L^{*(l+1)}$  за допомогою систем рівнянь:

$$\begin{cases} a_k + b_k = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_{l+1}-1} P_{j-n_{l-1},k}^* x_{0,j} - \tilde{\gamma}^2 \sum_{g=1}^m \frac{v_k^g}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{g,n_{l-1}} + p_{\tilde{n}_l,k} x_{g,n_{l+1}}), \\ \mu_k^{m+1} a_k + \nu_k^{m+1} b_k = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_{l+1}-1} P_{j-n_{l-1},k}^* x_{m+1,j} - \tilde{\gamma}^2 \sum_{g=1}^m \frac{v_k^{m+1-g}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{g,n_{l-1}} + p_{\tilde{n}_l,k} x_{g,n_{l+1}}), \quad k = \overline{1, \tilde{n}_l}, \\ c_k + d_k = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_{l+1}-1} P_{j-n_{l-1},k}^* y_{0,j} - \tilde{\gamma}^2 \sum_{g=1}^m \frac{v_k^g}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{g,n_{l-1}} + p_{\tilde{n}_l,k} y_{g,n_{l+1}}), \\ \mu_k^{m+1} c_k + \nu_k^{m+1} d_k = \sum_{j=n_{l-1}+1}^{n_{l+1}-1} P_{j-n_{l-1},k}^* y_{m+1,j} - \tilde{\gamma}^2 \sum_{g=1}^m \frac{v_k^{m+1-g}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{g,n_{l-1}} + p_{\tilde{n}_l,k} y_{g,n_{l+1}}), \quad k = \overline{1, \tilde{n}_l}, \end{cases}$$

$p_{j,k}^*$  ( $j, k = \overline{1, \tilde{n}_l}$ ) – елементи матриць  $P^*$ , обернених до  $P$ .

У цих формулах використовуються значення  $\tilde{\gamma}$ , які знаходяться в процесі ітераційних наближень [12–13]

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma_l + \gamma_{l+1}}{2}, \quad \gamma_l = \frac{1}{\kappa_l(m+1)(n_l - n_{l-1})} \sum_{i=0, j=n_{l-1}}^{m, n_l-1} \gamma_{i,j}, \quad (5)$$

$$\text{де } \gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}},$$

а формули для знаходження витрат  $Q_l$  мають вигляд [12–13]

$$Q_l = \Delta_\varphi \cdot \frac{n_l - n_{l-1}}{\gamma_l}. \quad (6)$$

Крайові умови та умови ортогональності в околі границі області апроксимуємо аналогічно [11, 13]

$$\begin{cases} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \quad f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \\ x_{0,n_l} = x^{(l)}, \quad y_{0,n_l} = y^{(l)}, \quad l = \overline{1, s-1}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} f'_{1x}(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f'_{1y}(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \\ f'_{3x}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - f'_{3y}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \\ f'_{2x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f'_{2y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) = 0, \\ f'_{4x}(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f'_{4y}(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (8)$$

**Алгоритм** знаходження розв'язку прямої задачі на побудову динамічної сітки з визначенням ліній течії, що розділяють підобласті сталості коефіцієнта провідності, побудовано шляхом поетапної параметризації величин  $\gamma_l$  (або значень витрат  $Q_l$ ), граничних та внутрішніх вузлів динамічної сітки  $G_z^\gamma$  із використанням ідей методу блочної ітерації [12–13] та альтернуючого методу Шварца [10, 18]. Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничних потенціалів  $\varphi_*$  і  $\varphi^*$ , абсциси точок  $H^{(l)}$ , через які проходять лінії розділу підобластей сталості коефіцієнта провідності та відповідні значення коефіцієнта провідності  $\kappa_l$  ( $l = \overline{1, s}$ ). Задаємо кількості  $m, n_l$  вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega^\gamma$ , нульове наближення невідомих величин  $\gamma_l$  (або шуканих витрат  $Q_l$ ), параметри точності наближення  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  і початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах сітки з урахуванням крайових умов (7) і координат заданих точок  $H^{(l)}$ .

Наближення значень функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах сітки отримуємо як результат ітераційного процесу, що є чисельним аналогом класичного методу Шварца [5]  $x_{i,j} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} x_{i,j}^{(l,\xi)}$ ,  $y_{i,j} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} y_{i,j}^{(l,\xi)}$  ( $i = \overline{1, m+1}, j = \overline{n_{l-1}+1, n_{l+1}-1}$ ), де  $\xi$  – номер кроку цього (внутрішнього) процесу. Значення  $(x_{i,j}^{(l,\xi)}, y_{i,j}^{(l,\xi)})$  знаходимо за формулами сумарних зображень (4), де, для спрощення викладок, номер  $\xi$  кроку ітерації опущено. При цьому значення граничних вузлів у підобластях  $\tilde{G}_l$  визначаємо як значення внутрішніх вузлів (уздовж відповідних горизонтальних відрізків) сусідніх підобластей з «накладками» [18].

Виконання умови  $\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(l,\xi)} - x_{i,j}^{(l,\xi-1)})^2 + (y_{i,j}^{(l,\xi)} - y_{i,j}^{(l,\xi-1)})^2} \leq \varepsilon_2$  може бути підставою до завершення цього циклу. Проте зазначимо, що достатньо провести щонайбільше  $s+1$  ітерацію по  $\xi$  для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цих обчислювальних процедур при подальшому уточненні інших параметрів задачі.

Далі знаходимо за формулами (5), (6) початкові наближення  $\gamma_l$  і  $Q_l$ . Уточнюємо значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах (координати граничних вузлів динамічної сітки) за формулами (7), (8) з урахуванням координат точок  $H^{(l)}$ , знаходимо нове наближення значень функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах (координати внутрішніх вузлів динамічної сітки) шляхом ітераційного процесу по  $\xi$  в прошарках  $\tilde{G}_l$  за формулами сумарних зображень (4), перераховуємо  $\gamma_l, Q_l$  за (5), (6).

Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів динамічної сітки [10–11]: якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену останню загальну ітерацію більша за  $\varepsilon_1$ , то переходимо до подальшого уточнення вузлів, інакше – зупиняємо ітераційний процес і оцінюємо ступінь конформності отриманого відображення [10–11].

**Задача ідентифікації коефіцієнта провідності.** Розглянемо задачу ідентифікації значень коефіцієнта провідності  $\kappa_l$  ( $l = \overline{1, s}$ ) у підобластях сталості  $G_z^{(l)}$ , що обмежені шуканими лініями течії  $L_z^{(l)}$ , якщо відомими є локальні витрати  $Q_l$  і координати (абсциси) точок  $H^{(l)}(x^{(l)}, y^{(l)}) = L_* \cap L_z^{(l)}$  перетину ліній розділу з границею. Вона зводиться до розв'язування (3) з відомими  $Q_l$  (а, отже, і  $\psi^{(l)}$ ) та невідомими  $\kappa_l$ , а її різницевий аналог конструюється аналогічно, як у попередній (прямій) задачі, де замість формул (5), (6) для ітераційного розрахунку  $\gamma_l$ ,  $Q_l$ , використовуються формули для визначення в процесі ітераційних наближень значень коефіцієнта провідності

$$\kappa_l = \frac{1}{\gamma_l(m+1)(n_l - n_{l-1})} \sum_{i=0, j=n_{l-1}}^{m, n_l-1} \gamma_{i,j}, \quad l = \overline{1, s}. \quad (9)$$

Алгоритм розв'язання задачі ідентифікації коефіцієнта провідності й одночасного розрахунку вузлів динамічної сітки з лініями розділу підобластей сталості  $\kappa_l$  можна описати так. Як і в прямій задачі, задаємо початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах сітки  $G_\omega^\gamma$  з урахуванням крайових умов (7) і відомих координат точок  $H^{(l)}$ , задаємо нульові наближення значень коефіцієнта провідності. Обчислюємо шляхом ітераційного процесу по  $\xi$  в підобластях  $\tilde{G}_l$  за формулами сумарних зображень (4) початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах  $G_\omega^\gamma$ , перераховуємо  $\kappa_l$  за формулами (9).

Далі уточнюємо значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах за формулами (7), (8) з урахуванням точок  $H^{(l)}$ , знаходимо їх нове наближення у внутрішніх вузлах за ітераційним процесом по  $\xi$  із використанням формул (4), перераховуємо значення коефіцієнта провідності за (9).

Наприкінці кожної загальної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів динамічної сітки: якщо величина зміщення вузлів на границі за останню проведену ітерацію не перевищує заданого параметра точності, то зупиняємо ітераційний процес.

**Задача ідентифікації коефіцієнта провідності й витрат за вимірами на границі.** У випадку, коли є можливість визначити (виміряти) значення витрат (потоків)  $Q_\bullet^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s+1}$ ) через ділянки границі  $L_\bullet^{(l)} = \{z \in L_* : H_\bullet^{(l-1)} \leq (x, y) \leq H_\bullet^{(l)}\}$  між заданими точками  $H_\bullet^{(l)}(x_\bullet^{(l)}, y_\bullet^{(l)})$  ( $H_\bullet^{(0)} = A$ ,  $H_\bullet^{(s+1)} = B$ ), причому має місце умова

$$0 < \psi_\bullet^{(1)} < \psi^{(1)} < \psi_\bullet^{(2)} < \psi^{(2)} < \dots < \psi^{(l-1)} < \psi_\bullet^{(l)} < \psi^{(l)} < \dots < \psi^{(s-1)} < \psi_\bullet^{(s)} < Q, \quad (10)$$

$$\text{де } \psi_\bullet^{(1)} = Q_\bullet^{(1)}, \quad \psi_\bullet^{(l)} = \psi_\bullet^{(l-1)} + Q_\bullet^{(l)}, \quad Q = \sum_{l=1}^{s+1} Q_\bullet^{(l)},$$

можна визначити значення локальних витрат  $Q_l$  у підобластях сталості коефіцієнта провідності  $G_z^{(l)}$ , що обмежені шуканими лініями течії  $L_z^{(l)}$ , та ідентифікувати значення коефіцієнта провідності  $\kappa_l$  у цих підобластях за відомими значеннями функції течії  $\psi_\bullet^{(l)}$ , що задовольняють (10), у точках  $H_\bullet^{(l)}(x_\bullet^{(l)}, y_\bullet^{(l)})$  ( $l = \overline{1, s}$ ).

Пропонуємо алгоритм розв'язання такої задачі. Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничних потенціалів  $\phi_*$ ,  $\phi^*$ , виміряних витрат  $Q_\bullet^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s+1}$ ) та координати (абсциси) точок вимірювання  $H_\bullet^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s}$ ). Задаємо параметри точності, кількість  $m \times n$  вузлів розбиття і формуємо сітку  $G_\omega^\gamma$  (так, щоб



значення  $\psi_{\bullet}^{(l)}$  «потрапили» у її вузли), знаходимо  $\gamma = \frac{\Delta_{\varphi}}{\Delta_{\psi}}$ , де  $\Delta_{\psi} = \frac{Q}{n+1}$ . Задаємо початкові наближення коефіцієнта провідності  $\kappa_l$  ( $l = \overline{1, s}$ ), значень  $\psi^{(l)}$  ( $l = \overline{1, s-1}$ ) з урахуванням (10), визначаємо початкові наближення  $n_l = \frac{\psi^{(l)}}{\Delta_{\psi}}$ ,  $Q_l = \psi^{(l)} - \psi^{(l-1)}$ ,  $\gamma_l = \frac{\gamma}{\kappa_l}$ . Також задаємо початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах сіткової області з урахуванням крайових умов (7) та координат заданих точок вимірювання  $x_{0, n_{\bullet}^{(l)}} = x_{\bullet}^{(l)}$ ,  $y_{0, n_{\bullet}^{(l)}} = y_{\bullet}^{(l)}$  ( $n_{\bullet}^{(l)} = \frac{\psi_{\bullet}^{(l)}}{\Delta_{\psi}}$ ), «підправляємо» значення  $\kappa_l$ , наприклад, за формулами

$$\kappa_l = Q_{\bullet}^{(l)} \left( (\varphi^* - \varphi_*) \sqrt{(x_{m+1, n_{\bullet}^{(l)}} - x_{\bullet}^{(l)})^{-2} + (y_{m+1, n_{\bullet}^{(l)}} - y_{\bullet}^{(l)})^{-2}} \right)^{-1}, \quad l = \overline{1, s}$$

й обчислюємо шляхом ітераційного процесу по  $\xi$  в підобластях  $\tilde{G}_l$  за формулами сумарних зображень (4) відповідні початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах сітки.

Перераховуємо значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах за формулами (7), (8) з урахуванням точок вимірювання та знаходимо нове наближення  $x$ ,  $y$  у внутрішніх вузлах за ітераційним процесом по  $\xi$  із використанням формул (4).

Далі знаходимо у прошарках  $\tilde{G}_l = \{z \in G_z : \psi_{\bullet}^{(l-1)} \leq \psi \leq \psi_{\bullet}^{(l)}\}$  розрахункові значення  $\tilde{Q}_l$  за формулами

$$\tilde{Q}_l = \Delta_{\varphi} \cdot \frac{n_{\bullet}^{(l+1)} - n_{\bullet}^{(l)}}{\tilde{\gamma}_l}, \quad \tilde{\gamma}_l = \frac{1}{(m+1)(n_{\bullet}^{(l+1)} - n_{\bullet}^{(l)})} \sum_{i=0, j=n_{\bullet}^{(l)}}^{m, n_{\bullet}^{(l+1)}-1} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_j}, \quad (11)$$

де  $\kappa_j = \kappa_l$  при  $n_{\bullet}^{(l)} \leq j \leq n_l$ ,  $\kappa_j = \kappa_{l+1}$  при  $n_l < j \leq n_{\bullet}^{(l+1)}$ , і порівнюємо їх із заданими  $Q_{\bullet}^{(l)}$ . Враховуючи монотонну залежність витрат  $Q_l$  від значень коефіцієнта провідності  $\kappa_l$ , «уточнюємо» значення  $\psi^{(l)}$ , змінюючи відповідним чином  $n_l$  до тих пір, поки різниця  $|\tilde{Q}_l - Q_{\bullet}^{(l)}|$  не стане мінімальною: у випадку  $\kappa_l > \kappa_{l+1}$  – якщо  $\tilde{Q}_l > Q_{\bullet}^{(l)}$ , то  $n_l$  необхідно зменшувати, інакше – збільшувати, а у випадку  $\kappa_l < \kappa_{l+1}$  – навпаки.

Після цього знову перераховуємо граничні та внутрішні вузли динамічної сітки (як у прямій задачі), уточнюємо значення  $\kappa_l$  ( $l = \overline{1, s}$ ) за формулами (9), знаходимо розрахункові значення  $\tilde{Q}_l$  за (11) та «підправляємо» значення  $\psi^{(l)}$ .

Умовою завершення алгоритму, можна, як і раніше, вважати стабілізацію координат граничних вузлів динамічної сітки.

На рис.2 наведено результати проведених за цим алгоритмом розрахунків для області, що обмежена лініями  $L_* = \left\{ z : x = 2 - 2 \cos \frac{y}{6}, 0 \leq y \leq 3\pi \right\}$ ,  $L^* = \left\{ z : x = 9 - \cos \frac{y}{3}, 0 \leq y \leq 3\pi \right\}$ ,  $L_0 = \left\{ z : 0 \leq x \leq 8, y = 0.5 \sin \frac{\pi x}{4} \right\}$ ,  $L^0 = \left\{ z : 2 \leq x \leq 10, y = 3\pi + 0.1 \sin \frac{\pi x}{2} \right\}$ . Як

бачимо, максимальна відносна похибка ідентифікованих значень у порівнянні з отриманими із прямої задачі ( $\kappa_1=1$ ,  $\kappa_2=3$ ,  $\kappa_3=1.5$ ,  $Q_1=0.23777$ ,  $Q_2=0.53308$ ,  $Q_3=0.20591$ ) становить  $\approx 0.5\%$ , що є цілком прийнятним для технічних задач.

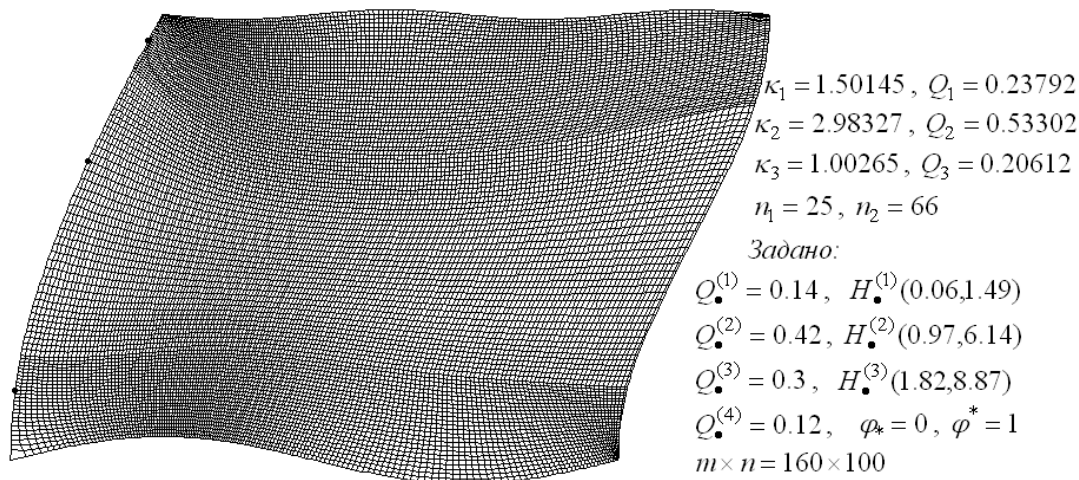


Рисунок 2. Результати розрахунку

Figure 2. Results of calculation

**Висновки.** Розроблено метод розв'язання нелінійних модельних задач теорії комплексного квазіпотенціалу для нелінійно-шаруватих криволінійних областей за умов ідентифікації параметрів: коефіцієнта провідності, значень витрат (потоків) на лініях течії, що розділяють шари. Використання синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень і декомпозиції області за методом Шварца для такого класу задач дає змогу суттєво пришвидшити досягнення спряженості відповідних шуканих гармонічних функцій значною мірою дозволяє уникати накопичення обчислювальних похибок та є зручним для комп'ютерної реалізації. Перспективою досліджень є поширення запропонованого підходу до прогнозування процесів, що описані в роботі [1].

**Conclusions.** The method for solving nonlinear model problems of the theory of complex quasipotential for nonlinear-layered curvilinear domain in conditions of the identification of parameters: conductivity coefficient, values flows (streams) on flow lines separating the layers, was developed. Using of the synthesis of numerical methods complex analysis, summary representations and domain decomposition by the Schwartz method for this class of problems allows to speed up significantly the achievement of the desired conjugation corresponding harmonic functions, to avoid greatly the accumulation of computational errors, and is convenient for computer implementation. The proposed approach the prediction to forecasting of processes described in [1] the paper is worth being investigated further.

#### Список використаної літератури

1. Сергиенко, И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах [Текст] / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – К: Наукова думка. – 1991. – 432 с.
2. Бомба, А.Я. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах [Текст] / А.Я. Бомба, О.М. Гладка. // Збірник «Фіз.-мат. моделюв. та інформаційні технології». – Львів, 2013. – № 18. – С.32–42.
3. Бомба, А.Я. Числово-аналітичні представлення розв'язків одного класу нелінійних крайових задач [Текст] / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2013. – Вип. 3 (80). – С.76–83.
4. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986 – 288 с.

5. Vogel, C.R. Computational methods for inverse problems / C.R. Vogel – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.
6. Сергиенко, И.В. Идентификация параметров системы конвективно-диффузионного переноса [Текст] / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 1. – С.42–63.
7. Дейнека, В.С. Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами [Текст] / В.С. Дейнека. – К: Наукова думка, 2005. – 364 с.
8. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач [Текст] / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988.– 288 с.
9. Pomp, A. The boundary-domain integral method for elliptic system. With application in shells / A. Pomp, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1683, Berlin. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. – 163 p.
10. Бомба, А.Я. Синтез числовых методов квазиконформных отображений, суммарных изображений та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах [Текст] / А.Я. Бомба, О.М. Гладка. // Журнал обчисл. та прикладн. матем. – 2013. – №1 (111). – С.35–45.
11. Бомба, А.Я. Синтез числовых методов конформных отображений та суммарных изображений при моделировании идеальных полей для криволинейных областей [Текст] / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Вісник Київського нац. університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2012.– №2. – С.87–94.
12. Бомба, А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки [Текст] / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопецький. – Київ: Наукова думка, 2007. – 308 с.
13. Методи комплексного аналізу: монографія [Текст] / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
14. Bomba, A.Ya. A spatial generalization of the method of conformal mappings for the solution of model boundary value filtration problems / A.Ya. Bomba, A.V. Terebus // Journal of Mathematical Sciences. – 2012, Vol. 187, No. 5, P.596–605.
15. Положий, Г.М. Об одном классе формул суммарных представлений [Текст] / Г.М. Положий, А.А. Скоробагатько // Прикл. матем. и мех. –1965. – Вып.1. – С.20–40.
16. Ляшко, И.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации [Текст] / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. – К.: Наукова думка, 1973. – 264с.
17. Глущенко, А.А. Приближенное аналитическое решение краевой задачи фильтрации через неоднородную плотину с различными отметками дна верхнего и нижнего бьефов [Текст] / А.А. Глущенко, А.П. Кузьменко. // Вычисл. и прикл. математика. – 1984. – Вып. 54. – С.50–56.
18. Гладка, О.М. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатошаровій смузі [Текст] / О.М. Гладка, А.П. Кузьменко // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Вип.9. – С.168–173.
19. Ляшко, И.И. Решение краевых задач в слоистых грунтах [Текст] / И.И. Ляшко, А.Е. Грищенко // Алгоритмы и программы решения краевых задач матем. физики. – 173 с.
20. Кузьменко А.П. До розв'язання нестационарних крайових задач у шаруватих кругових областях [Текст] / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Наук.-техн. зб. – 1998. – Вип. 23. – С. 76–83.

*Отримано 21.01.2014*