

УДК 539.3

Б.Окрепкий, канд.фіз.-мат.наук; М.Шелестовська, канд.техн.наук

Тернопільський національний економічний університет

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПРО ТИСК ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА НА ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР З УРАХУВАННЯМ НЕІДЕАЛЬНОГО ТЕПЛООВОГО КОНТАКТУ

***Резюме.** Побудовано розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск пружного кругового ізотропного циліндра на пружний ізотропний півпростір з урахуванням неідеального теплового контакту між циліндром і півпростором. За допомогою методу інтегрального перетворення Ганкеля розв'язано рівняння теплопровідності й термопружності для півпростору, а методом Фур'є – для циліндра. Температурне поле, переміщення й напруження в циліндрі подано через коефіцієнти, які задовольняють нескінченну систему алгебраїчних рівнянь.*

***Ключові слова:** пружний циліндр, півпростір, температура, нормальні контактні напруження.*

B. Okrepkiy, M. Shelestovska

ASIX-SYMMETRIC THERMOELASTICITY TASK ON THE PRESSURE OF THE ELASTIC CYLINDER ON THE ELASTIC SEMI-SPACE TAKING INTO ACCOUNT NON-IDEAL HEAT CONTACT

***Summary.** Determination of contact stresses, taking into account temperature factors, is of importance while investigating machine parts and construction elements strength in the area of their interaction and designing of the elastic basis constructions for the efficient operation of its material and the basis supporting power. Solution of the axis-symmetric contact thermo-elastic problem of the pressure of elastic circular isotropic cylinder on the elastic isotropic semi-space, taking into account non-ideal thermal contact between the cylinder and semi-space, has been built. All cylinder end points, being subject to the outside loading, are displaced in equal value. The semi-space and cylinder surfaces outside the contact area are free of outside stresses, and the tangential stresses in the contact area equal zero. On the free end of the cylinder constant temperature is provided and the thermal contact between the bodies is expected to be non-ideal. Free surfaces of the cylinder and the semi-space are kept at zero temperature or thermoisolated. Under given assumptions the method of determination of the temperature fields and the contact stresses in the cylinder and semi-space, has been developed. Using the Hankel integral transformation method the thermal conductivity and thermal elasticity equation for the semi-space, has been solved, and the Fourier method-for the cylinder. Temperature field, displacement and stress in the isotropic semi-space are expressed by the non-personal integrals, possessing unknown functions, which are found from the boundary conditions of the problem. Temperature field, displacement and stress in the cylinder are presented as coefficients, which satisfy non-finite system of algebraic equations. Satisfaction of the problem boundary conditions results in the system of integral equations, which connect the unknown functions with the coefficients, which specify the temperature field and, as a result, the Fredholm integral equation of the 2-nd order relatively the function, due to which the normal contact stresses in the semi-space are expressed, has been obtained. The Fredholm integral equation of the 2-nd order is reduced to the system of linear algebraic equations, which is solved by the numerical method. Numerical calculations for finding temperature and the temperature component of the normal stress in the semi-space in the area of contact for different values of contact conductivity, as well as the temperature component of the normal stress for different values of the Young's modulus of the cylinder and semi-space, have been carried out. The analysis of graphs testifies, that non ideal thermal contact, when the cylinder is pressed into the semi-space, sufficiently affects the distribution of the temperature component of the normal stress in the contact area.*

***Key words:** elastic cylinder, semi-space, temperature, normal contact stresses.*

Постановка проблеми. Визначення контактних деформацій і напружень з урахуванням температурних факторів є необхідним для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі для раціонального її використання та підвищення несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень. У працях [1–3] досліджено вплив температурних факторів на характер взаємодії тіл. Зокрема, в статті [2] розв’язана осесиметрична задача термопружності про тиск пружного циліндра на пружний півпростір при ідеальному тепловому контакті тіл, а у статті [3] отримано розв’язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск гарячого кругового штампа на пружний ізотропний півпростір при неідеальному тепловому контакті. Проте недостатньо вивчено вплив умов неідеального теплового контакту ізотропних пружних тіл на величину і характер розподілу нормальних напружень у зоні контакту.

Мета роботи. Побудувати розв’язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск пружного ізотропного циліндра з плоскою основою на пружний ізотропний півпростір при неідеальному тепловому контакті й знайти формули для визначення температури і нормальних напружень. Дослідити вплив контактної провідності й модулів Юнга циліндра та півпростору на розподіл температурної складової нормальних напружень.

Постановка задачі. Нехай пружний циліндр довжиною L і радіусом R з плоскою основою втискується силою P у пружний півпростір. Матеріали тіл вважаються ізотропними. Всі точки торця циліндра під дією зовнішнього навантаження зміщуються на однакову величину ε . Поверхні циліндра і півпростору зовні площадки контакту вільні від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$.

На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0 . Тепловий контакт між тілами припускається неідеальним. Вільні поверхні циліндра і півпростору підтримуються при нульовій температурі або теплоізовані. При заданих припущеннях необхідно визначити температурні поля і контактні напруження.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z , центр якої лежить на поверхні півпростору, а вісь OZ спрямована вздовж осі циліндра. Всі величини (напруження, переміщення, температура, пружні постійні, коефіцієнти теплопровідності й лінійного температурного розширення) до циліндра позначені індексом «1» відносяться до півпростору, без індексів – до циліндра.

Граничні умови задачі:

$$T = T_0, \quad (0 \leq r \leq R, z = L). \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r = R; 0 \leq z \leq L). \quad (2)$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0(T - T^1), \quad (0 \leq r \leq R, z = 0). \quad (3)$$

$$T^1 = 0, \quad (z = 0; R \leq r < \infty). \quad (4)$$

$$u_z = -\varepsilon, \quad \tau_{rz} = 0, \quad (0 \leq r \leq R, z = L). \quad (5)$$

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad (r = R; 0 \leq z \leq L). \quad (6)$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad (z = 0; 0 \leq r \leq R). \quad (7)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad (z = 0; 0 \leq r < \infty). \quad (8)$$

$$u_z = u_z^{(1)}, \quad \sigma_z = \sigma_z^1, \quad (z = 0; 0 \leq r \leq R). \quad (9)$$

$$\sigma_z^{(1)} = 0, \quad (z = 0; R \leq r < \infty). \quad (10)$$

Тут λ_z, λ_z^1 – коефіцієнти теплопровідності; ε – величина вертикального переміщення точок циліндра; h_0 – контактна провідність.

Розв'язування крайових задач для рівнянь теплопровідності і термопружності. Відомо [4], що в осесиметричному випадку термопружний потенціал і температурне поле для ізотропного тіла визначаються із рівнянь

$$\nabla^2 \varphi = \alpha_T \frac{1+\sigma}{1-\sigma} T, \quad \nabla^2 T = 0, \quad (11)$$

а температурні напруження і переміщення обчислюються за формулами:

$$u_z^{(T)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \tau_{rz}^{(T)} = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad \sigma_z^{(T)} = -2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_r^{(T)} = -2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (12)$$

де α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення; μ, σ – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона.

Для визначення температурного поля у півпросторі введемо трансформанту Ганкеля нульового порядку функції $T^1(r, z)$

$$\overline{T^1}(\xi, z) = \int_0^\infty r T^1(r, z) I_0(\xi r) dr, \quad (13)$$

за допомогою якої згідно з другим рівнянням (11) знаходимо $T^1(\rho, \zeta)$ через довільну функцію $\varphi_1(\eta)$

$$T^1(\rho, \zeta) = \int_0^\infty \varphi_1(\eta) e^{\eta \zeta} J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (14)$$

де $J_0(\eta \rho)$ – функція Бесселя першого роду від дійсного аргументу; $\rho = r/R$; $\zeta = Z/R_0$; $\eta = \xi R$.

Температурне поле у циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок матиме вигляд

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} J_0(\beta_\kappa r) (A_\kappa \operatorname{sh} \beta_\kappa z + B_\kappa \operatorname{ch} \beta_\kappa z) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} I_0(\gamma_\kappa r) (C_\kappa \sin \gamma_\kappa z + D_\kappa \cos \gamma_\kappa z), \quad (15)$$

де $A_\kappa, B_\kappa, C_\kappa, D_\kappa$ – довільні постійні; $I_0(\gamma_\kappa r)$ – функція Бесселя I-го роду уявного аргументу;

$\beta_\kappa, \gamma_\kappa$ – власні числа, які визначаються із граничних умов.

За відомими температурними полями термопружні потенціали визначаються із першого рівняння (11), частковий розв'язок якого для півпростору і циліндра відповідно матимуть вигляд:

а) для півпростору

$$\varphi(\rho, \zeta) = \frac{1}{2} \frac{1+\sigma^1}{1-\sigma} \alpha_{T^1} \zeta \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \varphi_1(\eta) e^{\eta \zeta} J_0(\eta \rho) d\eta; \quad (16)$$

в) для скінченної циліндричної області

$$\varphi(r, z) = \frac{A_0}{6} z^3 + \frac{1}{4} B_0 r^2 + \frac{1}{16} C_0 r^4 - \frac{1}{6} D_0 z^4 + \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T z \left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_\kappa r)}{\beta_\kappa} (A_\kappa \operatorname{ch} \beta_\kappa z + B_\kappa \operatorname{sh} \beta_\kappa z) - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{I_0(\gamma_\kappa r)}{\gamma_\kappa} (C_\kappa \cos \gamma_\kappa z - D_\kappa \sin \gamma_\kappa z) \right]. \quad (17)$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюються за формулою (12).

Маючи формули температурних напружень і переміщень, можна розв'язати задачу при механічних граничних умовах. Для цього необхідно до величин, обчислених згідно з формулами (12), додати компоненти напружень і переміщень від бігармонічного потенціалу [1].

Для задоволення граничної умови (2) у формулі (15) необхідно покласти

$$D_0 = 0; \quad D_\kappa = 0; \quad C_\kappa = 0 \quad (\kappa = \overline{1, \infty}),$$

$$\gamma_\kappa = \frac{\kappa\pi}{R}, \quad \beta_\kappa = \frac{\mu_\kappa}{R}, \quad \text{де } \mu_\kappa - \text{корені рівняння } J_1(\mu_\kappa) = 0.$$

Гранична умова (1) з урахуванням ортогональності функцій Бесселя призводить до таких співвідношень між постійними B_0, B_κ і A_0, A_κ ($\kappa = \overline{1, \infty}$):

$$B_0 = T_0 - A_0 \ell R, \quad B_n = -th \mu_n \ell A_n, \quad \ell = \frac{L}{R}. \quad (18)$$

Задовольнивши граничні умови (3) і (4), з урахуванням (18), отримаємо систему інтегральних співвідношень, які зв'язують функцію $\varphi_1(\eta)$ з коефіцієнтами A_κ ($\kappa = \overline{0, \infty}$):

$$\int_0^\infty \varphi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = T_0 - A_0 R \ell - \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa J_0(\mu_\kappa \rho) th \mu_\kappa \ell - \frac{\lambda_z}{h_0} \left(A_0 + \frac{1}{R} \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa \mu_\kappa J_0(\mu_\kappa \rho) \right), \quad (\rho < 1). \quad (19)$$

$$\frac{\lambda_z}{R} \int_0^\infty \eta \varphi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = \frac{\lambda_z}{R} \left[A_0 R + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa \mu_\kappa J_0(\mu_\kappa \rho) \right], \quad (\rho < 1). \quad (20)$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0. \quad (\rho > 1) \quad (21)$$

Загальні формули для напружень і переміщень у півпросторі й циліндрі у випадку ізотропних тіл приймаємо у вигляді співвідношень (2.10), (2.18), (5.15), (5.16) з [1].

Граничні умови (8), (10) для напруження $\sigma_z^1(\rho, 0)$ і переміщення $U_z^1(\rho, 0)$ на поверхні півпростору дають

$$U_z^1 = \frac{1+b_1^1}{b_1^1} R \int_0^\infty \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1} (1+b_1^1) \alpha_{T^1} \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \varphi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$R\eta\Phi(\eta) = -\frac{2}{R}\Phi_1(\eta) + b_1^1\Phi_2(\eta), \quad b_1^1 = \frac{\mu_1}{\lambda^1 + \mu_1}, \quad b_2^1 = \frac{\lambda_1}{\lambda^1 + \mu_1}, \quad b_3^1 = \lambda^1 + \mu_1,$$

$$\sigma_z^1(\rho) = \frac{2b_3^1}{R} \int_0^\infty \eta\Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta, \quad (22)$$

$\Phi_i(\eta) (i=1,2)$ – довільні функції; λ^1, μ^1 – коефіцієнти Ламе.

Задовольнивши граничним умовам для дотичних напружень (5–7), знаходимо власні значення задачі λ_κ і α_κ , які є коренями відповідних характеристичних рівнянь:

$$\sin \lambda_\kappa L = 0, \quad J_1(\alpha_\kappa R) = 0, \quad \text{тобто } \lambda_\kappa = \frac{\kappa\pi}{L}, \quad \alpha_\kappa = \frac{\mu_\kappa}{R}. \quad (23)$$

Крім цього, ті ж умови призводять до таких співвідношень між довільними постійними:

$$D_\kappa^* = 0; \quad N_\kappa^* = -F_\kappa^* / b_2 + \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \frac{b_1}{b_2} R^3 \frac{A_\kappa}{\mu_\kappa^3},$$

$$E_\kappa^* = \frac{\ell}{b_2} \mu_\kappa F_\kappa^* - M_\kappa^* (b_2 + \mu_\kappa \ell \operatorname{cth} \mu_\kappa \ell) + \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \cdot \mu \frac{R^3}{b_3 \mu_\kappa^3} \left[B_\kappa (\mu_\kappa \ell \operatorname{cth} \mu_\kappa \ell + 1) - \frac{b_1}{b_2} \mu_\kappa \ell A_\kappa \right],$$

$$A_\kappa^* = -B_\kappa^* \left[\frac{b_1}{b_2} + \frac{\kappa\pi}{\ell} I_0 \left(\frac{\kappa\pi}{\ell} \right) / I_1 \left(\frac{\kappa\pi}{\ell} \right) \right], \quad (\kappa = 1, 2, \dots). \quad (24)$$

Вимагаючи виконання першої граничної умови (9) і граничної умови (10), дійдемо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\Phi(\eta)$ і $\varphi_1(\eta)$:

$$\frac{1+b_1^1}{b_1} \int_0^\infty \eta\Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = R^{-1} \left\{ 2A_0^* + \sum_{\kappa=1}^\infty \left(-\frac{1}{b_1} F_\kappa^* + 2N_\kappa^* \right) J_0(\mu_\kappa\rho) \mu_\kappa^2 + \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \frac{R}{2} \sum_{\kappa=1}^\infty \frac{J_0(\mu_\kappa\rho)}{\mu_\kappa} A_\kappa \right\} -$$

$$-\frac{1}{2} \alpha_{T^1} \delta_0 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta, \quad (\rho < 1). \quad (25)$$

$$\int_0^\infty \eta\Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1), \quad \delta_0 = \frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1} (1+b_1^1). \quad (26)$$

Якщо ввести функцію $f(t)$ співвідношенням

$$\Phi(\eta) = \frac{b_1^1}{1+b_1^1} \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt, \quad (27)$$

то рівняння (26) задовольняється тотожно, а рівняння (25) зводиться до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^\rho \frac{f(t) dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} = g(\rho), \quad (28)$$

розв'язок якого відповідно [5] визначається формулою

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho, \quad (29)$$

$$\text{де } g(\rho) = \frac{2A_0^*}{R} + \frac{1}{R^3} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{b_1} F_{\kappa}^* + 2N_{\kappa}^* \right) \mu_{\kappa}^2 J_0(\mu_{\kappa} \rho) + \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_{\kappa} \rho)}{\mu_{\kappa}} A_{\kappa} - \frac{1}{2} \alpha_{T1} \delta_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \varphi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta. \quad (30)$$

Підставивши вираз (30) у формулу (29) з урахуванням (27), отримаємо співвідношення, яке зв'язує функції $f(t)$ і $\varphi_1(\eta)$.

$$f(t) = \frac{2}{\pi R} \left\{ 2A_0^* + \frac{1}{R^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa}^2 \cos \mu_{\kappa} t \left(-\frac{1}{b_1} F_{\kappa}^* + 2N_{\kappa}^* \right) + \frac{R}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\cos \mu_{\kappa} t}{\mu_{\kappa}} A_{\kappa} \right\} - \frac{1}{\pi} \alpha_{T1} \delta_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \varphi_1(\eta) \cos \eta t d\eta, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (31)$$

Задовольнивши першій граничній умові (5) та використовуючи умови ортогональності функцій Бесселя, отримаємо

$$-\frac{\varepsilon}{2} = A_0^* + 2b_4^{-1} \ell R B_0^* + 3\ell R C_0^* + \frac{1}{4} \ell^2 R^2 \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T A_0. \quad (32)$$

$$F_{\kappa}^* = b_2 \text{th} \mu_{\kappa} \ell \mu_{\kappa}^* + \frac{1}{2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T R^3 b_1 \frac{A_{\kappa}}{\mu_{\kappa}^3}, \quad (33)$$

$$\text{де } b_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad b_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad b_3 = \lambda + \mu, \quad b_4 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Контактні напруження під циліндром $\sigma_z^1(\rho, 0)$, з урахуванням (22), (27) визначаються за формулою

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = \chi_0^1 \left[\frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_{\rho}^1 \frac{f'(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right], \quad (\rho < 1), \quad \text{де } \chi_0^1 = \frac{2b_1^1 b_3^1}{1+b_1^1}. \quad (34)$$

Використовуючи умову рівноваги циліндра $P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma^1(\rho) d\rho$ і формулу (34) з урахуванням (24), рівняння (31) зводиться до вигляду

$$f(t) + \frac{1}{\pi} \alpha_{T1} \delta_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) \varphi_1(\eta) d\eta + \frac{2}{\pi R^3} \frac{1+b_1}{b_1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa}^2 \text{th} \mu_{\kappa} \ell \left(\cos \mu_{\kappa} t - \frac{\sin \mu_{\kappa}}{\mu_{\kappa}} \right) \mu_{\kappa}^* = -\frac{P}{2\pi R^2 \chi_0^1}, \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (35)$$

Побудуємо функцію $\varphi_1(\eta)$ такою:

$$\varphi_1(\eta) = \frac{2}{\pi} T_0 \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) \tilde{a}_0 + \frac{2T_0}{\pi} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \tilde{a}_{\kappa} \mu_{\kappa} \int_0^1 \sin \mu_{\kappa} y \sin \eta y dy.$$

Рівняння (21) задовольняється тотожно, а рівняння (19), (20), (35) зводяться до вигляду

$$\frac{2}{\pi} \tilde{a}_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{2}{\eta} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \tilde{a}_{\kappa} \mu_{\kappa} \int_0^1 \sin \mu_{\kappa} y dy \int_0^{\infty} J_0(\eta \rho) \sin \eta y d\eta = 1 - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left(\ell + \frac{1}{h_0^1} \right) C_0 -$$

$$- \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(th \mu_{\kappa} \ell + \frac{\mu_{\kappa}}{h_0^1} \right) I_0(\mu_{\kappa} \rho) C_{\kappa}, \quad (\rho < 1),$$

$$\tilde{a}_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa} J_0(\mu_{\kappa} \rho) \tilde{a}_{\kappa} = C_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa} J_0(\mu_{\kappa} \rho) C_{\kappa}, \quad (\rho < 1). \quad (38)$$

$$f(t) + \frac{2}{\pi^2} \alpha_{T^1} T_0 \delta_0 \left\{ \tilde{a}_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta^2} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) d\eta + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \tilde{a}_{\kappa} \mu_{\kappa} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 \sin \mu_{\kappa} y \sin \eta y dy \right\} + \frac{2}{\pi R^3} \frac{1+b_1}{b_1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa}^2 th \mu_{\kappa} \ell \left(\cos \mu_{\kappa} t - \frac{\sin \mu_{\kappa} t}{\mu_{\kappa}} \right) M_{\kappa}^* = \frac{P}{2\pi R^2 \chi_0^1}, \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (39)$$

де $h_0^1 = h_0 R / \lambda_z$; $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} A_0 R = C_0 T_0, \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} A_n = C_{\kappa} T_0$; M_{κ}^* , – постійні, які необхідно визначити.

Помноживши обидві частини рівнянь (37), (38) на $\rho, \rho J_0(\mu_{\kappa} \rho)$ і проінтегрувавши по ρ у межах від 0 до 1 з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, отримаємо нескінченну систему лінійних рівнянь відносно постійних C_{κ} ($\kappa = \overline{0, \infty}$)

$$\alpha_{0,0} C_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_{0,\kappa} e_{\kappa} = 1,$$

$$\alpha_{n,0} C_0 + \alpha_{n,n} C_n + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_{n,\kappa} C_{\kappa} = 0, \quad (n = \overline{1, \infty}), \quad \text{де } \tilde{a}_0 = C_0, \tilde{a}_{\kappa} = C_{\kappa}; \quad (40)$$

$$\alpha_{0,0} = \frac{2}{3\pi} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left(\ell + \frac{1}{h_0^1} \right), \quad \alpha_{0,\kappa} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \mu_{\kappa}}{\mu_{\kappa}} - \cos \mu_{\kappa} \right), \quad \alpha_{n,0} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n} - \cos \mu_n \right),$$

$$\alpha_{n,\kappa} = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_{\kappa} \cos \mu_{\kappa} \sin \mu_n - \mu_n \sin \mu_{\kappa} \cos \mu_n}{\mu_n^2 - \mu_{\kappa}^2}, \quad \alpha_{n,n} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left(1 + \frac{1}{h_0^1} \right) \mu_n J_0^2(\mu_n).$$

Враховуючи рівності (24), задовольняємо граничній умові для нормального напруження (6). Помноживши отриманий вираз на $\cos \frac{\pi \eta}{\ell} \zeta$, ($n = \overline{0, \infty}$) і проінтегрувавши його по ζ у межах від 0 до ℓ , з урахуванням ортогональності тригонометричних функцій, отримаємо співвідношення між постійними B_o^* і C_o^* , β_{κ}^* і μ_{κ}^* , C_o , C_{κ}

$$-2b_1 B_0^* + 3b_2 C_0^* = 0. \quad (42)$$

$$B_n^* = -\frac{4}{\pi n \omega_n} I_1\left(\frac{\pi n}{\ell}\right) \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa}^4 t_{\kappa,n}^2 J_0(\mu_{\kappa}) th \mu_{\kappa} \ell \cdot M_{\kappa}^* - \frac{\ell^2 R^3}{\pi^3 b^3} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \mu \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \alpha_T T_0 \frac{I_1\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)}{n^2 \omega_n} \left\{ -2C_0 \frac{\ell^2}{\pi^2 n^2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[(-1)^n - 1 \right] + \frac{2\pi^2 n^2}{\ell^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} t_{\kappa,n} \mu_{\kappa} J_0(\mu_{\kappa}) U_{\kappa,n} C_{\kappa} \right\}, \quad (43)$$

$$\text{де } \omega_{\kappa} = -\frac{\ell}{\kappa \pi} (2b_1 + b_2) I_2\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right) + \frac{\kappa \pi}{\ell} \left[I_0^2\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right) - I_1^2\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right) \right], \quad U_{\kappa,n} = 1 - \frac{(-1)^n}{ch \mu_{\kappa} \ell}, \\ t_{\kappa,n} = \frac{1}{\mu_{\kappa}^2 + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2}.$$

Задовольнивши другій умові (9) і домноживши на $\rho, \rho J_0(\mu_n \rho)$ та проінтегрувавши отриманий вираз по ρ у межах від 0 до 1 з урахуванням ортогональності функцій Бесселя і значень інтегралів

$$\int_0^1 \rho^2 I_1\left(\frac{\kappa \pi}{\ell} \rho\right) d\rho = \frac{\ell}{\kappa \pi} I_2\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right), \quad \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) I_0\left(\frac{\kappa \pi}{\ell} \rho\right) d\rho = \frac{\kappa \pi \ell I_1\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right)}{\mu_n^2 \ell^2 + \kappa^2 \pi^2}, \quad (44) \\ \int_0^1 \rho^2 I_1\left(\frac{\kappa \pi}{\ell} \rho\right) J_0(\mu_n \rho) d\rho = \frac{\kappa \pi \ell J_0(\mu_n)}{\mu_n^2 \ell^2 + \kappa^2 \pi^2} \left[I_0\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right) - \frac{2\kappa \pi \ell I_1\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right)}{\mu_n^2 \ell^2 + \kappa^2 \pi^2} \right],$$

отримаємо залежності між постійними $B_0^*, C_0^*, M_{\kappa}^*, C_0, C_{\kappa}$ і функцією $f(t)$

$$\chi_0^1 \int_0^1 f(t) dt = 2b_3(4b_1 + 3b_2) B_0^* + 3b_3(2b_1 + b_2) C_0^* + \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T T_0 \mu \ell R C_0. \quad (45)$$

$$\chi_0^1 \int_0^1 f(t) \cos \mu_n t dt = \frac{b_3}{R^3} \mu_n^3 J_0^2(\mu_n) \frac{sh 2\mu_n \ell + 2\mu_n \ell}{sh 2\mu_n \ell} \mu_n^x - \frac{16b_3 \pi^3}{\ell^4 R^3} \mu_n^2 J_0(\mu_n) \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{t_{n,\kappa}^2 \kappa^3 I_1^2\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right)}{\omega_{\kappa}} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^4 t_{m,\kappa}^2 J_0(\mu_m) th \mu_m \ell \cdot M_m^* - \frac{4\pi}{\ell^2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \mu \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \alpha_T T_0 \cdot \mu_n^2 J_0^2(\mu_n) \left\{ -2C_0 \frac{\ell^2}{n^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{t_{n,\kappa}^2 I_1^2\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right)}{\kappa \omega_{\kappa}} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[(-1)^{\kappa} - 1 \right] + \frac{2\pi^2}{\ell^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{t_{n,\kappa}^2 \kappa^3 I_1^2\left(\frac{\kappa \pi}{\ell}\right)}{\omega_{\kappa}} \sum_{m=1}^{\infty} t_{m,\kappa}^2 \mu_m J_0(\mu_m) \cdot \left[1 - \frac{(-1)^{\kappa}}{ch \mu_m \ell} \right] C_m \right\} + \frac{1+\sigma}{1-\sigma} (1-2\sigma) \cdot \\ \cdot b^1 \alpha_T T_0 \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} th \mu_n \ell \cdot J_0^2(\mu_n) C_n.$$

Представимо функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = -\frac{P}{2\pi R^2 \chi_0^1} \sum_{\kappa=0}^N P_{\kappa} (1-2t^2)(2\kappa+1) X_{\kappa}^{(1)} + \alpha_T T_0 \sum_{\kappa=0}^N P_{\kappa} (1-2t^2)(2\kappa+1) X_{\kappa}^{(2)}, \quad (47)$$

де $X_\kappa^1, Y_\kappa^2, (\kappa = \overline{0, N})$ – невідомі коефіцієнти;

$P_\kappa(1-2t^2)$ – функції Лежандра. Тоді системи рівнянь (39), (45), (46), з урахуванням ортогональності функцій Лежандра $P_\kappa(1-2t^2)$ для рівняння (39) на інтервалі (0,1) і

$$\text{позначень } \frac{\mu_n^3}{R^3} J_0^2(\mu_n) M_n^* = \frac{P}{\pi R^2} Y_\kappa^{(1)} + \alpha_T T_0 Y_\kappa^{(2)}, \quad (48)$$

зводиться до знаходження постійних $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, (n = \overline{0, N})$ із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \beta_{n,n}^{(1)} X_n^{(1)} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \beta_{n,\kappa}^{(2)} Y_\kappa^{(1)} &= \gamma_n^{(1)}, & (n = \overline{n, N}). \\ \beta_{n,0}^{(3)} X_0^{(1)} + \sum_{\kappa=1}^N \beta_{n,\kappa}^{(3)} X_\kappa^{(1)} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \beta_{n,\kappa}^{(4)} Y_\kappa^{(1)} &= 0, & (n = \overline{0, \infty}). \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \beta_{n,n}^{(1)} X_n^{(2)} + \sum_{\kappa=1}^N \beta_{n,\kappa}^{(2)} Y_\kappa^{(2)} &= \gamma_n^{(2)}, & (n = \overline{0, N}). \\ \beta_{n,0}^{(3)} X_0^{(2)} + \sum_{\kappa=1}^N \beta_{n,\kappa}^{(3)} X_\kappa^{(2)} + \sum_{\kappa=1}^N \beta_{n,\kappa}^{(4)} Y_\kappa^{(2)} &= \gamma_n^{(3)}, & (n = \overline{0, \infty}). \end{aligned} \quad (50)$$

$$\beta_{n,n}^{(1)} = \frac{1}{2(2n+1)}, \quad \beta_{n,\kappa}^{(1)} = 0, \quad (n \neq \kappa). \quad \beta_{n,\kappa}^{(2)} = \frac{4}{\pi R^3} \frac{1-\sigma}{1-2\sigma} \mu_\kappa^2 \text{th} \mu_\kappa \ell \tau_n(\mu_\kappa),$$

$$(n = \overline{0, N}; \kappa = \overline{1, \infty}),$$

$$\gamma_0^{(1)} = 1; \quad \gamma_n^{(1)} = 0, \quad (n = \overline{1, N});$$

$$\begin{aligned} \beta_{n,0}^{(3)} &= \frac{\sin \mu_n}{\mu_n}, \quad \beta_{n,\kappa}^{(3)} = \frac{\pi}{2} (-1)^\kappa (2\kappa+1) I_{\kappa+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{2}\right) I_{-\kappa-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{2}\right), \\ \beta_{n,\kappa}^* &= -\frac{16}{R^4} \frac{1-(\sigma^1)^2}{(1+\sigma)(1+2\sigma)} \frac{E \mu_n^2 J_0^2(\mu_n) \mu_\kappa \text{th} \mu_\kappa \ell}{E^1 J_0(\mu_\kappa)} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3 t_{n,m}^2 t_{\kappa,m}^2}{\omega_m} I_1^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right). \end{aligned} \quad (51)$$

$$\beta_{n,\kappa}^{(4)} = \beta_{n,\kappa}^* + \frac{1-(\sigma^1)^2}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{E}{E^1} \frac{\text{sh} 2\mu_n \ell + 2\mu_n \ell}{\text{sh} 2\mu_n \ell}, \quad \kappa = n, \quad \beta_{n,\kappa}^*, \quad \kappa \neq n.$$

$$\gamma_n^{(2)} = \frac{4}{\pi^2} \delta_0(i_{n,0} C_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_\kappa i_{n,\kappa} C_\kappa), \quad (n = \overline{0, N});$$

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(3)} &= -\frac{4\pi}{\ell^2} \frac{\alpha_T}{\alpha_{T^1}} \frac{\lambda_{z^1}}{\lambda_z} \frac{1-(\sigma^1)^2}{1+\sigma} \frac{E}{E_T^1} \mu_n^2 J_0^2(\mu_n) \cdot \left\{ \frac{-2\ell^2}{n^2} C_0 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{t_{n,\kappa}^2 I_1^2\left(\frac{\kappa\pi}{\ell}\right)}{\kappa \omega_\kappa} [(-1)^\kappa - 1] + \right. \\ &+ \frac{2\pi}{\ell^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{t_{n,\kappa}^2 \kappa^3 I_1^2\left(\frac{\kappa\pi}{\ell}\right)}{\omega_\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} t_{m,\kappa}^2 \mu_m J_0(\mu_m) \left[1 - \frac{(-1)^\kappa}{\text{ch} \mu_m \ell} \right] C_m \left. \right\} + \frac{1-(\sigma^1)^2}{1+\sigma} \frac{E}{E^1} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \frac{\alpha_T}{\alpha_{T^1}} \text{th} \mu_n \ell J_0^2(\mu_n) C_n; \end{aligned}$$

$$i_{n,0} = -\int_0^\infty \frac{1}{\eta^2} \tau_n(\eta) \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) d\eta, \quad (n = \overline{0, N});$$

$$i_{n,\kappa} = -\int_0^\infty \frac{1}{\eta} \tau_n(\eta) d\eta \int_0^1 \sin \mu_n y \sin \eta y dy, \quad (\kappa = \overline{1, \infty}; n = \overline{0, N});$$

$$\tau_0(\eta) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\cos \eta}{\eta} - \frac{1}{\eta} + \frac{1}{2} \sin \eta \right),$$

$$\tau_n(\eta) = \frac{1}{4} \eta \gamma_n \left(\frac{\eta}{2} \right) \left[\gamma_{n-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) + \gamma_{n+1} \left(\frac{\eta}{2} \right) \right] - \frac{(-1)^n}{2\Gamma(1+n)\Gamma(1-n)} \frac{\sin \eta}{\eta}, \quad (n = \overline{1, N}),$$

$\gamma_n(x)$ – сферичні функції.

Температура у зоні контакту обчислюється за формулами

а) для циліндра

$$T(\rho, 0) = T_0 \left\{ 1 - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \ell C_0 - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{\kappa=1}^{\infty} t h \mu_{\kappa} \ell J_0(\mu_{\kappa} \rho) C_{\kappa} \right\}, \quad (n = \overline{1, N}); \quad (52)$$

б) для півпростору

$$T^1(\rho, 0) = \frac{2}{\pi} T_0 \left\{ C_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta \right) J_0(\eta \rho) d\eta + \frac{2}{\pi} \sum_{\kappa=1}^{\infty} C_{\kappa} \mu_{\kappa} \int_0^{\infty} J_0(\eta \rho) d\eta \int_0^1 \sin \mu_{\kappa} y \sin \eta y dy \right\} \quad (53)$$

Для визначення контактних напружень під циліндром, з урахуванням (22), (27) і (47), отримаємо такі вирази:

$$\begin{aligned} \sigma_z^1(\rho, 0) &= \sigma_z^{(P)}(\rho, 0) + \sigma_z^{T^1}(\rho, 0), \\ \text{де } \sigma_z^{(P)}(\rho, 0) &= -\frac{P}{2\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[X_0^{(1)} + \frac{1}{\rho} \sum_{\kappa=1}^N (-1)^{\kappa} (2\kappa+1) T_{2\kappa+1}(\rho) X_{\kappa}^{(1)} \right], \\ \sigma_z^{(T^1)}(\rho, 0) &= \alpha_{T^1} T_0 \frac{x_0^1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[X_0^{(2)} + \frac{1}{\rho} \sum_{\kappa=1}^N (-1)^{\kappa} (2\kappa+1) T_{2\kappa+1}(\rho) X_{\kappa}^{(2)} \right], \quad (\rho < 1) \end{aligned} \quad (54)$$

де $x_0^1 = \frac{E^1}{2[1-(\sigma^1)^2]}$; $T_{2\kappa+1}(\rho)$ – функція Чебишева; $\sigma_z^{(P)}(\rho, 0)$ – силова складова напружень; $\sigma_z^{T^1}(\rho, 0)$ – температурна складова напружень.

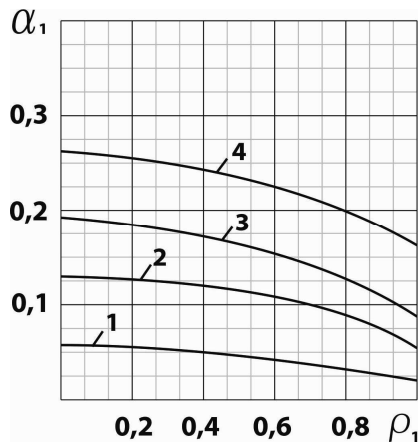


Рисунок 1. Розподіл температури для різних значень контактної провідності, криві: 1– $h_0^1=0,1$; 2– $h_0^1=1$; 3– $h_0^1=5$; 4– $h_0^1=\infty$

Figure 1. Temperature distribution for different values of contact conductivity, curves: 1– $h_0^1=0,1$; 2– $h_0^1=1$; 3– $h_0^1=5$; 4– $h_0^1=\infty$

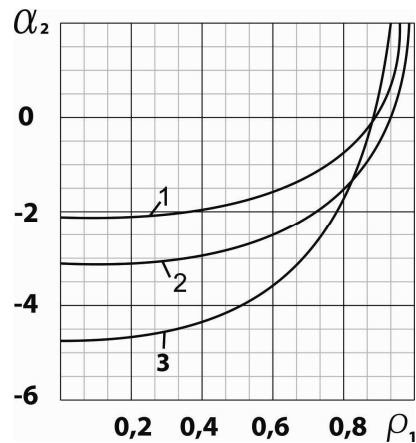


Рисунок 2. Розподіл температурної складової контактних нормальних напружень для різних значень відношення модулів Юнга. $\delta=E/E'$, криві: 1– $\delta=0,5$; 2– $\delta=1$; 3– $\delta=2$

Figure 2. Temperature component distribution of the contact normal stresses for different values of the young's modulus relation $\delta=E/E'$, curves: 1– $\delta=0,5$; 2– $\delta=1$; 3– $\delta=2$

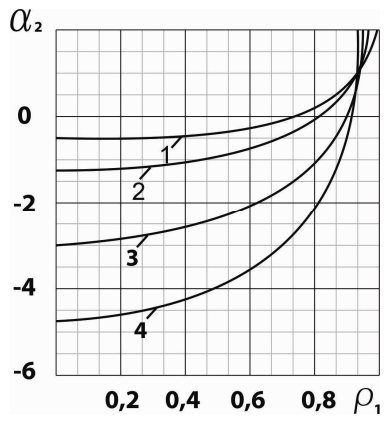


Рисунок 3. Розподіл температурної складової контактних нормальних напружень для різних значень контактної провідності, криві: 1- $h_0^1=0,1$; 2- $h_0^1=1$; 3- $h_0^1=5$; 4- $h_0^1=\infty$

Figure 3. Temperature component distribution of the contact normal stresses for different values of the contact conductivity, curves: 1- $h_0^1=0,1$; 2- $h_0^1=1$; 3- $h_0^1=5$; 4- $h_0^1=\infty$

Розв'язок як температурної, так і термопружної задачі зводиться до визначення деяких постійних із нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходяться температурні поля в будь-якій точці циліндра і півпростору. Дані системи рівнянь є квазірегулярні при усіх можливих співвідношеннях теплофізичних і пружних характеристиках тіл. Враховуючи це, розв'язок їх знаходимо методом редукції із усічених систем. Для числових підрахунків розв'язували системи 30-ти лінійних алгебраїчних рівнянь з 30-ма невідомими.

На рис.1 показано розподіл безрозмірної температури $\alpha_1 = \frac{T}{T_0}$ уздовж безрозмірної координати ρ при $\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} = 0,1$; $\ell = 2$. На рис.2 і 3 наведено розподіл безрозмірного нормального напруження $\alpha_2 = \frac{\sigma_z^{(r)}}{\alpha_T T_0 E}$ при $\frac{\alpha_T}{\alpha_{T^1}} = 1$; $\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} = 0,1$; $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^1 = 0,3$.

Висновок. При втисненні пружного циліндра в пружний півпростір неідеальний тепловий контакт між циліндром та штампом значно впливає на характер розподілу температурних складових нормальних контактних напружень. У подальшому доцільно розглянути задачу про контактну взаємодію пружного циліндра з пружним шаром при неідеальному тепловому контакті.

Conclusion. When the elastic cylinder is pressed into the elastic semi-space, non-ideal thermal contact between the cylinder and the punch affects sufficiently the nature of the temperature components distribution of the normal contact stresses. In future it is reasonable to analyze the problem of contact interaction of the elastic cylinder with the elastic layer under non-ideal thermal contact.

Список використаної літератури

1. Грилицкий, Д.В. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости [Текст] / Д.В. Грилицкий, Я.М. Кизыма. – Львов: Выща школа, Изд-во при Львов. ун.-те, 1981. – 135 с.
2. Кизыма, Я.М. Осесимметричная задача термоупругости для полупространства и цилиндра [Текст] / Я.М. Кизыма, Б.С. Окрепкий // Математические методы и физикомеханические поля. – 1977. – №6. – С.61–69.
3. Окрепкий, Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на пружний півпростір з врахуванням неідеального теплового контакту [Текст] / Б.С. Окрепкий, М.Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – №3. – С.26–33.
4. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости [Текст] / А.Д. Коваленко. – Киев:, Наук. думка, 1970. – 304 с.
5. Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа [Текст] / Э.Т. Уиттекер, Г.М. Ватсон. – М.: Физматгиз, 1963. – 343 с.
6. Кизыма, Я.М. Осесимметричная задача о давлении упругого цилиндра на упругое полупространство [текст] / Я.М. Кизыма // Изв. АН СССР, МТТ. – 1969. – №4. – С.71–78.

Отримано 25.12.2013