

УДК 539.3

В. Попович, докт. техн. наук; О. Вовк, канд. фіз.-мат. наук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПІВПРОСТОРІВ З ТЕПЛОВИДІЛЕННЯМИ НА МЕЖІ ДОТИКУ

Резюме. Побудовано розв'язок квазістатичної задачі термопружності для двох контактуючих термочутливих півпросторів з миттєвими або постійними тепловиділеннями на межі дотику та досліджено їх термопружний стан.

Ключові слова: нелінійна задача теплопровідності, термопружний стан, термочутливі півпростори, тепловиділення, метод лінеаризувальних параметрів, аналітично-числова методика.

V. Popovych, O. Vovk

RESEARCH OF THERMOELASTIC STATE OF THE CONTACTING THERMOSENSITIVE HALF-SPACES WITH HEAT RELEASE ON THE EDGE TOUCH

Summary. Modern scientific-technological development in determination of the stress-strain state of structural elements imposes increased demands to their mathematical models in order to represent more completely real physical processes. This, in turn, anticipates accounting of such important factors as thermosensitivity of materials, complex heat exchange, presence of internal heat sources, power loads, contact interaction, etc. When neglecting mechanical energy transformation into heat energy we arrive at the solution of the quasi-static uncoupled thermoelasticity problem, which is divided into separate problems: determination of the temperature field of the body and determination of its thermoelastic state caused by this field and other possible power factors. Complexity of such models lies in the necessity to solve nonlinear boundary-value problems of mathematical physics and boundary-value problems for the systems of differential equations with variable coefficients. Beside numerical methods, analytical-numerical approaches are widely used to solve such class of problems. They make it possible to verify the reliability of purely numerical solutions and to widen the possibilities of engineering practice as to choice of efficient and available means of solution actual problems.

One of such approach, based on utilization of the linearizing parameters method, which was widely approved on non-stationary heat conduction problems for thermosensitive bodies of simple geometric shape under complex heat exchange with the surroundings, was approved as to solution of the heat conduction problems for contacting thermosensitive bodies for heat sources acting on the contact boundary. The solution of quasi-static thermoelasticity problem for two contacting half-spaces, made of zirconium oxide and titanium alloy with instant or constant heat release on the contact boundary was constructed. Their thermoelastic state was studied.

Key words: nonlinear heat conduction problem, thermoelastic state, thermosensitive half-space, heat release, linearizing parameters method, analytic-numerical method.

Постановка проблеми. Сучасний науково-технічний розвиток при визначенні напружено-деформованого стану елементів конструкцій ставить підвищені вимоги до їх математичних моделей для повнішого відображення реальних фізичних процесів, що, в свою чергу, передбачає врахування таких важливих факторів, як термочутливість матеріалів, складний теплообмін, наявність внутрішніх джерел тепла, силових навантажень, контактної взаємодії тощо. За нехтування перетворенням механічної енергії у теплову приходимо до розв'язування квазістатичної незв'язаної задачі термопружності, яка розділяється на окремі задачі: знаходження температурного поля тіла та визначення його термопружного стану, зумовленого цим полем та іншими можливими силовими факторами. Складність таких моделей полягає у потребі розв'язування нелінійних крайових задач математичної фізики або крайових задач для

систем диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Крім числових методів широкого застосування до розв'язування такого класу задач набули аналітико-числові підходи, які дають змогу додатково перевірити достовірність суто числових розв'язків та розширити можливості інженерної практики щодо вибору ефективних і доступних засобів вирішення актуальних проблем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Детальний огляд досліджень, які стосуються визначення термопружного стану термочутливих тіл від початку виникнення проблеми до її сучасного стану, наведено в роботі [1]. Про важливість урахування таких факторів, як температурна залежність фізико-механічних характеристик матеріалів, складного теплообміну свідчать також публікації в міжнародних та вітчизняних виданнях, зокрема [2–6]. Зазначимо, що для розв'язування отриманих нелінійних задач математичної фізики використовують переважно числові методи або аналітико-числові підходи. Один із таких підходів, що базується на використанні методу лінеаризувальних параметрів, запропоновано у роботі [1, 7]. Згаданий метод був широко апробований на нестационарних задачах теплопровідності для термочутливих тіл простої геометричної форми за складного теплообміну з оточуючим середовищем [8–11].

Метою роботи є апробація цього методу стосовно розв'язування нестационарних задач теплопровідності для контактуючих термочутливих тіл, за дії на межі дотику джерел тепла (на прикладі контактуючих півпросторів) та визначення термонапружень, спричинених знайденим розподілом температури.

Формулювання задачі теплопровідності. Розглянемо задачу про визначення нестационарних температурних полів t_1, t_2 ідеально контактуючих різнорідних півпросторів, що нагріваються рівномірно розподіленими у площині контакту джерелами тепла інтенсивності q_0 , які продукують тепло постійно або миттєво. Вважаємо, що термомеханічні характеристики матеріалів півпросторів залежать від температури, а їх початкові температури однакові й дорівнюють t_p .

Зумовлені такими діями нестационарні температурні поля півпросторів визначаємо з рівнянь теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right) = c_v^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial \tau}, \quad z > 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} \right) = c_v^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial \tau}, \quad z < 0 \quad (1)$$

за початкових

$$t_i|_{\tau=0} = t_p \quad (2)$$

і крайових умов

$$\left. \frac{\partial t_i}{\partial z} \right|_{|z| \rightarrow \infty} = 0, \quad t_i|_{|z| \rightarrow \infty} = t_p \quad (3)$$

та умов контакту

$$t_1|_{z=0} = t_2|_{z=0}, \quad \left[\lambda_i^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_i^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right]_{z=0} = q(\tau), \quad (4)$$

де $q(\tau) = q_0 S_-(\tau)$ за постійно діючого, а $q(\tau) = q_0 \delta(\tau)$ за миттєвого джерел тепла,

$$S_-(\tau) = \begin{cases} 1, \tau \geq 0, \\ 0, \tau < 0, \end{cases} \quad \delta(\tau) - \text{дельта функція Дірака, } \lambda_t^{(i)}(t_i), c_v^{(i)}(t_i) \quad (i=1,2) - \text{залежні від}$$

шуканих температур коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів півпросторів відповідно. Вважаємо, що матеріали півпросторів такі, для яких коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності залежать від температури, а їх відношення залежать від температури незначно, через що їх наближено приймаємо сталими величинами $\lambda_t^{(i)}(t_i)/c_v^{(i)}(t_i) = a_{i0} \approx const$.

Побудова розв'язку задачі теплопровідності (1)–(4). Виберемо за відлікову температуру деяке її значення t_0 , а за характерний розмір – одиницю виміру довжини l_0 , введемо безрозмірні температури $T_i = t_i/t_0$, координату $\bar{z} = z/l_0$ і подамо характеристики матеріалів півпросторів у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де величини з нуликом мають відповідні розмірності, а співмножники з зірочкою описують залежність відповідної характеристики від безрозмірної температури. В результаті задачу (1)–(5) запишемо у безрозмірному вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} \right) = c_v^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial Fo}, \quad \bar{z} > 0; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} \right) = c_v^{(2)*}(T_2) K_a \frac{\partial T_2}{\partial Fo}, \quad \bar{z} < 0; \quad (5)$$

$$T_i|_{Fo=0} = T_p, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial \bar{z}} \right|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \quad T_i|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = T_p, \quad (7)$$

$$T_1|_{\bar{z}=0} = T_2|_{\bar{z}=0}, \quad K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} - \lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} = q_j, \quad (j=1,2), \quad (8)$$

де $q_1 = Ki S_-(Fo)$ – у випадку постійно діючого, $q_2 = Ki \delta(Fo)$ – миттєво діючого джерел тепла, $\bar{z} = \frac{z}{l_0}$, $T_i = \frac{t_i}{t_0}$, $T_p = \frac{t_p}{t_0}$, $Fo = \frac{a_0^{(1)} \tau}{l_0^2}$, $a_0^{(i)} = \frac{\lambda_{t0}^{(i)}}{c_{v0}^{(i)}}$, $K_a = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(2)}}$, $Ki = \frac{q_0 l_0}{\lambda_{t0}^{(1)} t_0}$,

$$K_\lambda = \frac{\lambda_{t0}^{(2)}}{\lambda_{t0}^{(1)}}.$$

До задачі (5)–(8) застосуємо інтегральне перетворення Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_t^{(i)*}(T) dT. \quad (9)$$

У результаті отримуємо крайову задачу на змінні θ_i

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial Fo}, \quad \bar{z} > 0; \quad \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \bar{z}^2} = K_a \frac{\partial \theta_2}{\partial Fo}, \quad \bar{z} < 0; \quad (10)$$

$$\theta_i|_{Fo=0} = 0, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_i}{\partial \bar{z}} \right|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \quad \theta_i|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \quad (12)$$

$$T_1(\theta_1)|_{\bar{z}=0} = T_2(\theta_2)|_{\bar{z}=0}, \quad K_\lambda \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} = q_j. \quad (13)$$

Перетворення Кірхгофа частково лінеаризували вихідну задачу. В той же час з лінійної умови рівності температур на межі контакту півпросторів (перша умова (8)) отримали нелінійну умову (перша умова (13)), для лінеаризації якої скористаємося методом лінеаризувального параметра [1]. Відповідно до нього побудуємо розв'язок задачі (10) – (13), в якій замість першої умови (13) використаємо лінійну умову

$$\theta_1|_{\bar{z}=0} = (1 + \kappa)\theta_2|_{\bar{z}=0},$$

де κ – поки що невідомий лінеаризувальний параметр.

Для розв'язання такої лінійної задачі на змінні Кірхгофа скористаємося перетворенням Лапласа за часом F_0 . У результаті отримаємо задачу на трансформанти змінних Кірхгофа

$$\frac{d^2\tilde{\theta}_1}{d\bar{z}^2} = s\tilde{\theta}_1, \bar{z} > 0; \frac{d^2\tilde{\theta}_2}{d\bar{z}^2} = K_a s\tilde{\theta}_2, \bar{z} < 0; \quad (14)$$

$$\left. \frac{d\tilde{\theta}_i}{d\bar{z}} \right|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \tilde{\theta}_i|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \quad (15)$$

$$\tilde{\theta}_1|_{\bar{z}=0} = (1 + \kappa)\tilde{\theta}_2|_{\bar{z}=0}, K_\lambda \left. \frac{d\tilde{\theta}_2}{d\bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} - \left. \frac{d\tilde{\theta}_1}{d\bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} = \tilde{q}_j, \quad (16)$$

де $\tilde{\theta}_i = \int_0^\infty \theta_i e^{-sF_0} dF_0$, s – параметр перетворення Лапласа, $\tilde{q}_1 = \frac{Ki}{s}$, $\tilde{q}_2 = Ki$.

Розв'язки рівнянь (14), які задовольняють умови (15), мають вигляд

$$\tilde{\theta}_1 = C_1 e^{-\bar{z}\sqrt{s}}, \bar{z} > 0, \tilde{\theta}_2 = C_2 e^{-|\bar{z}|\sqrt{sK_a}}, \bar{z} < 0,$$

а визначені з умов (16) сталі інтегрування запишемо

$$\begin{cases} C_1 = \frac{(1 + \kappa)\tilde{q}_j}{\sqrt{s}(K_\lambda\sqrt{K_a} + 1 + \kappa)}, \\ C_2 = \frac{\tilde{q}_j}{\sqrt{s}(K_\lambda\sqrt{K_a} + 1 + \kappa)}. \end{cases}$$

Врахувавши їх вирази, отримаємо трансформанти змінних Кірхгофа

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{(1 + \kappa)\tilde{q}_j}{\sqrt{s}(K_\lambda\sqrt{K_a} + 1 + \kappa)} e^{-\bar{z}\sqrt{s}}, \bar{z} > 0, \tilde{\theta}_2 = \frac{\tilde{q}_j}{\sqrt{s}(K_\lambda\sqrt{K_a} + 1 + \kappa)} e^{-|\bar{z}|\sqrt{sK_a}}, \bar{z} < 0. \quad (17)$$

Здійснивши в (17) обернене перетворення Лапласа [12], знаходимо вирази змінних Кірхгофа:

– для випадку постійно діючого джерела тепла

$$\theta_1(Fo, \bar{z}, \kappa) = \frac{(1 + \kappa)Ki}{K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \kappa} \left(2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} e^{-\frac{\bar{z}^2}{4Fo}} - \bar{z} \operatorname{erfc} \frac{\bar{z}}{2\sqrt{Fo}} \right), \quad \bar{z} > 0, \quad (18)$$

$$\theta_2(Fo, \bar{z}, \kappa) = \frac{Ki}{K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \kappa} \left(2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} e^{-\frac{\bar{z}^2 K_a}{4Fo}} + \bar{z} \sqrt{K_a} \operatorname{erfc} \left(-\frac{\bar{z} \sqrt{K_a}}{2\sqrt{Fo}} \right) \right), \quad \bar{z} < 0, \quad (19)$$

– для випадку джерела діючого миттєво

$$\theta_1(Fo, \bar{z}, \kappa) = \frac{(1 + \kappa)Ki}{K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \kappa} \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} e^{-\frac{\bar{z}^2}{4Fo}}, \quad \bar{z} > 0, \quad (20)$$

$$\theta_2(Fo, \bar{z}, \kappa) = \frac{Ki}{K_\lambda \sqrt{K_a} + 1 + \kappa} \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} e^{-\frac{K_a \bar{z}^2}{4Fo}}, \quad \bar{z} < 0. \quad (21)$$

Температури за відомими змінними Кірхгофа обчислюємо для конкретних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури з рівнянь (9). За лінійних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури ($\lambda_i^{(i)*}(T_i) = 1 + k_i(T_i - T_p)$), формули для обчислення просторово-часових розподілів температур півпросторів мають вигляд

$$T_i(Fo, \bar{z}, \kappa) = k_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k_i \theta_i(Fo, \bar{z}, \kappa)} - 1 \right) + T_p, \quad \text{де } k_i = \text{const}.$$

Невідомий лінеаризувальний параметр κ визначаємо з нелінійної умови рівності температур на межі контакту (перша умова (13)), яка після нескладних перетворень набуває вигляду $(k_2(1 + \kappa) - k_1)^2 \theta_2(Fo, 0, \kappa) = 2(k_1 - k_2)\kappa$.

Таким чином, алгоритм розв'язування поставленої задачі теплопровідності містить такі кроки:

- зведення вихідної задачі до безрозмірного вигляду;
- часткова лінеаризація задачі у безрозмірних величинах шляхом застосування перетворення Кірхгофа;
- використання замість нелінійної умови, яка виражає рівність температур на межі контакту, лінійної умови з невідомим лінеаризувальним параметром;
- розв'язування отриманої лінійної задачі на змінні Кірхгофа за допомогою перетворення Лапласа;
- знаходження виразів просторово-часових розподілів температур за відомих залежностей від температури коефіцієнтів теплопровідності з формул перетворення Кірхгофа;
- визначення невідомого лінеаризувального параметра з умови рівності температур на межі контакту.

Визначення термопружного стану. У випадку вільного від зовнішнього навантаження кусково-однорідного термочутливого простору термопружний стан описуємо виразами

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \sigma_{yy}^{(i)} = \sigma_i(z, Fo) = \frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} [C_1(Fo) + C_2(Fo)z - \hat{O}_i(t_i)],$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = \sigma_{xz}^{(i)} = \sigma_{yz}^{(i)} = \sigma_{xy}^{(i)} = 0, \quad (22)$$

де $C_1(Fo), C_2(Fo)$ – невідомі функції, $\hat{O}_i(t_i) = \int_{t_p}^{t_i} \alpha_{ii}(t_i) dt_i$ – суто теплові деформації,

$E_i(t_i), \nu_i(t_i), \alpha_{ii}(t_i)$ – залежні від температури модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона і температурні коефіцієнти лінійного розширення матеріалів півпросторів.

З умови обмеженості напружень на безмежності отримуємо, що $C_2(Fo) = 0$. Врахувавши, що при $z \rightarrow \infty$ $t_i \rightarrow t_p$, напруження σ при $z \rightarrow \infty$ будуть прямувати до нуля. Ці вимоги будуть забезпечені за $C_1(Fo) = 0$.

Таким чином,

$$\sigma_i(z, Fo) = -\frac{E_i(t_i)}{1-\nu_i(t_i)} \hat{O}_i(t_i). \quad (23)$$

Якщо механічні характеристики аналогічно тепловим навести у вигляді $\chi_i(t_i) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(T_i)$, де $\chi_0^{(i)}$ – розмірні величини, які дорівнюють значенням відповідних характеристик при температурі t_p ($T_i = T_p$), а величини з зірочкою безрозмірні, причому $\chi_i^*(T_p) = 1$, то після введення безрозмірних напружень $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / (E_0^{(o)} \alpha_{t_0}^{(o)} t_0)$ формули (23) набувають вигляду

$$\bar{\sigma}_i(z, Fo) = -K_\sigma^{(i)} \frac{E_i^*(t_i)}{1-\nu_i(t_i)} \bar{O}_i(t_i), \quad (24)$$

де $K_\sigma^{(i)} = \frac{E_0^{(i)} \alpha_{t_0}^{(i)}}{E_0^{(o)} \alpha_{t_0}^{(o)}}$, $t_0, E_0^{(o)}, \alpha_{t_0}^{(o)}$ – вибрані нами відлікові значення температури, модуля

Юнга і ТКЛР, $\bar{O}_i(T_i) = \int_{T_p}^{T_i} \alpha_{ii}^*(\xi) d\xi$.

Числові дослідження. Проведено числові дослідження температурного поля і зумовленого ним напруженого стану півпросторів, виготовлених з окису цирконію ($\bar{z} > 0$) та титанового сплаву ($\bar{z} < 0$) з фізико-механічними характеристиками, температурні залежності яких змінюються за відповідними законами у діапазоні температур 300...1100 К [13] за миттєвого та постійно діючого джерел тепла різних потужностей. Фізико-механічні характеристики, представлені як добуток розмірної величини на безрозмірну функцію від безрозмірної температури $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, мають такий вигляд:

для окису цирконію

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(1)}(t) &= 1,773(1+0,13(T-T_p)), \quad c_v^{(1)}(t) = 461,407(1+1,12(T-T_p)-1,22(T-T_p)^2 + \\ &+ 0,49(T-T_p)^3), \quad \alpha_i^{(1)}(t) = 0,8783 \cdot 10^{-5}(1+0,309 \cdot 10^{-4}(T-T_p)+1,75(T-T_p)^2), \\ E^{(1)}(t) &= 116,381(1-0,1756(T-T_p)-0,0842(T-T_p)^2), \quad \nu^{(1)} = 0,333, \quad \rho \approx 3657; \end{aligned}$$

для титанового сплаву

$$\lambda_i^{(2)}(t) = 6,2(1 + 3,016(T - T_p)), c_v^{(2)}(t) = 522,701(1 + 0,525(T - T_p) - 1,33(T - T_p)^2 + 1,128(T - T_p)^3), \alpha_i^{(2)}(t) = 8,856 \cdot 10^{-6}(1 + 3,34(T - T_p) + 0,37(T - T_p)^2), \rho \approx 4420, E^{(2)}(t) = 122,68(1 - 0,000507(T - T_p)), \nu^{(2)}(t) = 0,2984(1 + 0,118(T - T_p)).$$

За відлікову t_0 брали максимальну температуру з проміжку зміни характеристик 1100 К, а початкову t_p вважали рівною 300 К. Усі обчислення проведені для безрозмірних величин. Результати досліджень за миттєво діючого джерела тепла наведені на рис.1, 2, за постійно діючого – на рис.3, 4.

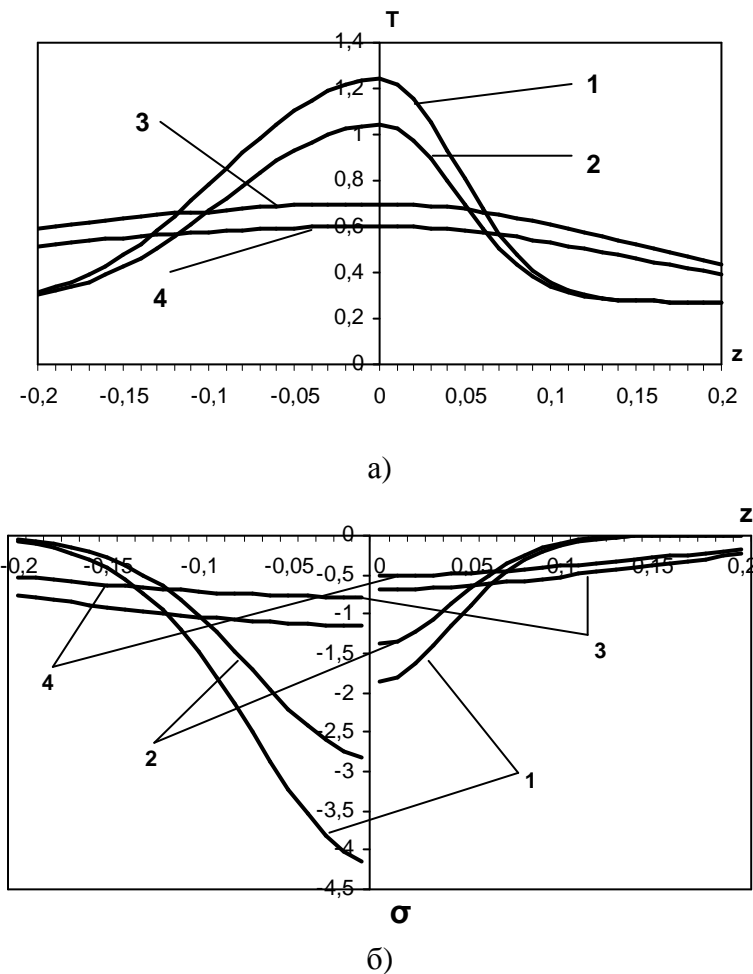
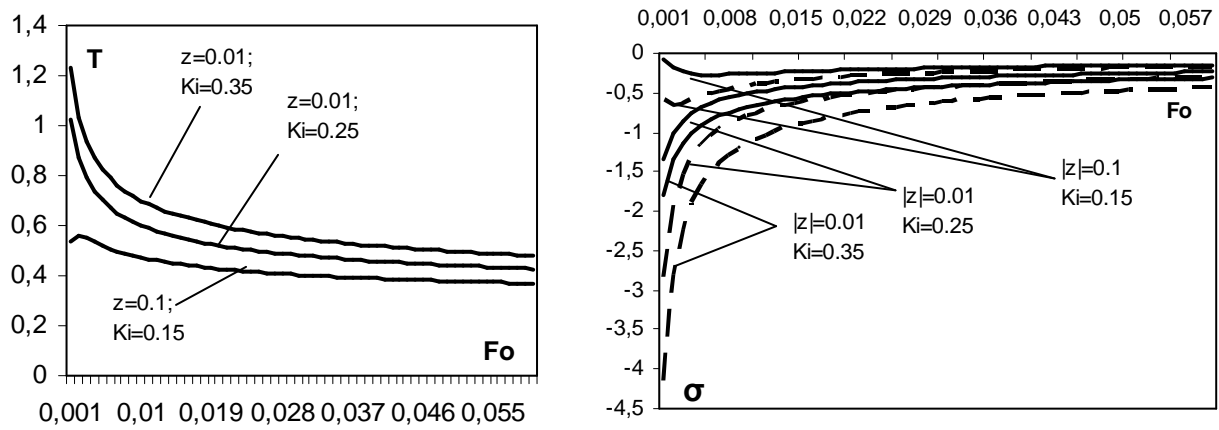


Рисунок 1. Розподіли температури (а) та напружень (б) в півпросторах за дії миттєвого джерела тепла при $Ki = 0.35$ та $Ki = 0.25$

Figure 1. Temperature (a) and stress (б) distributions in the half-spaces under the action of instant heat source for $Ki = 0.35$ and $Ki = 0.25$

На рис.1 зображені графіки зміни температури (а) та напружень (б) залежно від координати z : крива 1 – за $Fo = 0.001, Ki = 0.35$, крива 2 – за $Fo = 0.001, Ki = 0.25$, крива 3 – за $Fo = 0.01, Ki = 0.35$, крива 4 – за $Fo = 0.01, Ki = 0.25$. Графіки на рис.1 ілюструють зміну температури (а) та напружень (б) залежно від часу Fo у точках $z = \pm 0.01$ та $z = \pm 0.1$ за різних потужностей миттєвого джерела тепла, причому суцільна лінія відповідає додатним, а штрихова – від’ємним значенням координати.



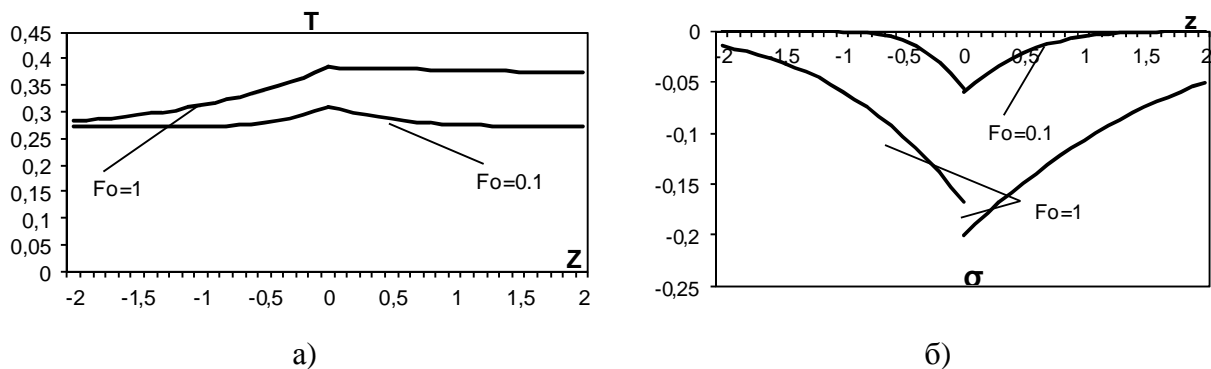
a)

б)

Рисунок 2. Зміна температури (а) та напружень (б) з часом у фіксованих точках півпросторів за дії миттєвого джерела тепла різної потужності

Figure 2. Temperature (a) and stress (b) change with time at fixed points of half-spaces for instant heat source of different power

На рис.3 зображені графіки зміни температури (а) та напружень (б) за постійно діючого джерела тепла при $Ki = 0.35$ залежно від координати z в різні моменти часу, зокрема, коли $Fo = 0.1$ та $Fo = 1$. Графіки на рис. 4 ілюструють зміну з часом температури (а) та напружень (б) в точках $z = \pm 0.01$ та $z = \pm 0.1$ при $Ki = 0.35$ та $Ki = 1$, причому суцільна лінія відповідає від'ємним, а штрихова – додатним значенням координати.



a)

б)

Рисунок 3. Розподіли температури (а) та напружень (б) в півпросторах за постійно діючого джерела тепла при $Ki = 0.35$

Figure 3. Temperature (a) and stress (б) distributions in the half-spaces for constant heat source for $Ki = 0.35$

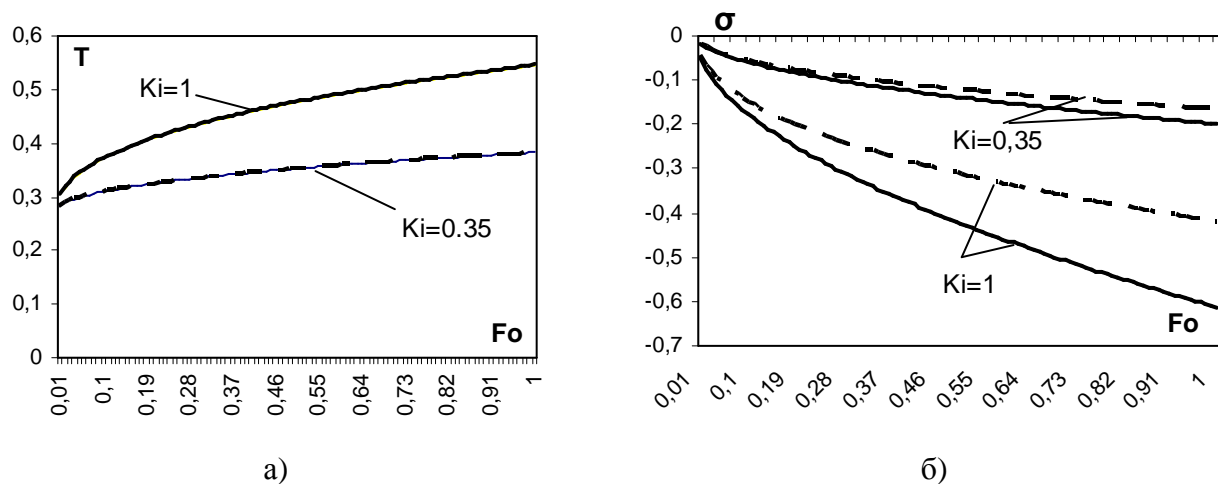


Рисунок 4. Зміна температури (а) та напружень (б) з часом у фіксованих точках півпросторів за постійно діючого джерела тепла при $Ki = 0.35$ та $Ki = 1$

Figure 4. Temperature (a) and stress (b) change with time at fixed points of half-spaces for constant heat source for $Ki = 0.35$ and $Ki = 1$.

З графіків розподілу температур півпросторів залежно від координати за миттєвого (рис.1,а) та постійно діючого джерел тепла (рис.3,а) бачимо, що півпростір з титанового сплаву, у якого більший коефіцієнт теплопровідності, прогрівається швидше, ніж півпростір з окису цирконію. Графіки на рис.2,а та 4а показують, що розподіли температури за часом у точках $z = \pm 0.01$ та $z = \pm 0.1$ практично співпадають в обох півпросторах за дії джерела певної потужності як миттєвого, так і постійного. Натомість спостерігається значний стрибок у значеннях напружень у початковий та близькі до нього моменти часу для миттєвого джерела (рис.2,б) і зростання їх значень з часом – для постійно діючого джерела (рис.4,б).

Оскільки фізико-механічні характеристики обраних матеріалів змінюються за відповідними законами в діапазоні температур від 300 К до 1100 К, що відповідають їх безрозмірним значенням 0.273 та 1, то за потужності джерела $Ki = 0.35$ на проміжку $[-0.05, 0.05]$ при $Fo = 0.001$ реальні значення температур та напружень можуть не відповідати отриманим (рис.1).

Відзначимо також, що за дії миттєвого джерела в кожному з півпросторів є ділянки, на яких графік розподілу температури залежно від Fo спадає не на всьому часовому проміжку, а лише починаючи з певного моменту часу, причому його значення та довжина відповідної координатної ділянки залежать від теплофізичних характеристик матеріалу та потужності джерела (рис.2).

Висновки. На прикладі задачі теплопровідності для контактуючих термочутливих півпросторів за наявності на межі дотику миттєво або постійно діючих джерел тепла апробовано метод лінеаризувальних параметрів для побудови розв'язків нестационарних задач теплопровідності контактуючих термочутливих тіл. Побудовано також розв'язок відповідної квазістатичної задачі термопружності.

На основі отриманих розв'язків проведено дослідження температурних полів та термопружних станів термочутливих півпросторів, виготовлених з окису цирконію та титанового сплаву за миттєво або постійно діючого джерел тепла різної потужності.

У подальших дослідженнях планується використання отриманих результатів для знаходження температурних полів та викликаних ними термопружних станів термочутливих півпросторів без обмежень на характер зміни теплових характеристик від температури.

Conclusions. On the examples of heat conduction problems for contacting thermosensitive half-spaces at the presence of instantly or constantly acting heat sources on the contact boundary the linearizing parameters method was approved to construct solution to nonstationary heat conduction problems of contacting thermosensitive bodies. The solution to corresponding quasi-static thermoelasticity problems was constructed as well.

On the basis of solutions obtained the study of temperature field and thermoelastic state of thermosensitive half-spaces, made of zirconium oxide and titanium alloy for heat sources of different power, acting instantly or constantly was carried out.

In future we are to use the results obtained to find temperature fields and thermoelastic states caused by them for thermosensitive half-spaces without restraints on the nature of change of thermal characteristics from temperature.

Список використаної літератури

1. Моделирование та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; за заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т.3: Термопружність термочувливих тіл [Текст] / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
2. Abouelregala Ahmed E. Fractional Order Generalized Thermo-Piezoelectric Semi-Infinite Medium with Temperature-Dependent Properties Subjected to a Ramp-Type Heating [Текст] / Ahmed E. Abouelregala // Journal of Thermal Stresses, Volume 34, Issue 11, 2011. –P.1139–1155.
3. Kanoriaa M. & Ghoshb M. K. Study of Dynamic Response in a Functionally Graded Spherically Isotropic Hollow Sphere with Temperature Dependent Elastic Parameters [Текст] / M. Kanoriaa & M.K. Ghoshb // Journal of Thermal Stresses, Volume 33, Issue 5, 2010. – P.459–484.
4. Hedayati F. An Analytical Study on a Model Describing Heat Conduction in Rectangular Radial Fin with Temperature-Dependent Thermal Conductivity International [Текст] / F.Hedayati, D.D.Ganji, S.M. Hamidi and A. Malvandi // Journal of Thermophysics. V. 33, Number 6 (2012), 1042-1054, DOI: 10.1007/s10765-012-1222-0.
5. Seung-Hwan Yu Effect of radiation in aradialheatsinkundernaturalconvection International [Текст] / Yu Seung-Hwan, Jang Daeseok, Lee Kwan-Soo // Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 55, Issues 1–3, 2012. – P.505–509.
6. Philipona R. Solar and thermal radiation profiles and radiative forcing measured through the atmosphere [Текст] / R.Philipona, A.Kräuchi, E.Brocard // Geophysical Research Letters, VOL. 39, L13806, 6 PP., 2012, doi:10.1029/2012GL052087.
7. Попович, В.С. О решении задач теплопроводности термочувствительных тел, нагреваемых путем конвективного теплообмена [Текст] / В.С. Попович // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 28. – С.83–86.
8. Harmatij H. Quasi-Static Problem of Thermoelasticity for Thermosensitive Infinite Cirkular Cylinder of Complex Heat Exchange [Текст] / Halyna Harmatij, Marta Krol, Vasyl Popovycz // Advances in Pure Mathematics. Vol.3. No.4. 2013. – P.430–437.
9. Попович, В.С. Температурне поле скінченого термочувливого циліндра за конвективного теплообміну з середовищами змінних температур [Текст] / В. Попович, Н. Заводовська // Вісник ТНТУ). – 2013. – № 4. – С.252–260.
10. Попович, В.С. Математичне моделювання та визначення термопружного стану тонкої смуги за складного теплообміну [Текст] / В.С. Попович, В.В. Янішевський // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ, 2013.
11. Попович, В.С. Метод лінеаризувальних параметрів у задачах термопружності термочувливих тонкостінних елементів конструкцій [Текст] / В.С. Попович, В.В. Янішевський // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вып. 8. – С. 152–161.
12. Диткин, В.А. Справочник по операционному исчислению [Текст] / В.А. Диткин, А.П.Прудников. – М.: Высш. шк., 1965. – 466 с.
13. Tanigawa, Y. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties [Текст] / Y. Tanigawa, T. Akai, R. Kawamura and N. Oka // J. Thermal Stresses. – 1996. – Vol. 19, Issue 1. – P.77–102.

Отримано 10.04.2014