Л. Семчишин. Програмна реалізація методу розв'язання розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь в середовищі MatLab / Л. Семчишин // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 72. — № 4. — С.273-285. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 518.25

Л. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу,
Тернопільський національний економічний університет

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ В СЕРЕДОВИЩІ MatLab

***Резюме**. Запропоновано новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Протестовано алгоритми розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь. Показано ефективність запропонованого алгоритму.*

***Ключові слова:** розріджені системи, ланцюгові дроби, скінченні суми, кількість записів, складність алгоритму, комп'ютерна алгебра, тестування алгоритмів.*

L. Semchyshyn

PROGRAME REALIZATION OF THE RAREFIED NUMERAL SYSTEMS LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS IN THE MatLab MEDIUM SOLUTION METHOD

Summary. *New approach to the linear algebraic equations rarefied systems with block elements solution and the method of rarefied systems with the specific ways of filling solution is suggested in the article. The variables of the* x_i *rarefied system of the linear algebraic equations into the finite matrix chain fractions are decomposed. Calculation of the records number and operations under the numerical realization of the matrix multiplication algorithm is conducted. The algorithm complication from the computer algebra point of view is characterized. Comparison of the suggested algorithm and the block method of "prohonka" is carried out. The number of records for the method of "prohonka" is calculated. The described algorithm is used in the case of systems with the rarefied three-diagonal matrix.*

Algorithms of some types rarefied numerical systems of the linear algebraic equations are tested. Three-diagonal systems of the linear algebraic equations solution by the method of chain fractions. The high accuracy of the suggested solution is shown.

Function ESSELS is written and tested for the linear algebraic equations with numerical elements solution systems in the MatLab medium. This function implements the algorithm of the linear algebraic equations solution using the method of cut-off systems. This algorithm allows to solve equation systems in two ways:

– in the case of symmetrical filling (the quantity of under-diagonals equals the quantity of above-diagonals), and when the quantity of matrix under-diagonals and the quantity of above-diagonals are different. For the comparison of the MatLab packsge with regular programmes a small programme MatLab Band was written. It realizes the procedure of the linear algebraic equations tape systems by means of MatLab. The results of both systems comparison are carried out in the chart. Algorithms for the given test system of the average dimension have a considerable advantages in comparison with the standard functions of the MatLab package. Efficiency of the suggested algorithm is shown in the article. Theoretical and methodological basis of investigation comprise methods of optimization and mathematic modeling.

Key words: *rarefied systems, chain fractions, finite sums, quantity of records, algorithm difficulty, computer algebra, algorithm testing.*

Постановка проблеми. Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) є однією з актуальних задач обчислювальної математики. Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Обчислювальні методи – одні з базових інструментів математичного моделювання й важливою частиною програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь. За умови використання таких обчислювальних методів застосовують математичне моделювання до розв'язку математичної задачі. Тоді розв'язок отримують у вигляді числового результату. Його ефективність визначається продуктивністю ЕОМ та якістю обчислювальних алгоритмів і програм, що використовуються. Побудова ефективних методів визначення невідомих для таких систем – потрібна і дуже непроста задача.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Багато відомих вітчизняних і закордонних вчених займалися проблемами розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Серед них: В. Воєводін [1, 2], В. Воєводін, Ю. Кузнєцов [3], Є. Тиртишніков [4], Дж. Уілкінсон [5] та ін. Розв'язуванню розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами присвячені роботи В. Воєводіна [6], Ф. Гантмахера [7]. Однак деякі проблеми не мають однозначного розв'язання і потребують уточнення. У роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [8] розглянуто комп'ютерні алгоритми для систем лінійних алгебричних рівнянь. Особлива увага приділялася методам аналізу обчислювальної стійкості алгоритмів у працях таких учених, як С. Ашманов [9], В. Валях [10], Д. Девенпорт, І. Сіре, Є. Турньє [11].

Мета роботи. Дослідити новий підхід до розв’язування розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами. Провести підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Порівняти запропонований алгоритм та блочний метод прогонки. Обчислити кількість записів для методу прогонки. Протестувати алгоритми розв’язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь. Показати ефективність запропонованих алгоритмів.

Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичне моделювання.

1. Дослідження задачі та обґрунтування отриманих наукових результатів. У значній кількості прикладних задач виникає необхідність розв’язання розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами [1,2]. Розглянемо метод розв’язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

Розглянемо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

елементи якої A_{ij} – це блоки розмірності $m \times m$. Позначимо через $A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних стрічок $i_1, i_2, \dots, i_k$ та блочних стовпців $j_1, j_2, \dots, j_k$. За узагальненим правилом Крамера [2]

1. $$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & A_{2,n+1} & \ddots & 0 \\ \ddots & A_{3,2} & \ddots & A_{3,n+1} & \ddots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & A_{n,n+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right) \qquad (2)$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ik} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A\begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}, \; i,k = \overline{1,n}.$$

Тоді для визначення невідомої x_1 маємо співвідношення

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{k,n+1}\alpha_{i,k}. \tag{3}$$

Для компактності запису надалі будемо позначати результат виконання операції множення на обернену матрицю зліва у вигляді $C^{-1}D = D/C$. Тоді вираз $D_1/(C_1 + D_2/C_2)$ означатиме $(C_1 + C_2^{-1}D_2)^{-1} \cdot D_1$.

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Леонарда Ейлера [4], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то для x_1 отримаємо

$$x_i = \left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} A_{k,n+1}\,\alpha_{i,k} = \frac{A\begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times$$

$$\times \cfrac{A_{1,n+1}}{E + \cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2} / A_{1,n+1}\alpha_{1,1}}{E - \cfrac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{A_{1,n+1}\alpha_{1,2}} + \cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3} / A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{E - \cfrac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}}{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}} + \ddots}}} \tag{4}$$

$$\ddots + \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n} / A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}{E - \cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}}$$

Тут і далі E – означає одиничну матрицю.

Вираз $\alpha_{1,k+1}^{-1} \cdot \alpha_{1,k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ також можна розкласти в ланцюгові дроби [11]

$$\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,k+1}} = \frac{A_{1,k} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} - A_{k+1,k} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A_{1,k}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} A\begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix} A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} \left(A^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}^T A^T \begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix} \right)^T} =$$

$$=\ldots=\cfrac{E}{A_{k+1,k+1}-\cfrac{A_{k+1,k}A_{k,k+1}}{A_{k,k}-\cfrac{A_{k-1,k}A_{k,k-1}}{A_{k-1,k-1}-\ddots_{\ddots-\cfrac{A_{1,2}A_{2,1}}{A_{1,1}}}}}}. \quad k=\overline{1,n}. \tag{5}$$

В подібний спосіб

$$\frac{A\begin{bmatrix}2 & 3 & \ldots & n\\ 2 & 3 & \ldots & n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{bmatrix}}=\frac{E}{A_{1,1}-A_{2,1}A_{1,2}\left[A^{-1}\begin{bmatrix}2 & 3 & \ldots & n\\ 2 & 3 & \ldots & n\end{bmatrix}^{T}A\begin{bmatrix}3 & 4 & \ldots & n\\ 3 & 4 & \ldots & n\end{bmatrix}^{T}\right]}=$$

$$=\ldots=\cfrac{E}{A_{1,1}-\cfrac{A_{2,1}A_{1,2}}{A_{2,2}-\cfrac{A_{2,3}A_{3,2}}{A_{3,3}-\ddots_{\ddots-\cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}}.$$

За аналогічною схемою знаходимо решту невідомих x_i

$$x_i=\left(A\begin{bmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i}+\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+k}A_{k,n+1}\alpha_{i,k}+\frac{A_{i,n+1}}{2}\alpha_{i,i}+\sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{i+k}A_{k,n+1}\alpha_{i,k}\right)=$$

$$=\left[(-1)^{2i-1}A_{i-1,i}\alpha_{i,i-1}/\alpha_{i,i}+(-1)^{2i}A_{i,i}+(-1)^{2i+1}A_{i+1,i}\alpha_{i,i+1}/\alpha_{i,i}\right]^{-1}\times$$

$$\times[\cfrac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E-\cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{E+\cfrac{2A_{i-1,n+1}\alpha_{i,i-1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}}-\ddots_{\ddots-\cfrac{\frac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}{E+\cfrac{A_{1,n+1}\alpha_{i,1}}{A_{2,n+1}\alpha_{i,2}}}}}}-\cfrac{\frac{1}{2}A_{i,n+1}}{E-\cfrac{2\left(A_{i,n+1}\alpha_{i,i}\right)^{-1}A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{E+\cfrac{2A_{i+1,n+1}\alpha_{i,i+1}}{A_{i,n+1}\alpha_{i,i}}-\ddots_{\ddots-\cfrac{\frac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}{E+\cfrac{A_{n,n+1}\alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{i,n-1}}}}}}]$$

А для кожного відношення $\alpha_{i,k}/\alpha_{i,k+1}$, в свою чергу, можна записати

Отже, отримуємо аналітичне розвинення невідомих x_i даної розрідженої системи лінійних алгебричних рівнянь у скінчені матричні ланцюгові дроби.

$$\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}}=\frac{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & i-1\\ 1 & 2 & \dots & i-1\end{bmatrix}\prod_{s=i+1}^{k-1}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+1 & \dots & \dots & n\\ k+1 & \dots & \dots & n\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & i-1\\ 1 & 2 & \dots & i-1\end{bmatrix}\prod_{s=i+1}^{k}A_{s,s+1}A\begin{bmatrix}k+2 & \dots & \dots & n\\ k+2 & \dots & \dots & n\end{bmatrix}}=\frac{A\begin{bmatrix}k+1 & \dots & \dots & n\\ k+1 & \dots & \dots & n\end{bmatrix}}{A_{k,k+1}A\begin{bmatrix}k+1 & \dots & \dots & n\\ k+1 & \dots & \dots & n\end{bmatrix}}=$$

$$=\frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}}-\frac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}}{A_{k,k+1}\left(A^{-1}\begin{bmatrix}k+3 & \dots & n\\ k+3 & \dots & n\end{bmatrix}^{T}A^{T}\begin{bmatrix}k+2 & \dots & n\\ k+2 & \dots & n\end{bmatrix}\right)^{T}}=$$

$$=\dots=\frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}}-\cfrac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}/A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2}-\cfrac{A_{k+3,k+2}A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3}-\cfrac{A_{k+3,k+4}A_{k+4,k+3}}{A_{k+4,k+4}-\ddots_{\ddots-\cfrac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}}}}}.$$

Отже, отримуємо аналітичний розклад невідомих x_i даної розрідженої системи лінійних алгебричних рівнянь у скінчені матричні ланцюгові дроби.

2. Обчислювальні характеристики алгоритму

Тепер підрахуємо необхідну кількість записів при символьному розв’язуванні задачі та кількість операцій під час чисельної реалізації алгоритму множення матриць $A_{ij}\cdot A_{kl}$.

Твердження [8]. Нехай деяка обчислювальна задача з вхідними даними $\{A_i\}$ розв’язується на ЕОМ за алгоритмом ψ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ і складається з k кроків ψ_j ($j=\overline{1,k}$). Якщо на кожному кроці алгоритму $\psi(A)$ реалізується хоча б один запис виду $\psi_{ji_1}(A)\cdot\psi_{ji_2}(A)$, який використовує результат попереднього кроку, то загальна складність Q_ψ задачі буде не меншою $2^k\cdot m^2$, але не більшою H^k записів, де H – найбільша ширина алгоритму на k кроках.

Використаємо це твердження для оцінювання складності алгоритму з точки зору комп’ютерної алгебри [11]. Для чисел x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ на одному поверсі реалізація алгоритму вимагає одне блочне множення, одне блочне ділення, одне блочне додавання, а для n поверхів – $3n$ операцій, тобто по n блочних множень, ділень та додавань.

Обчислення показують, що для визначення всіх $A_{i,k}/A_{i,k+1}$ потрібно $5k$ записів, якщо $k < i$, і $5(n-k)$, якщо $k > i$. Таким чином, необхідно виконати

$$5\sum_{k=1}^{i}k+5\sum_{k=i}^{n}n-k=5\left[\frac{(1+i)i}{2}+n(n-i+1)-\frac{(i+n)(n-i+1)}{2}\right]=5\left[i^2+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-ni\right].$$

Отже, загальна складність методу становить

$$5\sum_{i=1}^{n}\left[i^2+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}-ni\right]=\frac{5}{2}(n^3+n).$$

Відомо [7, 10], що алгоритм прогонки реалізується співвідношеннями

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_{i,n+1} + a_{i,i-1}\beta_i}{a_{i,i} - a_{i,i-1}},$$

для прямого та зворотного ходу.

Проведемо порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Кількість записів для методу прогонки, який реалізується співвідношеннями

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = a_{1,2}/a_{1,1}, \quad \beta_2 = a_{1,n+1}/a_{1,1},$$

$$x_2 = \alpha_3 x_3 + \beta_3, \quad \alpha_3 = \frac{a_{2,3}}{a_{2,2} - a_{2,1}}, \quad \beta_3 = \frac{a_{2,n+1}}{a_{2,2} - a_{2,1}},$$

$$x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n, \quad \alpha_n = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n-2}}, \quad \beta_n = \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,1}},$$

буде оцінюватися відповідно до *твердження*. Розрахунки свідчать, що для обчислення α_{i+1} та β_{i+1} необхідно записати по i операцій блочного додавання, блочного множення та блочного ділення.

Тоді для обчислення кожного x_k треба записати $\sum_{k=1}^{i} k = (1+i)i/2$ записів, а для обчислення всіх $x_i\ i = \overline{1,n}$ потрібно $(n^3 + n^2 + 2n)/4$ записів.

Таким чином, із точки зору комп’ютерної алгебри запропонований алгоритм суттєво переважає класичний алгоритм прогонки. Він може бути реалізований як в аналітичному, так і числовому вигляді. Для реалізації запропонованого алгоритму потрібно по $6n$ блочних додавань і блочних ділень і $4n$ блочних множень, оскільки в цьому випадку результати обчислень проміжних дробів можуть використовуватися багаторазово.

Відзначимо, що описаний алгоритм можна також застосовувати і у випадку систем із проріdженими тридіагональними матрицями вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & A_{1,k} & & & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ddots & A_{2,k+1} & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & \ddots & & 0 \\ A_{k,1} & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & A_{n-k,n} \\ 0 & A_{k+1,2} & \ddots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n,n-k} & \ddots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Матриці можуть також бути й обрамленими з однієї або двох сторін. Системи з подібним заповненням розпадаються на k систем вигляду (1), кожна з яких матиме порядок n/k.

3. Тестування алгоритмів розв’язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь

Опис тестування функції FC_Three_Diag_Sys

Для перевірки алгоритму розв’язання тридіагональних систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів була використана система рівнянь вигляду

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & ... & -1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Це несиметрична система рівнянь, без діагонального домінування із середнім значенням спектрального числа обумовленості.

Для розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція FC_Three_Diag_Sys. Ця функція реалізує алгоритм розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом ланцюгових дробів і написана за допомогою об’єктно-орієнтованої макромови MatLab.

Для спрощення її можливого використання поданий текст разом з блоком формуванням системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
function [] =FC_Three_Diag_Sys( )
 %  Розв’язування тридіагональних систем лінійних алгебричних рівнянь
 %          Ax=b
 %  за допомогою матричних ланцюгових дробів
    clc
    n=25;
 %  формування тестової системи лінійних рівнянь
     for i=1 : n
         for j=1: n
             A(i,j)=0;
             if (i==j)   A(i,j)=1.5;  end
             if(i==j+1) A(i,j)=-1; end
             if(j==i+1) A(i,j)=1; end
         end
          b(i)=0;
     end;
     b(1)=3;
   %, обчислення X(1) і решти невідомих
    D(n)=A(n,n);
    i=n;
    while (i>1);
        i = i-1;
        D(i)=A(i,i)-A(i+1,i)*A(i,i+1)/D(i+1);
    end;
    x(1)=b(1)/D(1);
    i=1;
    while (i<n)
      i=i+1;
      x(i)=-A(i,i-1)*x(i-1)/D(i);
   end
 x
  end
```

Результати тестування функції FC_Three_Diag_Sys для $n = 25$ скопійовано з вікна MatLab і подано в таблиці.

Значення n	**Значення невідомих** x_i
25	1.5000 0.7500 0.3750 0.1875 0.0938 0.0469 0.0234 0.0117 0.0059 0.0029 0.0015 0.0007 0.0004 0.0002 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000

Нескладна перевірка показує високу точність запропонованого методу розв'язання тридіагональних систем методом ланцюгових дробів.

Опис тестування функції ESSELS

Тут мова піде про розв'язування систем зі стрічковим заповненням. Позначимо через L – кількість наддіагоналей, а через M – кількість піддіагоналей конкретної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. В такому разі обчислення можна проводити, звичайно, і за формулами (2) та (3). Однак з урахуванням характеру заповнення стрічкової матриці їх можна привести до вигляду

$$\left.\begin{aligned} & b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum\limits_{j=1}^{M} a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum\limits_{j=1}^{M} a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad \left(i = \overline{k+1,n}\right); \\ & z_k^{(k)} = b_{k+1,k}, \quad \left(k = \overline{1,n-1}\right); \quad z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^{M} b_{i,s} z_i^{(k)}, \quad \left(s = \overline{k-1,1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} & b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum\limits_{j=1}^{L} a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum\limits_{j=1}^{L} a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad \left(i = \overline{k+1,n}\right); \\ & z_k^{(k)} = b_{k+1,k}, \quad \left(k = \overline{1,n-1}\right); \quad z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^{L} b_{i,s} z_i^{(k)}, \quad \left(s = \overline{k-1,1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

За рекурентними формулами (6) та (7) на деякому k-му кроці обчислюються лише ті $b_{i,j}$ і $b_{j,i}$, для яких існує хоча б один ненульовий елемент $a_{i,j}$ початкової матриці.

Алгоритм дозволяє розв'язати системи рівнянь як у випадку симетричного заповнення (кількість піддіагоналей дорівнює кількості наддіагоналей), так і тоді, коли кількість піддіагоналей та наддігоналей матриці різна.

Для перевірки алгоритму розв'язання стрічкового варіанта алгоритму відсічених систем була використана система рівнянь вигляду

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1+\varepsilon & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1+\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 & 1+\varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon \\ \hline 3+\varepsilon \\ 2+\varepsilon \\ \cdots \\ 2+\varepsilon \\ 2+\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

Легко бачити, що точним розв’язком системи будуть значення $x_i = 1, \ (i = 1,2,...,n)$. Це – несиметрична система рівнянь, без діагонального домінування із значенням спектрального числа обумовленості $V_A = 6.6837e + 010$.

Для розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція ESSELS. Ця функція реалізує алгоритм розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом відсічених систем і написана за допомогою об’єктно-орієнтованої макромови MatLab.

З метою її можливого використання подано текст разом з блоком формування системи лінійних алгебричних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
function [] =Essels( Dimension )
%   << E S S E L S >> – процедура для розв’язання стрічкових систем
%   лінійних алгебричних рівнянь.
%  Написана для MatLab 2010 року за алгоритмом відсічених систем
%  Вхідні параметри:
%  A – двовимірний масив розмірності Nx(LN+1) для зберігання
%  вихідних елементів системи Ax=b;
%  N – кількість невідомих системи;
%  N1– параметр рівний N+1;
%  CountOvDiag - параметр рівний кількості наддіагоналей матриці ;
%  CountUndDiag – параметр рівний кількості наддіагоналей матриці ;
%  B – двохмірний робочий масив розмірності Nx(N+1);
%  Y – одномірний робочий масив довжини N.
%  Формування вхідних даних системи Ax=b
clc
N=70
CountOvDiag=1;
CountUndDiag=2;
N1 =N+1;
Np=1;
Epsilon=0.001;
for i=1 : N
   if(i>1) A(i-1,i)=1.0;end
   if(i<N) A(i+1,i)=1.0; end
   if(i>2)  A(i,i-2)=-1.0; end
   A(i,i)=1.0+Epsilon;
   A(i,N+1)=2+Epsilon;
end
     A(2,N1)=3+Epsilon;
    A(N,N1)=1+Epsilon;
% Власне алгоритм програми
```

```
N1 =N+1;
Np=1;
for i=1 : N
   for j=1: N
      B(i,j)=0.0;
   end
end
for m=1 : N
      if m>1  M1=m-1;end
      if m>2  M2 =m-2; end
       MP1=m+1;
       NKN=m+CountOvDiag;
       if (NKN>=N+1)  NKN=N+1; end
       NKP=m+CountUndDiag;
       if (NKP>=N)     NKP=N;     end
       for i=m : NKP
            P=A(i,m);
            if (m>1)
               if NKP<M1 NM=M1-NKP;else NM=1;end
               for j=NM : M1 P=P-A(i,j)*X(j); end
            end
            B(i,m)=P;
       end
       if(m<N) for i=MP1 : NKP  B(i,m)=B(i,m)/B(m,m); end
       end
       if(m>1) Y(M1)=B(m,M1); end
       if(m>2) for jr=1 : M2  j=m-jr-1; Y(j)=B(m,j); js=j+1;
                    if(js+CountUndDiag<=M1) MKP=js+CountUndDiag; else MKP=M1; end
                    for i=js : MKP  Y(j)=Y(j)-B(i,j)*Y(i); end
          end
       end
       for j=MP1 : N1
           P=A(m,j);
           if (m>1) for i=1:M1 P=P-A(i,j)*Y(i);end
           end
           B(m,j)=P/B(m,m);
       end
       X(m)=B(m,MP1);
       if(m>1) for ir=1 : M1
                   i=m-ir;
                   X(i)=B(i,MP1);
                   is=i+1;
                   if(is+CountOvDiag<=m)  MKN=is+CountOvDiag; else MKN=m;  end
                   for j=is : MKN   X(i)=X(i)-B(i,j)*X(j);  end

          end
       end

end
 cond(A)
  X
end
```

Для порівняння зі штатними програмами лінійної алгебри пакета MatLab була також написана невелика програма MatLab_Band такого змісту:

```
function [] =MatLab_Band( Dimension )
%    процедура для розв'язання стрічкових систем
%    лінійних алгебричних рівнянь засобами MatLab.
%   %   Формування вхідних даних системи Ax=b
clc
N=70
CountOvDiag=1;
CountUndDiag=2;
N1 =N+1;
Np=1;
Epsilon=0.001;
for i=1 : N
   if(i>1) A(i-1,i)=1.0;end
   if(i<N) A(i+1,i)=1.0; end
   if(i>2)  A(i,i-2)=-1.0; end
   A(i,i)=1.0+Epsilon;
   B(i)=2+Epsilon;
end
    B(2)=3+Epsilon;
    B(N)=1+Epsilon;
%  Власне алгоритм програми
 cond(A)
Z=B'\A
end
```

Результати порівняння обох програм наведено в таблиці.

Значення $n = 70$	**Значення невідомих** x_i							
Функція MatLab_Band	0.0106	0.0177	0.0177	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142
	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142
	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142
	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142
	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142
	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142
	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142
	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142	0.0142
	0.0142	0.0142	0.0142	0.0177	0.0177	0.0106		
Функція ESSELS	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000		

Таким чином, запропоновані алгоритми для даної тестової системи середньої розмірності мають суттєві переваги у порівнянні зі стандартними функціями пакета MatLab.

Висновки. Розглянуто новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебричних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Протестовано алгоритми розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебричних рівнянь. Показано ефективність запропонованих алгоритмів.

Запропоновані алгоритми можуть ефективно використовуватися в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних і прикладних задач.

Conclusions. The new approach to the linear algebraic equations with block elements rarefied systems is offered in the work. Calculation of the records amount and operations amount is carried out at the matrixes multiplication of the numerical realization of algorithm. Complexity of algorithm from the point of view of computer algebra is characterized. The suggested algorithm and a block method of prorace comparisons are carried out. The records of the method prorace quantity is counted. The algorithm of some types of rarefied numerical linear algebraic equations solutions are tested. Efficiency of the suggested algorithm is shown. The suggested algorithm can be effectively used in the computer algebra's systems and for the analytic numerical solution of the engineering and applied problems.

Список використаної літератури

1. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры [Текст] / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 303 с.
2. Воеводин, В.В. Линейная алгебра [Текст] / В.В. Воеводин. – С.-П.: Лань, 2008. – 416 с.
3. Воеводин, В. В. Матрицы и вычисления [Текст] / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. Тыртышников, Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра [Текст] / Е.Е. Тыртышников. – М.: Физматлит, 2007. – 480 с.
5. Уилкинсон, Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений [Текст] / Дж.Х. Уилкинсон. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
6. Воеводин, В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах [Текст] / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
7. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц [Текст] / Ф. Р. Гантмахер . – М.: Наука, 1967. – 324 с.
8. Недашковський, М.О. Обчислення з $\lambda-$матрицями [Текст] / М.О. Недашковський, О.Я. Ковальчук. – К.: Наукова думка, 2007. – 294 с.
9. Ашманов, С.А. Линейное программирование [Текст] / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1981. – 340 с.
10. Валях, В.Е. Последовательно-параллельные вычисления [Текст] / В.Е. Валях. – М.: Мир, 1985. – 456 с.
11. Дэвэнпорт Д. Компьютерная алгебра [Текст] / Д. Дэвэнпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. – М.: Мир, 1991. – 352 с.
    1.

Отримано17.10.2013