Й. Лучко. Стаціонарне температурне поле в оболонках з одностороннім багатошаровим покриттям / Й. Лучко, Н. Гембара // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 72. — № 4. — С.266-273. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 536.12: 517.958: 620.198

Й. Лучко[1], докт. техн. наук; Н. Гембара[2]

[1]Львівська філія Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна
[2]Українська академія друкарства

СТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ОБОЛОНКАХ З ОДНОСТОРОННІМ БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ

Резюме. *Запропоновано розрахункову модель для визначення стаціонарного розподілу температури в оболонці довільної форми з одностороннім багатошаровим покриттям. Отримано розв'язок задачі теплопровідності для оболонки з покриттям і закон зміни температури по товщині. Для оболонок обертання відповідну задачу розв'язано у безрозмірних величинах.*

Розглянуто оболонку з одностороннім багатошаровим покриттям, поверхні якої омиваються зовнішніми середовищами з різними температурами. Матеріали оболонки та покриттів мають різні теплофізичні характеристики. На контактних поверхнях оболонки і першого шару покриття та між шарами виконуються умови ідеального теплового контакту. На зовнішніх поверхнях системи оболонка-покриття відбувається теплообмін із середовищами за законом Ньютона.

Як приклад, досліджено стаціонарне температурне поле в циліндричній оболонці з одностороннім чотиришаровим покриттям.

Ключові слова: *теплопровідність, оболонка, багатошарові покриття.*

J. Lucko, N. Hembara

STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN THE SHELL WITH ONE-SIDED MULTI-LAYER COATING

Summary. *In the chemical industry and power engineering steel elements made as thin shells of revolution are widely used. Such constructions while in service may be exposed to power and heat loads, and the influence of different aggressive environments. For protection against high-temperature corrosion and thermal protection multi-layer coatings are applied. The difference between the coefficients of linear expansion of shell and coats creates a complex picture of the stress state, when the temperature changes. Thus, to obtain data on the performance of these structures with coatings it is important to examine the distribution of temperature field through the thickness.*

An arbitrary shell with unilateral multilayer coating, the surface of which is washed by the external environment with different temperatures is being examined. Materials of shell and coatings have different thermo-physical characteristics. On the contact surfaces of the shell and first layer and between layers the conditions of ideal thermal contact are being accepted. On the external surfaces of the shell and the coating there is a heat exchange with the external environment according to Newton's law.

Mathematical model for the solution of stationary heat conduction problem for the shell with unilateral multilayer coating was obtained. This analytical solution is relatively simple and convenient for practical use.

For the shells of revolution corresponding problem is solved in dimensionless terms.

As an example, the stationary temperature field in a cylindrical shell with a unilateral four-layer coating, was investigated. Efficiency and sufficient accuracy of the results of this study were established by comparison with solutions of the same problem obtained by finite element method.

Calculations allow to estimate the value of the maximum possible temperature of the shell and the coating with external thermal influences. It was found that the main parameters of influence on the contact temperature is the thermophysical characteristics of the coating. By the selection of them it is possible to achieve or intensify the of heat transfer through the coating or to increase the insulation ability.

Key words: *heat-conduction, shell, multi-layer coating.*

Постановка проблеми. На даний час у хімічній промисловості й енергетиці широко використовують елементи стальних конструкцій, виготовлених у вигляді тонких оболонок обертання. Оболонки призначаються для збереження газоподібних, рідких та сипучих тіл або їхньої технологічної переробки. Такі конструкції в процесі експлуатації можуть піддаватися впливу силових і теплових навантажень, а також різних агресивних середовищ, які викликають корозію матеріалу. Для захисту від високотемпературної корозії і з метою термозахисту на них наносять багатошарові покриття. Відмінність коефіцієнтів лінійного розширення оболонки та шарів покриття створює складну картину напруженого стану при зміні температури. Тому важливим для отримання даних про роботоздатність таких конструкцій з покриттями є дослідження температурного поля по їх товщині.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Результати досліджень з термомеханіки тонкостінних елементів конструкцій оболонкового типу опубліковані у низці монографій Я.С. Підстригача та його учнів [1 – 4].

Нестаціонарні крайові задачі теплопровідності у точній постановці для покрить довільної товщини розв'язувались або аналітично [5, 6], або на основі чисельних підходів [7, 8].

У роботі [9] досліджено тепловий режим циліндричної і сферичної оболонок із захисним покриттям під дією зовнішніх сталих температурних полів. В роботах [10, 11] наведені методики розв’язання стаціонарних задач теплопровідності кусково-однорідних тіл, які використані у розв’язуванні відповідних задач для порожнистого циліндра скінченої довжини та багатошарової труби. У публікації [12] отримано аналітичний розв’язок нестаціонарної задачі теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям.

У статтях [13, 15] на основі побудованої математичної моделі проведено оптимізацію теплопередавання тонких плит та оболонок з багатошаровими покриттями.

Метою роботи є побудова та реалізація математичної моделі для визначення розподілу температури по товщині в оболонках обертання з одностороннім багатошаровим покриттям.

Матеріали та методика досліджень. Розглянемо тонку оболонку товщиною δ_0, на яку нанесено n тонких покриттів з товщинами $\delta_1, \delta_2, ... \delta_n$ відповідно. Поверхні покриттів паралельні поверхні оболонки. З вільних поверхонь S_0 оболонки і S_n покриття відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона. Оболонку з покриттями віднесено до криволінійних ортогональних координат α, β, γ, де α і β співпадають з лініями головних кривин поверхні S_0, а γ напрямлена по нормалі до поверхні S_0.

Розподіл температури $t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$ в такій системі описується рівнянням [1]

$$\frac{\partial H_\beta q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_\alpha q_2}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(H_\alpha H_\beta q_n\right) = -cH_\alpha H_\beta \frac{\partial t}{\partial \tau}, \tag{1}$$

де q_1, q_2, q_n – компоненти вектора густини теплового потоку

$$q_1 = -\frac{\lambda_1}{H_\alpha}\frac{\partial t}{\partial \alpha},\ q_2 = -\frac{\lambda_2}{H_\beta}\frac{\partial t}{\partial \beta},\ q_n = -\lambda_3 \frac{\partial t}{\partial \gamma}, \tag{2}$$

$$H_\alpha = A(1 + k_1\gamma),\ H_\beta = B(1 + k_2\gamma), \tag{3}$$

A, B – коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні S_0; k_1 і k_2 – головні кривини поверхні S_0; $\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалів оболонки і покриттів у напрямках α, β, γ відповідно; c – питома теплоємність матеріалу; τ – час.

Розглянемо стаціонарний розподіл температури в системі оболонка – покриття, коли тепло із середовища з температурою t_0^c передається в середовище з температурою t_n^c через поверхню S_n покриття ($t_0^c > t_n^c$).

Тоді стаціонарна задача теплопровідності зводиться до розв’язання рівняння

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(A\cdot B(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)q_n\right)=0 \tag{4}$$

за граничних умов

$$\begin{aligned}
&-\lambda_0\frac{\partial t_0}{\partial\gamma}+\mu_0(t_0^c-t_{0c})=0 \quad \text{при } \gamma=0;\\
&t_{01}=t_{10};\quad \lambda_0\frac{\partial t_0}{\partial\gamma}=\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial\gamma} \quad \text{при } \gamma=\delta_0;\\
&t_{12}=t_{21};\quad \lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial\gamma}=\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial\gamma} \quad \text{при } \gamma=\delta_0+\delta_1;\\
&t_{n-1,n}=t_{n,n-1};\quad \lambda_{n-1}\frac{\partial t_{n-1}}{\partial\gamma}=\lambda_n\frac{\partial t_n}{\partial\gamma} \quad \text{при } \gamma=\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i;\\
&\lambda_n\frac{\partial t_n}{\partial\gamma}=\mu_n(t_n^c-t_{nc}) \quad \text{при } \gamma=\sum_{i=0}^{n}\delta_i.
\end{aligned} \tag{5}$$

З рівняння (4) маємо

$$A\cdot B\cdot(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)q_n=C_1,$$

$$q_n=-\lambda\frac{\partial t}{\partial\gamma}=\frac{C_1}{A\cdot B(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)}, \tag{6}$$

де C_1 – стала інтегрування. Тут і далі опущено індекс «3» при λ_{3i}.

З (6) визначаємо:

$$\frac{\partial t}{\partial\gamma}=\frac{C_1}{\lambda\cdot A\cdot B}\cdot\frac{1}{(1+k_1\gamma)\cdot(1+k_2\gamma)},$$

звідки

$$t=-\frac{C_1}{\lambda\cdot A\cdot B}\cdot\frac{1}{k_1-k_2}\ln\frac{(1+k_1\gamma)}{(1+k_2\gamma)}+C_2. \tag{7}$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначено з граничних умов та умов ідеального теплового контакту між поверхнями.

Температурне поле в оболонці та покриттях визначається формулами [19]

$$\begin{aligned}
t_0&=\frac{C_{10}}{\lambda_0 A\cdot B}\cdot\frac{1}{k_2-k_1}\ln\frac{(1+k_2\gamma)}{(1+k_1\gamma)}+C_{20} \quad \text{для } 0\le\gamma\le\delta_0,\\
t_1&=\frac{C_{11}}{\lambda_1 A\cdot B}\cdot\frac{1}{k_2-k_1}\ln\frac{(1+k_2\gamma)}{(1+k_1\gamma)}+C_{21} \quad \text{для } \delta_0\le\gamma\le\delta_0+\delta_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_n&=\frac{C_{1n}}{\lambda_n A\cdot B}\cdot\frac{1}{k_2-k_1}\ln\frac{(1+k_2\gamma)}{(1+k_1\gamma)}+C_{2n} \quad \text{для } \sum_{i=0}^{n-1}\delta_i\le\gamma\le\sum_{i=0}^{n}\delta_i.
\end{aligned} \tag{8}$$

Для сталих інтегрування отримали співвідношення

$$C_{10}=C_{11}=\ldots=C_{1n}=C_1\cdot A\cdot B, \tag{9}$$

де

$$C_1=k\cdot(t_0^c-t_n^c)=\frac{1}{R}(t_0^c-t_n^c); \tag{10}$$

k – коефіцієнт теплопередачі; R – повний термічний опір оболонки з покриттям:

$$R=\frac{1}{k}=\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{k_1-k_2}\left[\frac{1}{\lambda_0}\ln\frac{1+k_1\delta_0}{1+k_2\delta_0}+\frac{1}{\lambda_1}\ln\left(\frac{1+k_1(\delta_0+\delta_1)}{1+k_2(\delta_0+\delta_1)}\cdot\frac{1+k_2\delta_0}{1+k_1\delta_0}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_2}\ln\left(\frac{1+k_1(\delta_0+\delta_1+\delta_2)}{1+k_2(\delta_0+\delta_1+\delta_2)}\cdot\frac{1+k_2(\delta_0+\delta_1)}{1+k_1(\delta_0+\delta_1)}\right)+\frac{1}{\lambda_n}\ln\left(\frac{1+k_1\cdot\sum_0^n\delta_i}{1+k_2\cdot\sum_0^n\delta_i}\cdot\frac{1+k_2\cdot\sum_0^{n-1}\delta_i}{1+k_1\cdot\sum_0^{n-1}\delta_i}\right)\right]+ \qquad (11)$$

$$+\frac{1}{\mu_n}\cdot\frac{1}{(1+k_1\cdot\sum_0^n\delta_i)\cdot(1+k_2\cdot\sum_0^n\delta_i)}.$$

Стала C_1 має зміст лінійного потоку тепла. Для сталих інтегрування C_{2i} $(i=0,\dots n)$ отримуємо співвідношення

$$C_{20}=t_0^c-\frac{1}{\mu_0\cdot R}(t_0^c-t_n^c),$$

$$C_{21}=C_{20}+\frac{(t_0^c-t_n^c)}{R(k_2-k_1)}\cdot\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_1}\right)\ln\frac{1+k_2\delta_0}{1+k_1\delta_0},$$

$$C_{22}=C_{21}+\frac{(t_0^c-t_n^c)}{R(k_2-k_1)}\cdot\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\ln\frac{1+k_2(\delta_0+\delta_1)}{1+k_1(\delta_0+\delta_1)}, \qquad (12)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_{2n}=C_{2,n-1}+\frac{(t_0^c-t_n^c)}{R(k_2-k_1)}\cdot\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}}-\frac{1}{\lambda_n}\right)\ln\frac{1+k_2\sum_0^{n-1}\delta_i}{1+k_1\sum_0^{n-1}\delta_i}.$$

Підставляючи (9) – (12) у (8), отримуємо розв'язок задачі теплопровідності для оболонки з покриттями і закон зміни температури по товщині.

Стаціонарне температурне поле в оболонках обертання з одностороннім багатошаровим покриттям. Під оболонкою обертання розуміємо оболонку, серединна поверхня якої є поверхнею обертання. Розглянемо розподіл тепла в оболонці обертання радіуса r_0, на зовнішню поверхню якої нанесено багатошарове покриття.

Для запису основних співвідношень досліджуваної задачі в безрозмірних величинах введемо такі позначення:

– для циліндричної оболонки: $A=1$; $B=r_0$; $k_1=0$; $k_2=1/r_0$;

$\rho=\dfrac{\gamma}{r_0}$ – безрозмірна радіальна координата; $\mathrm{Bi_i}=\dfrac{r_0}{R\lambda_i}$ – тепловий критерій Біо; $\xi_i=\dfrac{\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i}{r_0}$ – безрозмірна товщина покриття; $h=\dfrac{1}{\mu_0 R}$; $\Theta_n=\dfrac{t_n-t_0^c}{t_0^c-t_n^c}$;

– для конічної оболонки: $\mathrm{A}=1$; $B=l\cos\varphi$; $k_1=0$; $k_2=tg\varphi/l$, де l –відстань від вершини конуса вздовж твірної; φ – кут між віссю конуса і головним радіусом кривизни поверхні; $\rho=\dfrac{\gamma tg\varphi}{l}$ – безрозмірна радіальна координата; $Bi_i=\dfrac{l}{R\lambda_i tg\varphi}$ –

тепловий критерій Біо; $\xi_i = \dfrac{\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i}{l} tg\varphi$ – безрозмірна товщина покриття; $h = \dfrac{1}{\mu_0 R}$;

$\Theta_n = \dfrac{t_n - t_0^c}{t_0^c - t_n^c}$;

– для сферичної оболонки: $A = r_0$; $B = r_0 \sin\psi$; $k_1 = k_2 = 1/r_0$, де ψ – кут широти;

$\rho = \dfrac{\gamma}{r_0}$ – безрозмірна радіальна координата; $\mathrm{Bi_i} = \dfrac{r_0}{R\lambda_i}$ – тепловий критерій Біо;

$\xi_i = \dfrac{\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i}{r_0}$ – безрозмірна товщина покриття; $h = \dfrac{1}{\mu_0 R}$; $\Theta_n = \dfrac{t_n - t_0^c}{t_0^c - t_n^c}$.

Враховуючи введені безрозмірні позначення, зі співвідношень (8) – (12) отримали розв’язок стаціонарної задачі теплопровідності для оболонок обертання з багатошаровими покриттями

$$\Theta_0 = Bi_0 \ln\frac{1}{1+\rho} - h,$$

$$\Theta_i = Bi_\mathrm{i} \ln\frac{1}{1+\rho} - h + \sum_{j=1}^{i}\left(Bi_{j-1} + Bi_j\right)\ln\frac{1}{1+\xi_i}, \quad i = 1,...n. \tag{13}$$

Його ефективність і достатню точність встановлено порівнянням із розв’язком цієї задачі для випадку циліндричної оболонки з чотиришаровим покриттям, отриманим методом скінченних елементів.

Числові результати та їх аналіз. На рис. 1 – 3 показано розподіл температури по товщині оболонки з покриттям залежно від параметра Bi_i (рис. 1) для різних випадків товщини оболонки (рис. 2) та різних товщин покриття за сталої товщини оболонки (рис. 3).

Ці графіки дозволяють оцінити величину максимально можливої температури оболонки і шарів покриття при зовнішніх теплових впливах. Зі збільшенням товщини покриття та зі зменшенням його теплопровідності зростає його термоізолююча здатність. Як бачимо, при більших значеннях Bi_i розподіл температури вздовж товщини покриття більше відхиляється від рівномірного.

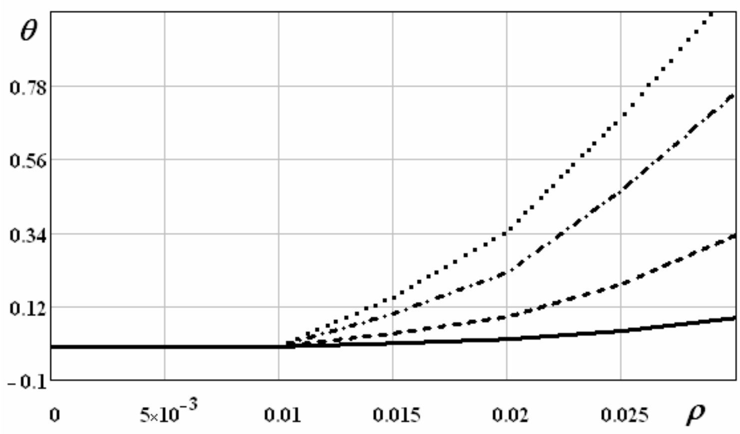

Рисунок 1. Стаціонарний розподіл температури вздовж товщини оболонки обертання з чотиришаровим покриттям залежно від параметра Біо Bi_i:
суцільна лінія – Bi_i=(2·10^{-4}; 2; 2,5; 5; 8); штрихова лінія – Bi_i=(2·10^{-4}; 8; 10; 20; 30);
штрих-пунктирна лінія – Bi_i= (2·10^{-4}; 20; 25; 50; 60); точки – Bi_i=(2·10^{-4}; 30; 45; 70; 80)

Figure 1. Stationary temperature distribution along the thickness of the shell of rotation with a four-layer coating depending on the parameter Bio Bi_i:
solid line - Bi_i=($2\cdot10^{-4}$; 2; 2,5; 5; 8); dash line - Bi_i=($2\cdot10^{-4}$; 8; 10; 20; 30);
dash-dotted line - Bi_i= ($2\cdot10^{-4}$; 20; 25; 50; 60); points - Bi_i=($2\cdot10^{-4}$; 30; 45; 70; 80)

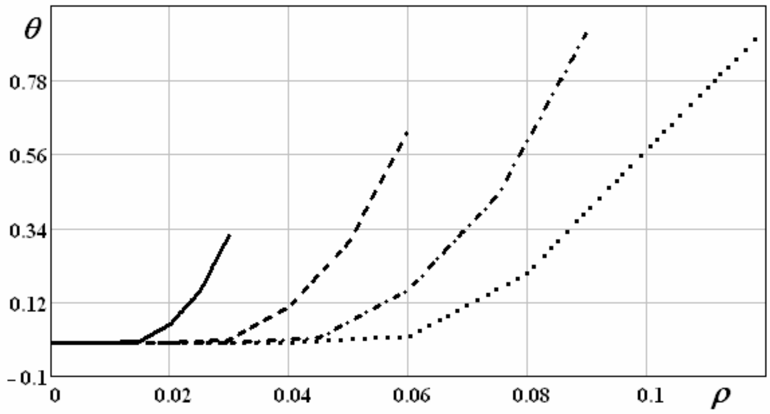

Рисунок 2. Стаціонарний розподіл температури вздовж товщини оболонки обертання з чотиришаровим покриттям залежно від безрозмірної товщини оболонки з покриттям ξ_i:
суцільна лінія – ξ_i = (0,01; 0,015; 0,02; 0,025; 0,03); штрихова лінія – $\xi_i = 2\xi_i$;
штрих-пунктирна лінія – $\xi_i = 3\xi_i$; точки – $\xi_i = 4\xi_i$

Figure 2. Stationary temperature distribution along the thickness of the shell of rotation with a four-layer coating depending on the dimensionless thickness of the shell with coating ξ_i:
solid line - ξ_i = (0,01; 0,015; 0,02; 0,025; 0,03); dash line – $\xi_i = 2\xi_i$;
dash-dotted line - $\xi_i = 3\xi_i$; points – $\xi_i = 4\xi_i$

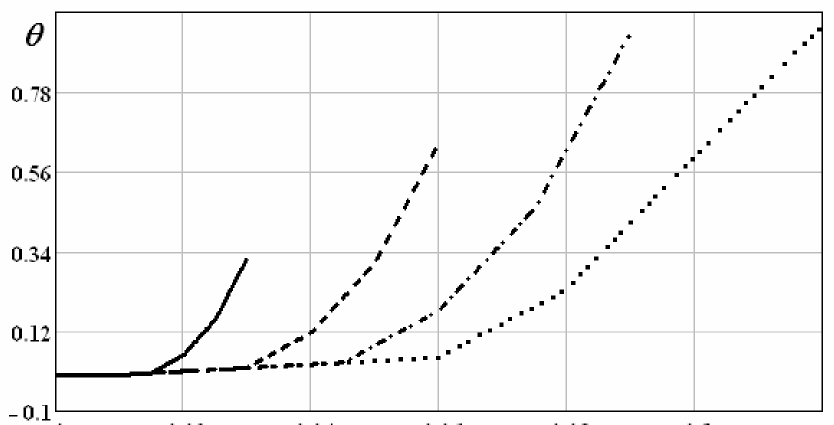

Рисунок 3. Стаціонарний розподіл температури вздовж товщини оболонки обертання з чотиришаровим покриттям залежно від безрозмірної товщини покриття за сталої товщини оболонки ξ_i: суцільна лінія – ξ_i = (0,01; 0,015; 0,02; 0,025; 0,03); штрихова лінія – $\xi_i = 2\xi_i$;
штрих-пунктирна лінія – $\xi_i = 3\xi_i$; точки – $\xi_i = 4\xi_i$

Figure 3. Stationary temperature distribution along the thickness of the shell of rotation with a four-layer coating depending on the dimensionless thickness of the coating at constant thickness of the shell ξ_i: solid line - ξ_i = (0,01; 0,015; 0,02; 0,025; 0,03); dash line - $\xi_i = 2\xi_i$;
dash-dotted line – $\xi_i = 3\xi_i$; points – $\xi_i = 4\xi_i$

Висновки. Отриманий замкнений аналітичний розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності оболонок з покриттями є відносно простим і зручним для практичного використання та враховує перепад температури за товщиною покриття, що є суттєвим для подальшого розрахунку термонапруженого стану в оболонках з багатошаровими покриттями.

У результаті проведеного дослідження встановлено, що визначальними параметрами впливу на контактну температуру є теплофізичні характеристики покриття. Добираючи їх відповідним чином, можна домогтися або інтенсифікації процесу теплопереносу через покриття, або підвищити його термоізолюючу здатність.

Conclusions. The analytical solution of the stationary problem of the heat conductivity shells with coatings is relatively simple and convenient for practical use. The temperature distribution through the thickness of the coating was found. It is important for the subsequent calculation of the stress state in the shells with the multilayer coatings. It was found that the main parameters of influence on the contact temperature is the thermophysical characteristics of the coating. By the selection of them it is possible to achieve or intensify the heat transfer through the coating or to increase the insulation ability.

Список використаної літератури

1. Підстригач Я.С. Температурні напруження в оболонках / Я.С. Підстригач, С.Я. Ярема. – К.: Видавництво АН УРСР, 1961. – 212 с.
2. Подстригач Я.С. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями / Я.С. Подстригач, П.Р. Шевчук // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227 – 233.
3. Підстригач Я.С. Вибрані праці / Я.С. Підстригач. – К.: Наукова думка, 1995. – 460 с.
4. Григолюк Э.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак. – К.: Наук. думка, 1979. – 364 с.
5. Кушнір Р.М. Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну / Р.М. Кушнір, Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 38, № 6. – С. 31 – 38.

Те саме: Kushnir R.M. Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange / R.M. Kushnir, B.V. Protsyuk, V.M. Synyuta // Mater. Sci. – 2002. – 38, No. 6. – P. 798 – 808.

6. Ляшенко Б.А. Распределение температур в пластине с однослойным покрытием при интенсивном нагреве / Б.А. Ляшенко, В.А. Терлецкий, Я.А. Долгов, Е.Б. Сорока // Проблемы прочности. – 1998. – № 3. – С. 128 – 133.
7. Веселовский В.Б. Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях / В.Б. Веселовский. – Днепропетровск: Вид-во Дніпро-петр. ун-ту, 2002. – 436 с.
8. Sarikaya O. Finite element modeling of the effect of the ceramic coatings on heat transfer characteristics in thermal barrier applications / O. Sarikaya, Y. Islamoglu, E.C. Celik // Mater. and Design. – 2005. – 26. – P. 357 – 362.
9. Максимук О. Вплив захисного покриття на тепловий режим обмежених об'ємів / О. Максимук, Я. Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. – 2002. – Вип. 4. – С. 126 – 130.
10. Попович В.С. Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні / В.С. Попович, Г.Ю. Гарматій. – Львів. – 1993. – 66 с.
11. Попович В.С. Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл / В.С. Попович, І.М. Махоркін // Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 36 – 44.
12. Шевчук В.А. Нестаціонарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям / В.А. Шевчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 2. – С. 179 – 185.
13. Гембара Н.О. Оптимізація теплопровідності циліндричної оболонки з покриттям / Н.О. Гембара // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. Збірник наукових праць. – 2006. – Вип.8. – С. 13 – 16.
14. Лучко Й.Й. Оптимізація теплопровідності пластин з багатошаровим покриттям / Й.Й. Лучко, Н.О. Гембара, В.М. Гембара // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. – 2007. – Вип. 7. – С. 52 – 56.
15. Лучко Й.Й. Оптимізація теплопередачі тонких оболонок з одностороннім багатошаровим покриттям / Й.Й. Лучко, Н.О. Гембара, В.М. Гембара // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. – 2012. – Вип. 9. – С. 43 – 49.

Отримано 10.08.2013