

УДК 519.63.001.57

А. Бомба<sup>1</sup>, докт. техн. наук; О. Гладка<sup>2</sup>;  
А. Кузьменко<sup>3</sup>, канд. фіз.-мат. наук

<sup>1</sup>Рівненський державний гуманітарний університет

<sup>2</sup>Національний університет водного господарства та природокористування

<sup>3</sup>Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. С. Дем'янука

## МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ Й СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ СВЕРДЛОВИН У ДВОЯКО- ШАРУВАТОМУ НАФТОГАЗОВОМУ ПЛАСТІ

**Резюме.** На основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами у поєднанні з декомпозицією області за методом Шварца розроблено конструктивний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач для тризв'язних двояко-шаруватих криволінійних областей, обмежених двома екіпотенціальними лініями і непроникним контуром, що моделюють процеси витіснення (фільтрації), породжені системою двох свердловин (нагінальною та експлуатаційною) в елементі шарувато-неоднорідного нафтогазового пласта за геологічно складних умов. Створено відповідну обчислювальну технологію, що автоматично вирішує проблему вибору вузлів та побудови динамічної сітки, знаходження невідомих ліній розділу ділянок сталості коефіцієнта провідності середовища, розрахунку поля швидкості та обчислення інших характерних параметрів процесу.

**Ключові слова:** квазіконформні («кусково-конформні») відображення, комплексний квазіпотенціал, метод сумарних зображень, декомпозиція області, альтернуючий метод Шварца, двояко-шарувате середовище, нафтогазовий пласт.

А. Bomba, O. Hladka, A. Kuzmenko

## METHODS OF COMPLEX ANALYSIS AND SUMMARY REPRESENTATIONS MODELING NONLINEAR PROCESSES DISPLACEMENT FOR THE SYSTEM OF TWO WELLS IN DOUBLY- LAYERED RESERVOIR OF OIL AND GAS

**Summary.** The constructive approach to solving of nonlinear boundary value problems for triple-connected doubly-layered curvilinear domain bounded by two equipotential lines and impermeable contour was developed on the basis of syntheses of the numeric methods of quasiconformal mappings and summary representations methods for differential equations with discontinuous coefficients together with the domain decomposition according to the Schwarz method has been developed. Such problems arise in modeling of the processes of displacement (filtration) that are generated by system of two wells (delivery and exploitational) in the element layered inhomogeneous oil and gas reservoir in geologically complex conditions, such as in the case of compacted (shale) layer with cracks fracturing in the area near the wells. The coefficient of the medium conductivity is given as a piecewise-constant function, that is dependent from the searched quasipotential and function of flow, with unknown line dividing layers (lines gap conductance coefficient) which are along the searched equipotential lines and flow lines and are in the process of solving the problem.

The computing technology that automatically solves the problem of choice of nodes and building of a dynamic grid, finding of the unknown dividing lines of areas constancy coefficient of conductivity the medium, the calculation of the velocity field and other characteristic parameters of the process has been created. Using the alternating Schwarz method for domain decomposition along layers with constant conductivity coefficient enables to find efficiently the continuous solutions of boundary value problems with discontinuous coefficients, and the solve problems in more «comfortable» subdomain than the entire domain of the original problem, to

*make the computational process parallel, since the calculations in subdomain at each iteration step are independent of each other and can be performed in parallel using modern computer technology.*

**Key words:** *quasiconformal («piecewise-conformal») mappings, complex quasipotential, summary representations method, domain decomposition, alternating Schwarz method, doubly-layered medium, reservoir of oil and gas.*

**Постановка проблеми.** У наш час залишаються актуальними проблеми створення якісних обчислювальних технологій для розрахунків основних кількісних характеристик процесів руху, зокрема рідин і газів у пористому пласті тощо. Не зважаючи на велику кількість розробок у цьому напрямку, існують певні класи задач, для яких використання відомих методів є недостатнім. Автори запропонували (див., напр. [1, 2]) новий конструктивний підхід до моделювання квазіідеальних полів для одно- та двозв'язних криволінійних областей, обмежених лініями течії й екіпотенціальними лініями, на основі синтезу числових методів комплексного аналізу [3, 4] та сумарних зображень [5, 6]. Використання методів сумарних зображень як компоненти раніше розроблених обчислювальних процедур (на базі комплексного аналізу) дозволяє суттєво підвищити ефективність запропонованого алгоритму, оскільки дає можливість у комплексі (сумарно) враховувати вплив усіх граничних і внутрішніх вузлів, що пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У попередніх роботах авторів розроблено обчислювальні технології розв'язання нелінійних модельних задач для двозв'язних криволінійних шаруватих областей, у яких провідність середовища задається як кусково-стала функція, залежна від шуканого квазіпотенціалу, а також задач, котрі моделюють процеси витіснення вуглеводнів із ущільнених (сланцевих) пластів з гідророзривами, де має місце суттєво різна проникність середовища вздовж відповідних ліній течії, що базуються на поєднанні числових методів квазіконформних («кусково-конформних») відображень [4], формул сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами в шарувато-неоднорідних середовищах з вертикальними та горизонтальними лініями розділу [7, 8] і альтернуючого методу Шварца [9]. Застосування альтернуючого методу Шварца для декомпозиції області по прошарках (ділянках з «накладками») сталості коефіцієнта провідності дає змогу ефективно знаходити неперервні розв'язки задач з розривними коефіцієнтами, розв'язувати задачі у більш «зручних» підобластях, аніж уся область вихідної задачі, розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних технологій.

**Метою даної роботи** є поширення запропонованого підходу на розв'язання нелінійних крайових задач для трив'язних обмежених екіпотенціальними лініями і непроникним контуром областей – математичних моделей стаціонарного процесу руху речовини у двояко-шаруватих середовищах [10], провідність яких задається кусково-сталими функціями, залежними і від шуканого потенціалу, і від функції течії, з невідомими лініями розділу шарів (лініями розриву коефіцієнта провідності), що проходять уздовж ділянок шуканих екіпотенціалей та ліній течії і знаходяться в процесі розв'язання задачі. Такі задачі виникають при моделюванні процесів витіснення (фільтрації), що породжені системою двох свердловин (нагнітальною та експлуатаційною) в елементі шарувато-неоднорідного нафтогазового пласта за геологічно складних умов, наприклад, у випадку ущільнених (сланцевих) пластів з тріщинами гідророзриву у присвердловинній зоні.

**Постановка задачі.** Розглянемо стаціонарний процес витіснення, породжений взаємодією нагнітальної та експлуатаційної свердловин в елементі нафтогазового пласта, де для спрощення викладок вважатимемо, що витісняюча речовина і речовина,

що видобувається, мають однакові фізичні та механічні властивості. Цей процес описуватимемо рівнянням руху  $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi$  (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності  $\text{div } \vec{v} = 0$  [3], де  $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$  – швидкість руху;  $\varphi$  – квазіпотенціал швидкості;  $\kappa = \kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))$  – коефіцієнт провідності середовища – кусково-стала функція із розривами вздовж ділянок шуканих еквіпотенціалей і ліній течії;  $\psi = \psi(x, y)$  – функція течії, комплексно спряжена до  $\varphi$  [1–4].

Область фільтрації визначимо як тризв'язну криволінійну область  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), що обмежена непроникним зовнішнім контуром  $L = \{z : f(x, y) = 0\}$  і двома внутрішніми контурами свердловин – еквіпотенціальними лініями  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$  і  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$ , на яких задані умови  $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$ ,  $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$  (див. рис.1).

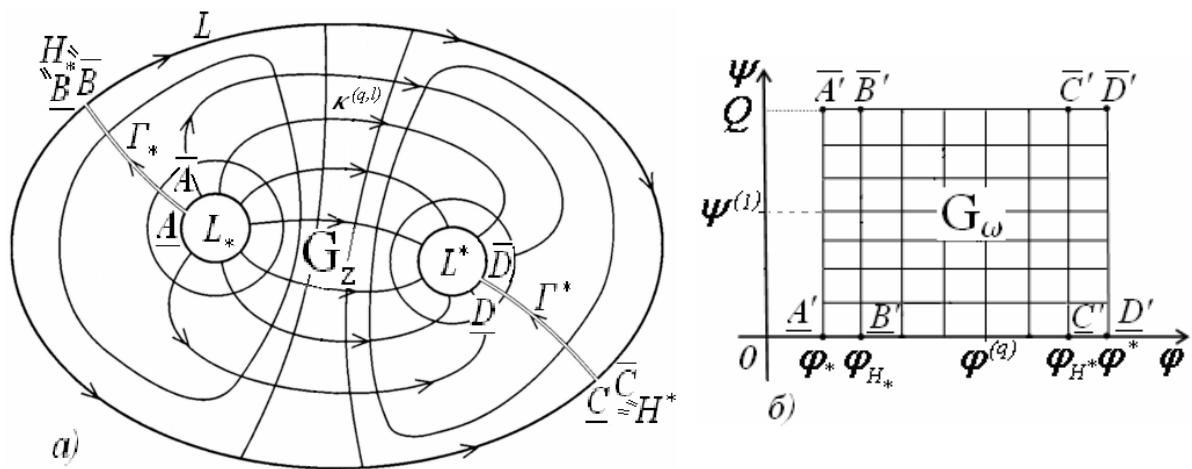


Рисунок 1. Схема області фільтрації (а) та відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу (б)

Figure 1. Scheme of filtration domain (a) and the corresponding domain of complex quasipotential (б)

Коефіцієнт провідності  $\kappa$  з метою моделювання двояко-шаруватого середовища задамо таким чином:

$$\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = \kappa^{(q,l)} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*, & q = \overline{1, s_1}, \\ 0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} \leq Q, & l = \overline{1, s_2}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\kappa^{(q,l)}$  – деякі додатні числа.

Використовуючи методи комплексного аналізу, аналогічно до [4], задачу на побудову динамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати, поля швидкостей та інших характерних фільтраційних параметрів зводимо до задачі на квазіконформне («кусково-конформне») відображення заданої криволінійної фізичної області на прямокутну область комплексного квазіпотенціалу. При цьому, для однозначної побудови такого відображення, на відміну від двозв'язних областей, де умовний розріз робився вздовж вибраної лінії течії (будь-якої!) й існування та єдиність розв'язку задачі забезпечувалися знаходженням у невідомій висоти прямокутника  $Q$  – повної витрати (поток через граничну еквіпотенціальну лінію), у випадку описаної вище тризв'язної області необхідно здійснити два умовні розрізи  $\Gamma_*$  і  $\Gamma^*$  області  $G_z$  уздовж таких ліній

течії (ліній розділення течії), що однозначно визначаються точками «призупинки» потоку  $H_* = \overline{B} = \underline{B} = (x_*, y_*) \in L$  і  $H^* = \overline{C} = \underline{C} = (x^*, y^*) \in L$  (див. рис.1).

Задачу квазіконформного відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  однозв'язної області  $G_z^\Gamma = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$  на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \left( \bigcup_{q=1, l=1}^{s_1, s_2} G_\omega^{(q, l)} \right) \cup \left( \bigcup_{q=1}^{s_1} L_{\omega^*}^{(q)} \right) \cup \left( \bigcup_{l=1}^{s_2} L_{\omega 0}^{(l)} \right)$ ,  
 $G_\omega^{(q, l)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi^{(q-1)} < \varphi < \varphi^{(q)}, \psi^{(l-1)} < \psi < \psi^{(l)}\}$ ,  $L_{\omega^*}^{(q)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(q)}\}$ ,  
 $L_{\omega 0}^{(l)} = \{\omega \in G_\omega : \psi = \psi^{(l)}\}$  з трьома невідомими параметрами – фільтраційною витратою  $Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$  і координатами точок  $H_*$  та  $H^*$  – запишемо у вигляді [3, 4]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^\Gamma; \\ \varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{\underline{AD}} = 0, \quad \psi|_{\overline{AD}} = \oint_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, \\ v(x_*, y_*) = 0, \quad v(x^*, y^*) = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

де  $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$ .

Обернена до (2) крайова задача на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z^\Gamma$  для заданого  $\kappa$  (1) при невідомій витраті  $Q$  та умовних розрізах  $\Gamma_*$ ,  $\Gamma^*$  має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ f(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad f(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \varphi_{H_*}, \quad \varphi_{H^*} \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ v(x(\varphi_{H_*}, 0), y(\varphi_{H_*}, 0)) = 0, \quad v(x(\varphi_{H_*}, Q), y(\varphi_{H_*}, Q)) = 0, \\ v(x(\varphi_{H^*}, 0), y(\varphi_{H^*}, 0)) = 0, \quad v(x(\varphi_{H^*}, Q), y(\varphi_{H^*}, Q)) = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

а, з урахуванням диференціальних рівнянь для дійсної  $x = x(\varphi, \psi)$  та уявної  $y = y(\varphi, \psi)$  частин характеристичної функції течії (виконання яких вимагатимемо і на розрізах для врахування їх «роздвоєння» при переході від області  $G_z$  до  $G_\omega$ ) і формул для

обчислення компонент швидкості  $v_x = \frac{\kappa}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}$ ,  $v_y = -\frac{\kappa}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}$

( $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$  – якобіан переходу), є еквівалентною задачі [4]

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\kappa(x(\phi, \psi), y(\phi, \psi))} \frac{\partial x}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa(x(\phi, \psi), y(\phi, \psi)) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\kappa(x(\phi, \psi), y(\phi, \psi))} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa(x(\phi, \psi), y(\phi, \psi)) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad (\phi, \psi) \in G_{\omega}, \\ & f_*(x(\phi_*, \psi), y(\phi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\phi^*, \psi), y(\phi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ & f(x(\phi, 0), y(\phi, 0)) = 0, \quad f(x(\phi, Q), y(\phi, Q)) = 0, \quad \phi_* \leq \phi \leq \phi^*, \\ & x(\phi, 0) = x(\phi, Q), \quad y(\phi, 0) = y(\phi, Q), \quad \phi_* < \phi \leq \phi_{H_*}, \quad \phi_{H^*} \leq \phi \leq \phi^*, \\ & \left. \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \right|_{\phi=\phi_*} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \right|_{\phi=\phi^*} = 0, \\ & \left( \frac{\kappa(x(\phi, \psi), y(\phi, \psi))}{J(\phi, \psi)} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi}} \right) = 0, \quad \phi = \phi_{H_*}, \phi_{H^*}, \quad \psi = 0, Q, \\ & Q = \int_0^Q \frac{\kappa(x(\phi, \psi), y(\phi, \psi))}{J(\phi, \psi)} \left( \frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi} \right) d\psi, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

де  $\phi_{H_*}, \phi_{H^*}$  – значення квазіпотенціалу в шуканих точках «призупинки» потоку  $H_*$  і  $H^*$  відповідно.

Умови спряження вздовж шуканих еквіпотенціальних ліній  $L_*^{(q)}$  і ліній течії  $L_0^{(l)}$ , що є лініями розриву функції  $\kappa$ , мають вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} & [x]_{L_*^{(q)}} = [x]_{L_0^{(l)}} = 0, \quad [y]_{L_*^{(q)}} = [y]_{L_0^{(l)}} = 0, \\ & \left[ \kappa \frac{\partial x}{\partial \phi} \right]_{L_*^{(q)}} = \left[ \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right]_{L_0^{(l)}} = 0, \quad \left[ \kappa \frac{\partial y}{\partial \phi} \right]_{L_*^{(q)}} = \left[ \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right]_{L_0^{(l)}} = 0, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

де  $[f]$  – стрибок функції  $f$  при переході через відповідну лінію (по нормалі).

**Різницьвий аналог задачі.** Для знаходження розв'язків нелінійної задачі (4) – (5) в області комплексного квазіпотенціалу конструємо ортогональну сітку і замінюємо  $G_{\omega}$  сітковою областю  $G_{\omega}^z = \{(\phi_i, \psi_j)\}$ :

$$\left. \begin{aligned} & \phi_i = \phi_* + \Delta_{\phi 1} \cdot i, \quad \Delta_{\phi 1} = \frac{\phi_{H_*} - \phi_*}{m_1 + 1}, \quad i = \overline{0, m_1}, \\ & \phi_i = \phi_{H_*} + \Delta_{\phi 2} \cdot (i - m_1), \quad \Delta_{\phi 2} = \frac{\phi_{H^*} - \phi_{H_*}}{m_2 - m_1 - 1}, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad \phi_i = \phi_{H^*} + \Delta_{\phi 3} \cdot (i - m_2), \\ & \Delta_{\phi 3} = \frac{\phi^* - \phi_{H^*}}{m - m_2}, \quad i = \overline{m_2 + 1, m + 1}, \quad \phi^{(q)} = \phi_{m^{(q)}}, \quad q = \overline{1, s_1}, \quad 0 \leq m^{(1)} < m^{(2)} < \dots < m^{(s_1)} \leq m, \\ & \psi_j = \Delta_{\psi} \cdot j, \quad j = \overline{0, n + 1}, \quad \psi^{(l)} = \psi_{n^{(l)}}, \quad l = \overline{1, s_2}, \quad 0 \leq n^{(1)} < n^{(2)} < \dots < n^{(s_2)} \leq n, \quad \Delta_{\psi} = \frac{Q}{n + 1} \end{aligned} \right\},$$

крайові умови, умови періодичності на розрізах і умови ортогональності ліній динамічної сітки до відповідних ділянок границі фізичної області – скінченно-різницькими аналогами [4]

$$\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, & j = \overline{0, n+1}, \\ f(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, & f(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, & i = \overline{m_1+1, m_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,n+1}, & y_{i,0} = y_{i,n+1}, & i = \overline{0, m_1}, \quad i = \overline{m_2+1, m+1}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{m,j} + x_{m-2,j} - 4x_{m-1,j})(x_{m,j+1} - x_{m,j-1}) + (3y_{m,j} + y_{m-2,j} - 4y_{m-1,j})(y_{m,j+1} - y_{m,j-1}) = 0, & j = \overline{1, n}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,n} + x_{i,n-2} - 4x_{i,n-1})(x_{i+1,n} - x_{i-1,n}) + (3y_{i,n} + y_{i,n-2} - 4y_{i,n-1})(y_{i+1,n} - y_{i-1,n}) = 0, & i = \overline{m_1+1, m_2}, \end{cases} \quad (7)$$

де  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ .

Величини квазіконформних інваріантів  $\gamma_\sigma = \frac{\Delta_{\varphi\sigma}}{\Delta_\psi}$ ,  $\sigma = \overline{1,3}$  отримуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей таким чином:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{(m_1+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m_1-1,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i,j}}, & \gamma_2 &= \frac{1}{(m_2-m_1-1)(n+1)} \sum_{i=m_1+1,j=0}^{m_2-1,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i,j}} \\ \gamma_3 &= \frac{1}{(m-m_2)(n+1)} \sum_{i=m_2+1,j=0}^{m,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i,j}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})^2}}, \quad \kappa_{i,j} = \kappa(\varphi_i, \psi_j).$$

Невідому фільтраційну витрату  $Q$  та значення квазіпотенціалу  $\varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$  у точках «призупинки» потоку шукаємо в процесі ітераційних розрахунків за формулами

$$Q = \frac{(n+1)}{3} \sum_{\sigma=1}^3 \frac{\Delta_{\varphi\sigma}}{\gamma_\sigma}, \quad \varphi_{H^*} = \varphi^* + m_1 \Delta_{\varphi_1}, \quad \varphi_{H^*} = \varphi^* - m_2 \Delta_{\varphi_3}. \quad (9)$$

Формули для знаходження поля швидкостей апроксимуємо таким чином:

$$v_{i,j} = 2 \frac{\Delta_\psi \kappa_{i,j}}{J_{i,j}} \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2},$$

$$J_{i,j} = (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$v_{0,j} = 2 \frac{\Delta_\psi \kappa_{0,j}}{J_{0,j}} \sqrt{(x_{1,j} - x_{0,j})^2 + (y_{1,j} - y_{0,j})^2},$$

$$J_{0,j} = (x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j}), \quad j = \overline{1, n},$$

$$v_{i,n+1} = \frac{\Delta\psi K_{i,j}}{J_{i,n+1}} \sqrt{(x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})^2 + (y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1})^2},$$

$$J_{i,n+1} = (x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})(y_{i,n+1} - y_{i,n}) - (x_{i,n+1} - x_{i,n})(y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1}), \quad i = \overline{1, m},$$

$$v_{m+1,j} = 2 \frac{\Delta\psi K_{i,j}}{J_{m+1,j}} \sqrt{(x_{m+1,j} - x_{m,j})^2 + (y_{m+1,j} - y_{m,j})^2},$$

$$J_{m+1,j} = (x_{m+1,j} - x_{m,j})(y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j-1}) - (x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j-1})(y_{m+1,j} - y_{m,j}), \quad j = \overline{1, n},$$

$$v_{i,0} = \frac{\Delta\psi K_{i,j}}{J_{i,0}} \sqrt{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})^2 + (y_{i+1,0} - y_{i-1,0})^2},$$

$$J_{i,0} = (x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}), \quad i = \overline{1, m},$$

$$v_{0,0} = \frac{\Delta\psi K_{i,j}}{J_{0,0}} \sqrt{(x_{1,0} - x_{0,0})^2 + (y_{1,0} - y_{0,0})^2},$$

$$J_{0,0} = (x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,0}) - (x_{0,1} - x_{0,0})(y_{1,0} - y_{0,0}),$$

$$v_{0,n+1} = \frac{\Delta\psi K_{i,j}}{J_{0,n+1}} \sqrt{(x_{1,n+1} - x_{0,n+1})^2 + (y_{1,n+1} - y_{0,n+1})^2},$$

$$J_{0,n+1} = (x_{1,n+1} - x_{0,n+1})(y_{0,n+1} - y_{0,n}) - (x_{0,n+1} - x_{0,n})(y_{1,n+1} - y_{0,n+1}),$$

$$v_{m+1,n+1} = \frac{\Delta\psi K_{i,j}}{J_{m+1,n+1}} \sqrt{(x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})^2 + (y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1})^2},$$

$$J_{m+1,n+1} = (x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})(y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n}) - (x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n})(y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1}),$$

$$v_{m+1,0} = \frac{\Delta\psi K_{i,j}}{J_{m+1,0}} \sqrt{(x_{m+1,0} - x_{m,0})^2 + (y_{m+1,0} - y_{m,0})^2},$$

$$J_{m+1,0} = (x_{m+1,0} - x_{m,0})(y_{m+1,1} - y_{m+1,0}) - (x_{m+1,1} - x_{m+1,0})(y_{m+1,0} - y_{m,0}).$$

У випадку однієї лінії розриву  $\kappa$  по  $\varphi$  ( $\kappa = \begin{cases} \tilde{\kappa}_1, \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^{(1)}, \\ \tilde{\kappa}_2, \varphi^{(1)} < \varphi \leq \varphi^* \end{cases}$ ,  $\tilde{\kappa}_0 = \tilde{\kappa}_1 / \tilde{\kappa}_2$ )

диференціальні рівняння задачі (4) – (5) у внутрішніх вузлах сіткових прямокутників  $G_\omega^{\gamma(1)}$  і  $G_\omega^{\gamma(2)}$  апроксимуємо відповідними різницевиими рівняннями з використанням п'ятиточкового шаблону типу «хрест» [15]

$$\begin{aligned} x_{i+1,j}^{(l)} - 2(1 + \gamma_\sigma^2) x_{i,j}^{(l)} + x_{i-1,j}^{(l)} + \gamma_\sigma^2 (x_{i,j+1}^{(l)} + x_{i,j-1}^{(l)}) &= 0, \\ y_{i+1,j}^{(l)} - 2(1 + \gamma_\sigma^2) y_{i,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} + \gamma_\sigma^2 (y_{i,j+1}^{(l)} + y_{i,j-1}^{(l)}) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, 2}$$

з відповідними умовами спряження вздовж лінії  $L_z^{(1)}$  розриву функції  $\kappa$

$$\begin{aligned} x_{m^{(1)},j}^{(1)} &= x_{m^{(1)},j}^{(2)}, & y_{m^{(1)},j}^{(1)} &= y_{m^{(1)},j}^{(2)}, \\ x_{m^{(1)},j}^{(1)} - x_{m^{(1)}-1,j}^{(1)} &= \tilde{\kappa}_0(x_{m^{(1)}+1,j}^{(2)} - x_{m^{(1)},j}^{(2)}), \\ (y_{m^{(1)},j}^{(1)} - y_{m^{(1)}-1,j}^{(1)}) &= \tilde{\kappa}_0(y_{m^{(1)}+1,j}^{(2)} - y_{m^{(1)},j}^{(2)}), & j &= \overline{1,n}, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $x_{i,j}^{(l)} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j}^{(l)} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{\gamma(l)}$ ,  $l = \overline{1,2}$ .

Розв'язки (10) при фіксованих (заданих) початкових значеннях невідомих величин  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  (або шуканої витрати  $Q$  і значеннях  $\varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$ ) та функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах сіткової області  $x_{0,j}, y_{0,j}, x_{m+1,j}, y_{m+1,j}, x_{i,n+1}, y_{i,n+1}, x_{i,0}, y_{i,0}$  з урахуванням крайових умов (6) визначаємо за формулами сумарних зображень [7]

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0} \mu_k^i a_k + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0} \nu_k^i b_k + \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \Phi(i,g) (p_{1,k} x_{g,0} + p_{n,k} x_{g,n+1}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0} \mu_k^i c_k + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0} \nu_k^i d_k + \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \Phi(i,g) (p_{1,k} y_{g,0} + p_{n,k} y_{g,n+1}) \right), \\ i &= \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned} \quad (12)$$

де елементи матриці  $P$ -трансформацій  $P = [p_{j,k}]_{j,k=1}^n$  обчислюємо як

$$p_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \text{ функція } \Phi(i, g) \text{ має вигляд}$$

$$\Phi(i, g) = \begin{cases} \left( \nu_k^{|i-g|} + \frac{1-\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0} \nu_k^{2^*m^{(1)}-i-g} \right) (\mu_k - \nu_k)^{-1}, & g = \overline{1, m^{(1)}-1}, \\ \left( \nu_k^{m^{(1)}-i} \right) (\mu_k - \nu_k)^{-1}, & g = m^{(1)}, \\ \left( \frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0} \nu_k^{g-i} \right) (\mu_k - \nu_k)^{-1}, & g = \overline{m^{(1)}+1, m}, \end{cases} \left. \vphantom{\Phi(i, g)} \right\} i = \overline{1, m^{(1)}},$$

$$\Phi(i, g) = \begin{cases} \left( \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0} \nu_k^{i-g} \right) (\mu_k - \nu_k)^{-1}, & g = \overline{1, m^{(1)}-1}, \\ \left( \nu_k^{i-m^{(1)}} \right) (\mu_k - \nu_k)^{-1}, & g = m^{(1)}, \\ \left( \nu_k^{|i-g|} + \frac{\tilde{\kappa}_0-1}{\tilde{\kappa}_0+1} \nu_k^{i+g-2^*m^{(1)}} \right) (\mu_k - \nu_k)^{-1}, & g = \overline{m^{(1)}+1, m} \end{cases} \left. \vphantom{\Phi(i, g)} \right\} i = \overline{m^{(1)}+1, m};$$

елементи діагональних матриць  $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n$ ,  $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^n$  визначаємо з формул  $\mu_k = \nu_k^{-1} = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$ ,  $\eta_k = 1 + \gamma_\sigma^2 \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$ , а довільні сталі  $a_k, b_k, c_k, d_k$  – із граничних умов на  $L^*, L^*$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0}a_k + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0}b_k = \sum_{j=1}^n P_{j,k}^* x_{0,j} - S_k, \\ \frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0}\mu_k^{m+1}a_k + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0}\nu_k^{m+1}b_k = \sum_{j=1}^n P_{j,k}^* x_{m+1,j} - S'_k, \quad k = \overline{1, n}, \\ \\ \frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0}c_k + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0}d_k = \sum_{j=1}^n P_{j,k}^* y_{0,j} - S''_k, \\ \frac{2\tilde{\kappa}_0}{1+\tilde{\kappa}_0}\mu_k^{m+1}c_k + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}_0}\nu_k^{m+1}d_k = \sum_{j=1}^n P_{j,k}^* y_{m+1,j} - S'''_k, \quad k = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (13)$$

де  $P_{j,k}^*$  ( $j, k = \overline{1, n}$ ) – елементи матриці  $P^*$ , оберненої до  $P$  ( $P \cdot P^* = E$ ),

$$S_k = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \Phi(0, g)(p_{1,k}x_{g,0} + p_{n,k}x_{g,n+1}), \quad S'_k = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \Phi(m+1, g)(p_{1,k}x_{g,0} + p_{n,k}x_{g,n+1}),$$

$$S''_k = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \Phi(0, g)(p_{1,k}y_{g,0} + p_{n,k}y_{g,n+1}), \quad S'''_k = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \Phi(m+1, g)(p_{1,k}y_{g,0} + p_{n,k}y_{g,n+1}).$$

У випадку однієї лінії розриву  $\kappa$  по  $\psi$  ( $\kappa = \begin{cases} \tilde{\kappa}_1, & 0 \leq \psi \leq \psi^{(1)}, \\ \tilde{\kappa}_2, & \psi^{(1)} < \psi \leq Q \end{cases}$ ),

диференціальним рівнянням у внутрішніх вузлах сіткової області з урахуванням умов спряження ставимо у відповідність такі скінченно-різницеві системи рівнянь [5,8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2}{2} L_\gamma x_{i,0} + \gamma_\sigma^2 (\tilde{\kappa}_1 x_{i,1} + \tilde{\kappa}_2 x_{i,n}) = 0, \\ \tilde{\kappa}_1 L_\gamma x_{i,j} + \gamma_\sigma^2 \tilde{\kappa}_1 (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{1, n^{(1)} - 1}, \\ \frac{\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2}{2} L_\gamma x_{i,n^{(1)}} + \gamma_\sigma^2 (\tilde{\kappa}_1 x_{i,n^{(1)}-1} + \tilde{\kappa}_2 x_{i,n^{(1)}+1}) = 0, \\ \tilde{\kappa}_2 L_\gamma x_{i,j} + \gamma_\sigma^2 \tilde{\kappa}_2 (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n^{(1)} + 1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2}{2} L_\gamma y_{i,0} + \gamma_\sigma^2 (\tilde{\kappa}_1 y_{i,1} + \tilde{\kappa}_2 y_{i,n}) = 0, \\ \tilde{\kappa}_1 L_\gamma y_{i,j} + \gamma_\sigma^2 \tilde{\kappa}_1 (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{1, n^{(1)} - 1}, \\ \frac{\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2}{2} L_\gamma y_{i,n^{(1)}} + \gamma_\sigma^2 (\tilde{\kappa}_1 y_{i,n^{(1)}-1} + \tilde{\kappa}_2 y_{i,n^{(1)}+1}) = 0, \\ \tilde{\kappa}_2 L_\gamma y_{i,j} + \gamma_\sigma^2 \tilde{\kappa}_2 (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) = 0, \quad j = \overline{n^{(1)} + 1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \end{array} \right.$$

$(L_\gamma u_j(\varphi_i) = u_j(\varphi_{i+1}) - 2(1 + \gamma_\sigma^2)u_j(\varphi_i) + u_j(\varphi_{i-1}))$ , розв'язки яких представляємо формулами сумарних зображень [4–5]

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \mu_k^i a_k + \nu_k^i b_k + \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{g,0} + p_{n,k} x_{g,n+1}) \right), \\ y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \mu_k^i c_k + \nu_k^i d_k + \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{g,0} + p_{n,k} y_{g,n+1}) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

де

$$p_{j,k} = C_k \begin{cases} \sin j\theta_k, & j = 1, 2, \dots, n^{(1)}, \\ \alpha_k \sin(n-j)\theta_k, & j = n^{(1)} + 1, \dots, n, \end{cases}$$

$\theta_k$  – корені рівняння  $\sin n\theta + \frac{\tilde{\kappa}_1 - \tilde{\kappa}_2}{\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2} \sin(n - 2n_1)\theta = 0$  в інтервалі  $(0, \pi)$ ,

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\sin n^{(1)}\theta_k}{\sin(n - n_1)\theta_k}, & \text{якщо } \sin(n - n^{(1)})\theta_k \neq 0, \\ -\frac{\tilde{\kappa}_1 \cos n^{(1)}\theta_k}{\tilde{\kappa}_2 \cos(n - n^{(1)})\theta_k}, & \text{якщо } \sin(n - n^{(1)})\theta_k = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_k &= \left[ \frac{\tilde{\kappa}_1}{2} \left( n^{(1)} - \frac{\cos(n^{(1)} - 1)\theta_k \sin n^{(1)}\theta_k}{\sin \theta_k} \right) + \frac{\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2}{2} \sin^2 n^{(1)}\theta_k + \right. \\ &\left. + \frac{\tilde{\kappa}_2}{2} \alpha_k^2 \left( n - n^{(1)} - \frac{\cos(n - n^{(1)} - 1)\theta_k \sin(n - n^{(1)})\theta_k}{\sin \theta_k} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Елементи діагональних матриць  $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n$ ,  $\nu^i = [\nu_k^i]_{k=1}^n$  мають такий же смисл, що й раніше, а довільні сталі  $a_k, b_k, c_k, d_k$  знаходимо із крайових умов на границях  $L_*, L^*$  за допомогою систем рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned} a_k + b_k &= \sum_{j=1}^n P_{j,k}^* x_{0,j} - \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \frac{v_k^g}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{g,0} + p_{n,k} x_{g,n+1}), \\ \mu_k^{m+1} a_k + v_k^{m+1} b_k &= \sum_{j=1}^n P_{j,k}^* x_{m+1,j} - \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \frac{v_k^{m+1-g}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{g,0} + p_{n,k} x_{g,n+1}), \quad k = \overline{1, n}; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} c_k + d_k &= \sum_{j=1}^n P_{j,k}^* y_{0,j} - \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \frac{v_k^g}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{g,0} + p_{n,k} y_{g,n+1}), \\ \mu_k^{m+1} c_k + v_k^{m+1} d_k &= \sum_{j=1}^n P_{j,k}^* y_{m+1,j} - \gamma_\sigma^2 \sum_{g=1}^m \frac{v_k^{m+1-g}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{g,0} + p_{n,k} y_{g,n+1}), \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (15)$$

де  $p_{j,k}^* (j, k = \overline{1, n})$  – елементи матриці  $P^*$ , оберненої до  $P$ .

$$\text{У формулах (8) – (15) } \sigma = \begin{cases} 1, & \text{при } i = \overline{0, m_1}, \\ 2, & \text{при } i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ 3, & \text{при } i = \overline{m_2 + 1, m + 1}. \end{cases}$$

У випадку багатьох ліній розриву  $\kappa$  по  $\varphi$  і по  $\psi$  для декомпозиції області скористаємось альтернуючим методом Шварца. Для цього область  $G_\omega^\gamma$  «розіб'ємо» на дві групи (по горизонталі й вертикалі) сіткових прямокутників з «накладками»:

$$G_\omega^\gamma = \bigcup_{q=1}^{s_1} \left( \bigcup_{l=1}^{s_2-1} \tilde{G}_{q,l} \right) = \bigcup_{l=1}^{s_2} \left( \bigcup_{q=1}^{s_1-1} \tilde{\tilde{G}}_{q,l} \right),$$

$$\text{де } \tilde{G}_{q,l} = \{(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma : \varphi_{m^{(q-1)}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m^{(q)}-1}, \psi_{n^{(l-1)}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n^{(l+1)}-1}\},$$

$$\tilde{\tilde{G}}_{q,l} = \{(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma : \varphi_{m^{(q-1)}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m^{(q+1)}-1}, \psi_{n^{(l-1)}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n^{(l)}-1}\}.$$

При цьому отримаємо  $s_1(s_2 - 1) + s_2(s_1 - 1)$  проєкцій вихідної задачі (стосовно підобластей  $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$ ) [9,11] для знаходження послідовностей сіткових функцій  $\left( \left\{ \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)} \right\}_{\xi=0}^\infty, \left\{ \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)} \right\}_{\xi=0}^\infty \right) : x_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}, y_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}$ , де  $\xi$  – номер кроку ітераційного процесу [9], що є чисельним аналогом класичного методу Шварца [12], розв'язки яких представлятимемо формулами сумарних зображень (12), (14).

**Алгоритм** розв'язання поставленої задачі в загальному вигляді може бути описаний таким чином. Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області  $G_z$ , що обмежена контурами  $L, L^*, L^*$ , значення граничних потенціалів і функції течії та критичних потенціалів на лініях розриву  $\kappa$ , а також відповідні значення коефіцієнта провідності. Задаємо кількість вузлів розбиття сіткової області комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega^\gamma$  так, щоб відповідні вузли належали лініям розриву  $\kappa$  (параметри  $m_1, m_2, m, n$ ) та параметри необхідної точності роботи алгоритму  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , бажаний рівень квазіконформності відображення  $\delta_*$ .

Задаємо нульове наближення невідомих величин  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  (або шуканої витрати

$Q$  і значень  $\varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$ ), а також задаємо початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{0,j}, y_{0,j}, x_{m+1,j}, y_{m+1,j}, x_{i,n+1}, y_{i,n+1}, x_{i,0}, y_{i,0}$  динамічної сітки так, щоб виконувались крайові умови (6).

Обчислюємо початкові наближення координат внутрішніх вузлів як результат ітераційного процесу по  $\xi$  обчислення функцій  $(\tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)})$  у підобластях  $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{\tilde{G}}_{q,l}$  за формулами (12), (14). При цьому значення граничних вузлів у цих підобластях визначатимемо як значення внутрішніх вузлів (уздовж відповідних вертикальних та горизонтальних відрізків) сусідніх підобластей з «накладками» [9]. Відповідні системи рівнянь в ітераційних розрахунках по  $\xi$  у підобластях  $\tilde{\tilde{G}}_{q,l}$  для знаходження сталих  $a_k^{(q)}, b_k^{(q)}, c_k^{(q)}, d_k^{(q)}, q = \overline{1, s_1}, k = \overline{1, n}$ , які визначаються із крайових умов, у випадку багатьох ліній розриву  $\kappa$  (на відміну від (13)) матимуть вигляд

$$\begin{cases} \frac{2\tilde{\kappa}^{(q,l)}}{1+\tilde{\kappa}^{(q,l)}}\mu_k^{m^{(q-1)}}a_k^{(q)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}^{(q,l)}}\nu_k^{m^{(q-1)}}b_k^{(q)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{x}_{m^{(q-1)},j}^{(q,l)(\xi-1)} - S_k^{(q)}, \\ \frac{2\tilde{\kappa}^{(q,l)}}{1+\tilde{\kappa}^{(q,l)}}\mu_k^{m^{(q+1)}}a_k^{(q)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}^{(q,l)}}\nu_k^{m^{(q+1)}}b_k^{(q)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{x}_{m^{(q+1)},j}^{(q,l)(\xi-1)} - S_k^{\prime(q)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2\tilde{\kappa}^{(q,l)}}{1+\tilde{\kappa}^{(q,l)}}\mu_k^{m^{(q-1)}}c_k^{(q)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}^{(q,l)}}\nu_k^{m^{(q-1)}}d_k^{(q)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{y}_{m^{(q-1)},j}^{(q,l)(\xi-1)} - S_k^{\prime\prime(q)}, \\ \frac{2\tilde{\kappa}^{(q,l)}}{1+\tilde{\kappa}^{(q,l)}}\mu_k^{m^{(q+1)}}c_k^{(q)(\xi)} + \frac{2}{1+\tilde{\kappa}^{(q,l)}}\nu_k^{m^{(q+1)}}d_k^{(q)(\xi)} = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* \tilde{y}_{m^{(q+1)},j}^{(q,l)(\xi-1)} - S_k^{\prime\prime\prime(q)}, \end{cases}$$

$$q = \overline{1, s_1 - 1}, l = \overline{1, s_2},$$

$$\tilde{\kappa}^{(q,l)} = \kappa^{(q,l)} / \kappa^{(q+1,l)}, \quad S_k^{(q)} = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m^{(q-1)}+1}^{m^{(q+1)}-1} \Phi(m^{(q-1)}, g) (p_{1,k} x_{g,0}^{(q,1)} + p_{n,k} x_{g,n+1}^{(q,s_2)}), \quad S_k^{\prime(q)} = \gamma_\sigma^2 \times$$

$$\times \sum_{g=m^{(q-1)}+1}^{m^{(q+1)}-1} \Phi(m^{(q+1)}, g) (p_{1,k} x_{g,0}^{(q,1)} + p_{n,k} x_{g,n+1}^{(q,s_2)}), \quad S_k^{\prime\prime(q)} = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m^{(q-1)}+1}^{m^{(q+1)}-1} \Phi(m^{(q-1)}, g) (p_{1,k} y_{g,0}^{(q,1)} +$$

$$+ p_{n,k} y_{g,n+1}^{(q,s_2)}), \quad S_k^{\prime\prime\prime(q)} = \gamma_\sigma^2 \sum_{g=m^{(q-1)}+1}^{m^{(q+1)}-1} \Phi(m^{(q+1)}, g) (p_{1,k} y_{g,0}^{(q,1)} + p_{n,k} y_{g,n+1}^{(q,s_2)}).$$

Зазначимо, що достатньо провести щонайбільше  $(s_1 - 1)(s_2 - 1)$  ітерацій по  $\xi$  для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цих обчислювальних процедур при подальшому уточненні інших параметрів задачі. Знаходимо нові значення  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Q$  і  $\varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$  за формулами (8) – (9).

Після цього уточнюємо координати граничних вузлів  $x_{0,j}^{(k)}, y_{0,j}^{(k)}, x_{m+1,j}^{(k)}, y_{m+1,j}^{(k)}, x_{i,n+1}^{(k)}, y_{i,n+1}^{(k)}, x_{i,0}^{(k)}, y_{i,0}^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots$  – номер кроку загальної ітерації) з урахуванням (6) – (7) (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), знаходимо нове наближення координат внутрішніх вузлів  $x_{i,j}^{(q,l)(k)}, y_{i,j}^{(q,l)(k)}$  динамічної сітки за описаною

вище процедурою, знову обчислюємо  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, Q, \varphi_{H^*}, \varphi_{H^*}$  за формулами (8) – (9) і, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за  $\varepsilon_1$ , то повертаємося до уточнення вузлів.

Наприкінці кожної загальної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів. Якщо величина зміщення вузлів на границі  $S = \max_{i=0, m+1, j=0, n+1} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$  за проведену загальну ітерацію більша за  $\varepsilon_2$ , то повторюємо перерахунок параметрів задачі. У протилежному випадку зупиняємо ітераційний процес і розраховуємо матрицю величини швидкості.

Оцінюємо ступінь конформності  $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$  отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область, де  $\delta_1, \delta_2$  – нев’язки апроксимацій умов Коші-Рімана

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{m,n} |\delta_{i,j}^{(1)}|, \quad \delta_{i,j}^{(1)} = \gamma_\sigma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}),$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{m,n} |\delta_{i,j}^{(2)}|, \quad \delta_{i,j}^{(2)} = \gamma_\sigma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}).$$

Якщо  $\delta \leq \delta_*$ , то вважаємо, що задача розв’язана із необхідною точністю. Інакше, збільшуємо кількість вузлів розбиття області чи змінюємо співвідношення між  $m_1, m_2, m, n$  та виконуємо перерахунок задачі за вищенаведеним алгоритмом (значення цих параметрів доцільно задавати так, щоб виконувалася умова  $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 1$ , що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної).

**Висновки.** На основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень з декомпозицією області за методом Шварца розроблено конструктивний підхід до розв’язання нелінійних крайових задач для трив’язних двояко-шаруватих криволінійних областей, обмежених екіпотенціальними лініями та непроникним контуром. Побудований алгоритм забезпечує можливість автоматичного розрахунку динамічної сітки, знаходження ліній розділу шарів сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислення повної витрати тощо.

Використання методів сумарних зображень для наближення внутрішніх вузлів дозволяє у комплексі на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а й усіх граничних вузлів і, отже, суттєво пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Застосування альтернуючого методу Шварца для декомпозиції області по прошарках сталості коефіцієнта провідності (з «накладками») дає змогу, по-перше, ефективно знаходити неперервні розв’язки нелінійних крайових задач з розривними коефіцієнтами; по-друге, розв’язувати задачі у більш «зручних» підобластях, аніж уся область вихідної задачі, що є особливо актуальним для розрахунків у нафтогазових, сланцевих пластах, де маємо значні співвідношення між розмірами пласта і діаметрами свердловин; по-третє, дозволяє розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп’ютерних мереж і відповідних комунікаційних програм, що важливо з огляду на великий обсяг обчислювальної роботи для таких класів задач.

**Conclusions.** Based on the synthesis of numerical methods complex analysis and the summary representations method with the domain decomposition according to the Schwarz method a constructive approach to solving of nonlinear boundary value problems for triple-

connected doubly-layered curvilinear domain bounded equipotential lines and impermeable contour was developed. The constructed algorithm provides the possibility to calculate automatically the dynamic grid, to find the dividing lines layers constancy coefficient of the medium conductivity to calculate the total flow, etc.

Using summary representations methods for approximating internal nodes allows in complex at each iteration step to consider the impact of not only surrounding, but also all boundary nodes and thus significantly speed up the achievement of the desired conjugation of harmonic functions

Application of the alternating Schwarz method for domain decomposition in layers of constancy conductivity coefficient (with the «overlap») allows, firstly, to find effectively continuous solutions of nonlinear boundary value problems with discontinuous coefficients, and secondly, to solve problems in a more «comfortable» subdomain than the original problem of the whole domain, which is particularly important for the calculation in gas and oil, shale layers, where we have a significant correlation between the size of the reservoir and wells diameter, and thirdly, allows to make in parallel the computational process not simultaneously, since the calculations in the subdomain at each iteration step are independent of each other and can be done simultaneously with the use of modern computer networks and relevant communication programs, which is important because of the large amount of computation work for these types of problems.

#### Список використаної літератури

1. Бомба, А.Я. Синтез числовых методов конформных отображений та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей [Текст] / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Вісник Київського нац. університету ім. Т. Шевченка. Серія «фіз.-мат. науки». – 2012. – №2. – С. 87–94.
2. Бомба, А.Я. Числово-аналітичні представлення розв'язків одного класу нелінійних крайових задач [Текст] / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2013. – Вип. 3 (80). – С. 76–83.
3. Бомба, А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки [Текст] / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопечкий. – Київ: Наукова думка, 2007. – 308с.
4. Методи комплексного аналізу: монографія [Текст] / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярошак – Рівне: НУВГП, 2013. – 415с.
5. Положий, Г.М. Численное решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента [Текст] / Г.М. Положий. – К: Изд-во КГУ. – 1962. – 161с.
6. Глушенко, А.А. Приближенное аналитическое решение краевой задачи фильтрации через неоднородную плотину с различными отметками дна верхнего и нижнего бьефов [Текст] / А.А. Глушенко, А.П. Кузьменко // Вычисл. и прикл. математика. – 1984. – Вып. 54. – С.50–56.
7. Ляшко, И.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации [Текст] / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко. – К.: Наукова думка, 1973. – 264с.
8. Ляшко, И.И. Решение краевых задач в слоистых грунтах [Текст] / И.И. Ляшко, А.Е. Грищенко // Алгоритмы и программы решения краевых задач матем. физики. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1972. – 173с.
9. Гладка, О.М. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатощаровій смугі [Текст] / О.М. Гладка, А.П. Кузьменко // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: зб. наук. праць. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1995. – Вип.9. – С. 168–173.
10. Сергиенко, И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах [Текст] / И.В. Сергиенко, В.В. Скопечкий, В.С. Дейнека. – К.: Наукова думка, 1991. – 432с.
11. Кузьменко, А.П. До розв'язання нестационарних крайових задач у шаруватих кругових областях [Текст] / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Наук.-техн. зб. – Рівне: УДАВГ. – 1998. – Вип. 23. – С. 76–83.
12. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

Отримано 23.11.2013