

УДК 539.3

Т. Штефан¹; О. Величко², канд. фіз.-мат. наук

¹Запорізький національний технічний університет

²Таврійський державний агротехнологічний університет

ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ ФОРМОЗМІНИ В ПЛИТІ, ЯКА ДЕФОРМУЄТЬСЯ ШТАМПОМ

Резюме. Розглянуто пружну деформацію плити у вигляді паралелепіпеда під дією гладкого штампа, який контактує з плитою по всій поверхні верхньої основи плити. Нижня основа вільна від навантажень, а вертикальні переміщення точок бокової грані дорівнюють нулю. Під час дослідження використовується напівобернений метод Сен-Венана. Межові умови, яких не вистачає при постановці задачі, беремо із припущення, що нормальні переміщення можуть бути представлені у вигляді подвійних рядів Фур'є за синусами. Обчислені коефіцієнти подвійних тригонометричних рядів для напружень та переміщень визначають точний розв'язок сформульованої задачі для довільної форми штампа. Поставлено і розв'язано задачу про розподіл енергії формозміни по об'єму плити у випадку, коли штамп має подвійну синусоїдальну форму. Вказана форма штампа дозволяє залишити в рядах тільки по одному доданку та отримати замкнений вираз для енергії формозміни, яка застосовується в четвертій (енергетичній) гіпотезі міцності. На основі чисельного аналізу зроблено прогноз про найнебезпечніші, в сенсі міцності конструкції, ділянки плити з горизонтальним перерізом у вигляді квадрата. Методом спряжених градієнтів встановлено місцезнаходження глобального максимуму функції енергії формозміни за заданими граничними умовами та деякими значеннями коефіцієнта Пуассона й геометричними параметрами плити.

Ключові слова: плита, штамп, просторова деформація, четверта гіпотеза міцності, енергія, зона пластичності.

T. Shtefan, H. Velichko

SPACE RESEARCH PROBLEM IN POWER FORMING FOR PLATE WHICH DEFORMS STAMP

Summary. An elastic deformation of the parallelepiped shaped plate by the smooth stamp which makes the contact with the plate on its entire upper foundation has been considered. The lower base is free of load. The vertical displacements of the points of the lateral face are equal to zero. Saint-Venant semi-inverse method has been used. The missing boundary conditions have been obtained considering that the normal displacements can be represented in the form of the double sine Fourier series. The obtained coefficients of the double trigonometric series for the stresses and displacements determine the exact solution of the problem for arbitrarily form of the stamp. The problem connected with the distortion energy distribution over volume in the case of the double sinusoidal shaped stamp has been posed and solved. When the stamp has such form one can leave only one term in each series and obtain the expression of the closed form for the distortion energy which is used in the fourth (energy) failure hypothesis. The prognosis about the safest, in the sense of the stability, districts of the plate with the square horizontal section has been made with the help of the numerical analysis. The location of the global maximum of the distortion energy function under given boundary conditions, some values of the Poisson coefficient and the geometric parameters of the plate has been determined with the help of the conjugate gradient method. Numerical research of a parallelepiped that takes area $(x, y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 1]$ was done. The stamp surface is described by the equation $f(x, y) = \alpha \sin x \sin y$. The plots, given in the article, illustrate the behavior of the potential-energy function in the different sections of the body in question. The examples, which illustrate the fact that, the maximum point of the potential energy can be situated whether in the center of the lower foundation of the plate, or in the center of the plate on the vertical line of symmetry are presented. These examples show that, under the other equal conditions, the numerical value of the maximum grows when the thickness of the plate becomes bigger.

Key words: plate, stamp, spatial deformation, fourth hypothesis strength, energy, zone of plasticity.

Постановка проблеми. Теорія пружності є одним із основних інструментів для теоретичних розрахунків при аналізі міцності інженерних конструкцій та житлових

споруд, при проектуванні та будівництві авто та залізничних шляхів [1]. При теоретичних розрахунках для багатьох матеріалів вважається, що руйнування структури починає відбуватися в тих місцях споруди, де потенціальна енергія формозміни перевищує деяке критичне значення. Це твердження складає суть четвертої гіпотези міцності [2].

Представлене дослідження проведено в напрямку пошуку найнебезпечніших (у сенсі міцності) областей плити, що деформується штампом. Застосовується розклад функцій переміщень та навантажень у тригонометричні ряди.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Авторам статті не вдалося знайти в літературі точного аналітичного дослідження сформульованої проблеми. При дослідженнях зазвичай обмежувалися аналітичним або чисельним способами визначення напружень та переміщень. У роботі [3] для визначення елементів тензора напружень у плиті застосовано метод початкових функцій. Для суттєво багат шарових плит-метод тригонометричних розкладів та метод матриць податливості застосовувався в статті [4]. Відповідну плоску задачу докладно розв'язано в [5]. Дослідження міцності плит при дещо інших межових умовах, ніж тих, що розглядається у цій статті, наведено в [6, 7].

Метою дослідження є пошук найнебезпечніших ділянок плити, що деформується штампом. Отримати аналітичні вирази для функції, яка визначає міцність конструкції за четвертим критерієм міцності. Виділити найнебезпечніші з точки зору міцності ділянки плити. Провести систематичний аналіз впливу форми штампа, розмірів плити й коефіцієнта Пуассона матеріалу плити на поведінку функції, яка описує потенційну енергію формозміни.

Постановка задачі. Виберемо систему координат так, щоб їх початок знаходився в одній з вершин прямокутного паралелепіпеда, осі направлені вздовж його ребер. Перейдемо до безрозмірних величин таким чином, щоб смуга займала область

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{a}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{b}, 0 \leq z \leq h.$$

На верхню межу смуги тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально і контактує з поверхнею смуги на всій ділянці

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{a}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{b}. \text{ Відповідні граничні умови мають вигляд}$$

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (1)$$

$$v(x, y, 0) = 0, \quad (2)$$

$$w(x, y, 0) = f(x, y). \quad (3)$$

Тут $z = f(x, y)$ – рівняння поверхні, яка співпадає з нижньою межею штампа в кінцевому положенні.

Нижня межа вільна від навантажень, тобто

$$\tau_{yz}(x, y, h) = 0 \quad (4)$$

$$\tau_{xz}(x, y, h) = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_z(x, y, h) = 0. \quad (6)$$

За аналогією з [3] будемо вважати, що на бокових межах виконуються такі умови

$$w(0, y, z) = w(x, 0, z) = 0, \tag{7}$$

$$w\left(\frac{\pi}{a}, y, z\right) = w\left(0, \frac{\pi}{b}, z\right) = 0. \tag{8}$$

Таким чином, нам потрібно знайти розв'язок задачі теорії пружності в області $(x, y, z) \in [0, \frac{\pi}{a}] \times [0, \frac{\pi}{b}] \times [0, h]$ з межовими умовам (1) – (8). Під час дослідження будемо використовувати напівобернений метод Сен-Венана. Межові умови, яких не вистачає при постановці задачі, беремо із припущення, що нормальні переміщення можуть бути представлені у вигляді подвійних рядів Фур'є за синусами.

Метод розв'язання. Функцію $w(x, y, z)$ будемо шукати у вигляді подвійного тригонометричного ряду за синусами, оскільки в цьому випадку вона задовольняє умови (7) – (8)

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby). \tag{9}$$

У цьому випадку розвинення функцій $u(x, y, z), v(x, y, z), \sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{xz}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nk}(z) \cos(kax) \sin(nby), & v &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{nk}(z) \sin(kax) \cos(nby), \\ \sigma_x &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), & \sigma_y &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), \\ \sigma_z &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{nk}(z) \sin(kax) \sin(nby), & \tau_{xy} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{nk}(z) \cos(kax) \cos(nby), \\ \tau_{xz} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_{nk}(z) \cos(kax) \sin(nby), & \tau_{yz} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N_{nk}(z) \sin(kax) \cos(nby). \end{aligned} \tag{10}$$

Встановимо зв'язок між функціями $W_{nk}, V_{nk}, U_{nk}, S_{nk}, R_{nk}, Q_{nk}, T_{nk}, M_{nk}$ та N_{nk} . Для цього після підстановки розвинень (9) – (10) у рівняння Ламе і розділення гармонік матимемо систему

$$\begin{cases} (1-2\nu)U''_{nk} - ((2-2\nu)a^2k^2 + (1-2\nu)b^2n^2)U_{nk} + akW'_{nk} - abknV = 0, \\ (1-2\nu)V''_{nk} - ((2-2\nu)b^2n^2 + (1-2\nu)a^2k^2)V_{nk} + bnW'_{nk} - abknU = 0, \\ (2-2\nu)W''_{nk} - (1-2\nu)(a^2k^2 + b^2n^2)W_{nk} - akU'_{nk} - bnV'_{nk} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Загальний розв'язок (11) має вигляд

$$\begin{aligned} p^2U_{nk} &= ((ak(A_{nk} + zpB_{nk})ch(pz) + ak(C_{nk} + zpD_{nk})sh(pz) + bnE_{nk}ch(pz) + bnF_{nk}sh(pz)), \\ p^2V_{nk} &= ((bn(A_{nk} + zpB_{nk})ch(pz) + bn(C_{nk} + zpD_{nk})sh(pz) - akE_{nk}ch(pz) - akF_{nk}sh(pz)), \\ p^2W_{nk} &= (A_{nk}psh(pz) + B_{nk}p((4\nu-3)ch(pz) + pzsh(pz)) + C_{nk}pzch(pz) + \\ &\quad + D_{nk}p((4\nu-3)sh(pz) + pzch(pz))). \end{aligned}$$

Тут $A_{nk}, B_{nk}, C_{nk}, D_{nk}, E_{nk}, F_{nk}$ – довільні константи, $p^2 = a^2k^2 + b^2n^2$ та враховано співвідношення $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 2\nu$, де ν – коефіцієнт Пуассона.

Після визначення U_{nk}, V_{nk} та W_{nk} можемо знайти функції $S_{nk}, R_{nk}, Q_{nk}, T_{nk}, M_{nk}$ та N_{nk} , використавши обернений закон Гука

$$\begin{aligned} S_{nk} &= \lambda W'_{nk} - (\lambda + 2\mu)kU_{nk} - \lambda nV_{nk}, & R_{nk} &= \lambda W'_{nk} - (\lambda + 2\mu)nV_{nk} - \lambda kU_{nk}, \\ Q_{nk} &= (\lambda + 2\mu)W'_{nk} - \lambda kU_{nk} - \lambda nV_{nk}, & T_{nk} &= \mu(nU_{nk} + kV_{nk}), \\ M_{nk} &= \mu(U'_{nk} + kW_{nk}), & N_{nk} &= \mu(V'_{nk} + nW_{nk}). \end{aligned} \quad (12)$$

З урахуванням формул (12) та розвинень (9–10), із межових умов (1–6) отримаємо систему для визначення довільних констант

$$\begin{cases} B_{nk}(4\nu - 3) + C_{nk} = pf_{nk}, & A_{nk} = E_{nk} = F_{nk} = 0, \\ B_{nk}((2\nu - 1)ch(ph) + phsh(ph)) + C_{nk}ch(ph) + D_{nk}((2\nu - 1)sh(ph) + phch(ph)) = 0, \\ B_{nk}((2 - 2\nu)sh(ph) - phch(ph)) - C_{nk}sh(ph) + D_{nk}((2 - 2\nu)ch(ph) - phsh(ph)) = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} A_{nk} = E_{nk} = F_{nk} = 0, & B_{nk} = pf_{nk} \frac{ch^2(ph) + 1 - 2\nu}{(4\nu - 3)ch^2(ph) - p^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ C_{nk} = \frac{pf_{nk}(4\nu^2 - 6\nu + 2 - p^2h^2)}{(4\nu - 3)ch^2(ph) - p^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, & D_{nk} = \frac{pf_{nk}(ph - sh(ph)ch(ph))}{(4\nu - 3)ch^2(ph) - k^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}. \end{cases}$$

Отже, підставивши знайдені коефіцієнти в ряди для нормальних та дотичних напружень, матимемо шукані розвинення вказаних функцій у тригонометричні ряди. Застосуємо отримані результати для знаходження ділянок, які є критичними в сенсі міцності розглянутої конструкції.

Результати дослідження функції потенціальної енергії формозміни. Енергетична гіпотеза міцності виходить із припущення, що кількість потенціальної енергії формозміни, яка накопичена до моменту настання небезпечного стану, однакова як при складному напруженні, так і при простому розтягуванні. Умова міцності згідно з четвертою гіпотезою міцності [2]

$$\sigma^{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (13)$$

Цей вираз можна записати через компоненти тензора напружень

$$\sigma^{\text{II}} = F(x, y, z) = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)}. \quad (14)$$

Оскільки маємо явні вирази для всіх компонент тензора напружень, то можемо дослідити функцію (14) на екстремум.

Як приклад, розглянемо деформацію паралелепіпеда $(x, y, z) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 1]$ штампом, поверхня якого описується рівнянням $f(x, y) = \alpha \sin x \sin y$. Зауважимо, що ця задача симетрична відносно змінних x та y .

На рис.1–3 наведено графіки функції $F(x, y, z)$ відповідно для глибин $z = 0$, $z = 0,7$, $z = 1$.

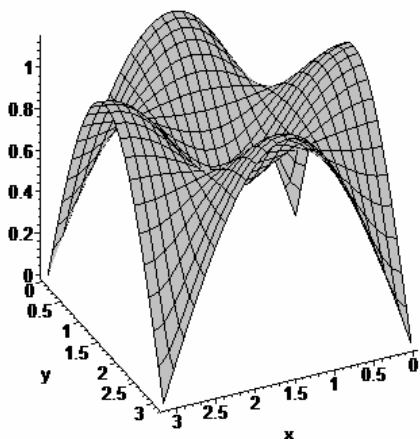


Рисунок 1. $F(x, y, z)$ для глибини $z = 0$.

Figure 1. $F(x, y, z)$ for depth $z = 0$.

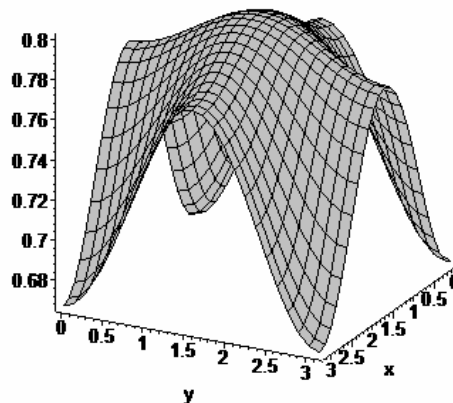


Рисунок 2. $F(x, y, z)$ для глибини $z = 0,7$

Figure 2. $F(x, y, z)$ for depth $z = 0,7$

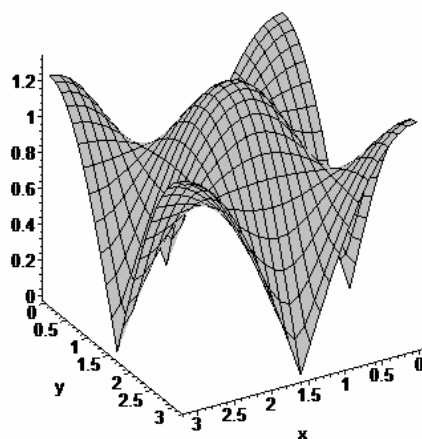


Рисунок 3. $F(x, y, z)$ для глибини $z = 1$

Figure 3. $F(x, y, z)$ for depth $z = 1$

Методом спряжених градієнтів було встановлено, що глобальний максимум функції $F(x, y, z)$ при заданих параметрах знаходиться в точці з координатами $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = 1$, а саме на нижній межі в центрі плити, і дорівнює $F_{\max} = 1,324534844$. При тих же параметрах для плити товщиною $h = 3$ максимум знаходиться на вертикальній осі симетрії на глибині $z = 0,316$ і дорівнює $F_{\max} = 1,446718336$.

Наведемо графіки цієї функції вздовж відрізків $\left[x, \frac{\pi}{2}, z_k \right]$ при фіксованих $z_1 = 0$,

$z_2 = 0,6905$, $z_3 = 0,75$, $z_4 = 1$, при варіюванні $x \in [0, \pi]$ (рис.4) та вздовж відрізків $[\pi, \pi, z]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, z]$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, z]$, якщо $z \in [0,1]$ (рис.5).

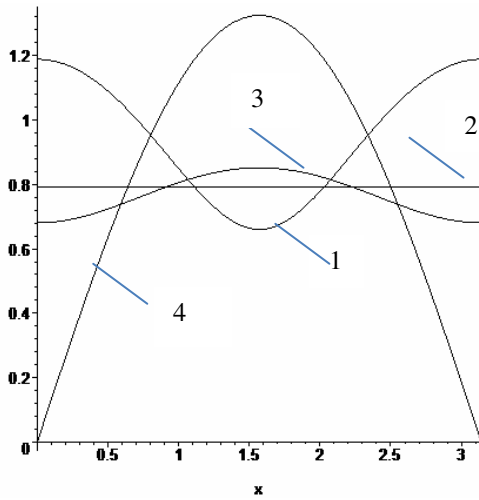


Рисунок 4. $F\left(x, \frac{\pi}{2}, z_k\right)$ при $z \in [0,1]$

Figure 4. $F\left(x, \frac{\pi}{2}, z_k\right)$ for $z \in [0,1]$

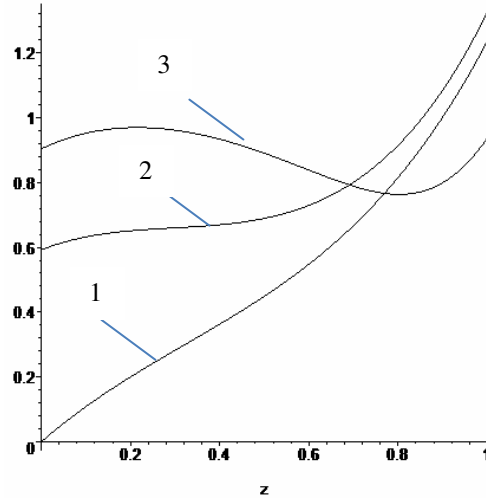


Рисунок 5. $F\left(x_k, \frac{\pi}{2}, z\right)$ при $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

Figure 5. $F\left(x_k, \frac{\pi}{2}, z\right)$ for $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

Отриманий спосіб дозволяє визначити критичні точки функції потенційної енергії формозміни при просторовій деформації. В подальшому планує детальніше дослідження положення критичних точок вказаної функції.

Висновки. Розглянуто плиту, яка знаходиться в умовах просторової деформації під дією штамп. Отримано аналітичні вирази для функції, яка визначає міцність конструкції за четвертим критерієм міцності. Виділені найнебезпечніші з точки зору міцності ділянки плити. В подальшому планується провести систематичний аналіз впливу форми штамп, розмірів плити та коефіцієнта Пуассона матеріалу плити на поведінку функції, яка описує потенційну енергію формозміни.

Conclusions. In the article the plate, which is located in a spatial deformation under the action of a stamp is analysed. The analytical expressions for the function that defines the structural strength for the fourth criterion of strength have been presented. The most dangerous in terms of strength plate areas are highlighted. Further systematic analysis of the influence of the shape stamp sized plates and Poisson's ratio of the material slab on the behavior of the function that describes the potential energy of forming is planned to be coaried out.

Список використаної літератури

1. Гузь, А.Н. О построении нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемых тел [Текст] /А.Н. Гузь //Вестник ЧГПУ. – Серия: Механика предельного состояния. – 2010. – №8. – С. 79–86.
2. Малыгин, Г.А. Анализ параметров субмикронной дислокационной структуры в металлах при больших пластических деформациях [Текст] / Г.А. Малыгин // Физика твердого тела. – 2004. – Т. 46, №11. – 274 с.
3. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] /В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – Москва: ГИФМЛ, 1960. – 490 с.
4. Величко, О.В. Плоска періодична контактна задача для багаточислової основи [Текст] /О.В. Величко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Механіка. – Дніпропетровськ:

- видавництво ДНУ. – 2005. – №10(1). – Вип.9. Т.1. – С.118–124.
5. Штефан, Т.О. Дослідження енергії формозміни в плиті, яка деформується штампом [Текст] / Т.О. Штефан, О.В. Величко//Новітні матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – Запоріжжя. – 2013. – № 1. – С.97–100.
 6. Плотников, В.П. Теоретическое исследование упруго-пластического состояния бетонных блоков при нагружении внутренним давлением воды [Текст] /В.П. Плотников // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2006. – №. 9. – С. 24–31.
 7. Дильман, В.Л. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне [Текст] /В.Л. Дильман // Bulletin of SUSU. – 2009. – С. 56–72.

Отримано 09.09.2013