

УДК 539.3

Н. ЯРЕЦЬКА

Хмельницький національний університет

ЗМІШАНА СТАТИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО ШАРУ І ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

Резюме. У рамках лінеаризованої теорії пружності представлено осесиметричну змішану задачу про тиск пружного циліндричного штампа на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження представлено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, перетворення Ханкеля, інтегральні рівняння типу Фредгольма, метод послідовних наближень.

N. Iaretska

MIXED STATIC CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC LAYER AND CYLINDRICAL PUNCH WITH INITIAL (RESIDUAL) TENSION.

Summary. The article deals with the mixed type problem of measuring pressure of an elastic cylinder punch upon a layer with initial stresses within the linearized elasticity theory. Two cases are analyzed: 1) the layer is placed on an elastic surface without friction; 2) the layer is fastened to an elastic surface. In general the research was carried out for the theory of finite initial (large) deformations and different variants of the theory of small initial deformations with the arbitrary structure of elastic potential. It is assumed that elastic potentials are two continuously differentiated functions of algebraic invariants of the Green tensor deformation (the initial states of the layer and of the cylindrical punch remains uniform and equal). The research is carried out within the coordinates of the initial deformed state which are interrelated with the Lagrangian coordinates (natural state). Besides, it is also assumed that influence of the punch causes slight disorders of the main stress-strain state.

It is assumed that the elastic cylindrical punch as well as the layer is made of different isotropous, transversely isotropic or composite materials and they are interacting on one of the punch's surfaces.

The stress-strain state in the elastic layer with initial stresses will be defined with the help of harmonic functions as the Henkel integrals. It should be noted, that although the Henkel-method does not provide exact solutions, but they make it possible to reduce the task to the Fredholm equations, which result in the effective use of the method of consecutive approximations. Thus, the relation for components of potential vector and tensor of deformations in the case of equal roots of axis-symmetrical type problem has been obtained.

As the result the solution is presented as series with the help of infinitive system of constants. These constants are defined from the regular linear algebraic systems. The problem of the influence of initial stresses on the law of distribution of contact disorders in the elastic layer with initial stresses has been investigated.

Key words: linearized elasticity theory, initial tension, Henkel integrals, Fredholm equations, method of consecutive approximations.

Умовні позначення:

E – модуль пружності 1 роду;

λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового (залишкового) стану;

y_i – координати початкового деформованого стану;

x_i – лагранжеві координати;

H_1 – товщина шару в початковому деформованому стані;

H_2 – товщина шару у недеформованому стані;

$J_\nu(x), I_\nu(x)$ – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу.

Вступ. Одним із важливих факторів контактної взаємодії є врахування початкових (залишкових) напружень [1]. Не зважаючи на суттєві досягнення у розвитку контактних задач, питання врахування початкових напружень при контактній взаємодії тіл залишилося не дослідженим до останнього часу. Як відомо, практично в усіх елементах конструкції присутні початкові напруження. Останні можуть бути викликані різними причинами, наприклад, технологічними операціями, що виконуються при виготовленні цілого ряду матеріалів або при складанні конструкцій. У випадку композиційних матеріалів початкові напруження, як правило, відповідають напруженням уздовж армуючих елементів. У земній корі вони утворюються за рахунок дії гравітаційних сил і технічних процесів. Їх необхідно враховувати при розв'язуванні задач про деформацію ґрунтів (особливо мерзлих). Крім цього, у пружнопластичних тілах також можуть бути присутні внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження.

Врахування початкових напружень у розрахунках відповідальних елементів конструкцій, машин та споруд дозволить під час їх створення ефективніше враховувати ресурси міцності матеріалів шляхом правильного оцінювання запасів міцності й суттєво знизити їх матеріаломісткість, зберігаючи необхідні фундаментальні характеристики в цілому.

Контактним задачам про тиск без тертя жорсткого кругового штампа на шар з початковими напруженнями присвячені роботи [2, 3], у яких використовуються загальні розв'язки просторових лінеаризованих осесиметричних задач. У статті [4] розглядається загальна просторова задача про тиск пружного штампа довільного поперечного перетину на пружний півпростір без урахування сил тертя. Детальний огляд задач контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями представлений у [5, 6].

Нижче у рамках лінеаризованої теорії пружності [7] представлено розв'язок змішаної осесиметричної задачі про тиск пружного циліндричного штампа скінченної довжини з початковими (залишковими) напруженнями на пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями. Розглянуто випадки, коли шар лежить на жорсткій основі без тертя і шар закріплений із нею після виникнення там початкового деформованого стану. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Припускаємо, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [7], а початкові (залишкові) деформовані стани у шарі та штампі однорідні та однакові. Крім того, дія штампа викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану Oy_i , які пов'язані з лагранжевими координатами співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i \quad (i = \overline{1,3})$.

Величини, які відносяться до пружного штампа, будемо записувати у позначеннях [7] з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до пружного шару, – з індексом (2).

Постановка задачі й основні співвідношення. Нехай пружний циліндричний штамп радіуса R і висотою H з початковими (залишковими) напруженнями втискається у пружний шар під дією сили P після виникнення там початкового деформованого стану. H_1 – товщина шару в початковому деформованому стані, яка пов'язана з товщиною H_2 у недеформованому стані відношенням $H_1 = \lambda_3 H_2$. Збурення під дією сили P , що прикладена до вільного торця циліндричного штампа, викликають його

переміщення у напрямку осі Oy_3 на сталу величину ε . Вважатимемо, що поверхні поза областю контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил.

У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_i) ($i = \overline{1,2}$) такій постановці відповідають такі граничні умови:

$$1) \text{ на торці пружного штампуги } z_i = \frac{H}{v_i}, \text{ де } v_i = \sqrt{n_i}, (i = \overline{1,2})$$

$$u_3^{(1)} = -\varepsilon; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (1)$$

$$2) \text{ на границі пружного шару в області контакту } z_i = 0$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}; \quad \tilde{Q}_{33}^{(1)} = \tilde{Q}_{33}^{(2)} \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r \leq R); \quad (2)$$

$$3) \text{ на границі пружного шару поза областю контакту } z_i = 0$$

$$\tilde{Q}_{33}^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (R \leq r < \infty); \quad (3)$$

$$4) \text{ на боковій поверхні пружного штампуги } r = R$$

$$\tilde{Q}_{rr}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_{3r}^{(1)} = 0 \quad (0 \leq z_i \leq \frac{H}{v_i}). \quad (4)$$

На нижній поверхні шару, що лежить на жорсткій основі та закріпленого з основою, $z_i = -\frac{\lambda_3 H_2}{v_i} = -\frac{H_i}{v_i}$ ($i = \overline{1,2}$),

$$u_3^{(2)} = 0 \quad \tilde{Q}_{3r}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (5)$$

$$u_3^{(2)} = 0 \quad u_r^{(2)} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (6)$$

де $z_i = \frac{y_3}{v_i}$, ($i = \overline{1,2}$) товщина шару в недеформованому стані; n_i – корені рівняння [7, (2.11)].

Випишемо також умову рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням і рівнодіючої навантаження P

$$P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho Q_{33}^{(2)}(0, \rho) d\rho. \quad (7)$$

Для визначення напружено-деформованого стану у пружному циліндрі використовуємо лінеаризовані рівняння [7], з яких випливають вирази для компонент вектора переміщення і тензора напруження для стисливих і нестисливих тіл. Причому, загальний розв'язок $\chi = \chi_1 + z_1 \chi_2$ для випадку рівних коренів $n_1 = n_2$ будемо шукати у вигляді

$$\chi = \varepsilon \left\langle v_1 z_1 (1 + z_1) \left[\frac{1}{m_2 - 1} + \chi_0 \left(\frac{1}{1 - m_2} - \frac{2E}{3H\theta_2} (3r^2 - 2z_1^2) \right) \right] + \right. \\ \left. + R \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left[\frac{R}{2\gamma_k} b_1^{(k)} \left(H \left(1 + \frac{s_0(1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + z_1 \right) I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k z_1 v_1) + \frac{J_0(\alpha_k r)}{\mu_k} (\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + z_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1)) \right] \right\rangle$$

та

$$U_r = \varepsilon \left\langle \frac{4E v_1}{H \theta_2} \chi_0 r \left(\frac{1}{v_1} + 2z_1 \right) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ \frac{R^2}{2} b_1^{(k)} \gamma_k v_1 I_1(v_1 \gamma_k r) \left[\left(H \left(1 + \frac{s_0(1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + v_1 z_1 \right) \cos(\gamma_k v_1 z_1) + \frac{\sin(\gamma_k v_1 z_1)}{\gamma_k} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - J_1(\alpha_k r) \left[\frac{\alpha_k}{v_1} (\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1)) - \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
 U_3 = & \varepsilon \left\langle \frac{m_2 - 1}{v_1} + \left[1 - \frac{2E}{H\theta_2} \left(r^2 - 2z_1^2 + 4m_1 z_1 \left(\frac{1}{v_1} + z_1 \right) \right) \right] \chi_0 + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ \frac{R^2}{2} b_1^{(k)} \gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) \left[H \left(1 + \frac{s_0(1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + v_1 z_1 \right] m_1 \sin(\gamma_k v_1 z_1) + \frac{(1 - m_2) \cos(\gamma_k v_1 z_1)}{\gamma_k} \right\} - \\
 & \left. - \frac{J_0(\alpha_k r)}{n_1} \left[m_1 \alpha_k (\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + z_1 v_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1)) + (m_2 - 1) v_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right] \right\rangle \\
 Q_{33} = & C_{44} \varepsilon \left\langle - \frac{8E v_1}{H\theta_2} \chi_0 \left[(1 + m_1) l_1 \left(\frac{1}{v_1} + z_1 \right) + (1 + m_2) l_2 z_1 \right] + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ \frac{R^2}{2} b_1^{(k)} \gamma_k n_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \left[(1 + m_1) l_1 \gamma_k \left(H \left(1 + \frac{s_0(1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + v_1 z_1 \right) \cos(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (1 + m_2) l_2 \sin(\gamma_k v_1 z_1) \right] - \alpha_k J_0(\alpha_k r) \left[\frac{(1 + m_1) l_1 \alpha_k}{v_1} (\tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_5(\alpha_k z_1)) + (1 + m_2) l_2 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} \right\rangle \quad (8) \\
 Q_{3r} = & C_{44} \varepsilon \left\langle \frac{4Er(1 + m_2)}{H\theta_2} \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ \frac{R^2}{2} \gamma_k v_1 b_1^{(k)} I_1(\gamma_k v_1 r) \left[(1 + m_1) \gamma_k \left(H \left(1 + \frac{s_0(1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + v_1 z_1 \right) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (1 + m_2) \cos(\gamma_k v_1 z_1) \right] + \frac{\alpha_k}{v_1} J_1(\alpha_k r) \left[\alpha_k (1 + m_1) (\tilde{S}_2(\alpha_k z_1) + v_1 z_1 \tilde{S}_3(\alpha_k z_1)) + (1 + m_2) \tilde{S}_5(\alpha_k z_1) \right] \right\} \right\rangle \\
 Q_{rr} = & D_{44} \varepsilon \left\langle \frac{4E v_1}{H\theta_2} \chi_0 \left[\frac{1}{v_1} (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1) + (3 + \tilde{c}_0 - 4\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2) z_1 \right] - \right. \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \left\{ \frac{R^2}{2} b_1^{(k)} \gamma_k v_1 \left(\gamma_k v_1 I_0(\gamma_k v_1 r) \left[(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) \left(H \left(1 + \frac{s_0(1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + v_1 z_1 \right) \cos(\gamma_k z_1 v_1) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)}{\gamma_k} \sin(\gamma_k z_1 v_1) \right] + \frac{(1 - \tilde{c}_0) I_1(\gamma_k v_1 r)}{r} \left[\cos(\gamma_k z_1 v_1) \left(H \left(1 + \frac{s_0(1 - I_0(v_1 \gamma_k R))}{v_1 \gamma_k R I_1(v_1 \gamma_k R)} \right) + v_1 z_1 \right) + \frac{\sin(\gamma_k z_1 v_1)}{\gamma_k} \right] \right\} - \\
 & - \alpha_k J_0(\alpha_k r) \left[\frac{\alpha_k}{v_1} (\tilde{c}_0 \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) - \tilde{c}_1 \tilde{S}_2(\alpha_k z_1)) + (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] - \\
 & \left. - \frac{(1 - \tilde{c}_0) J_1(\alpha_k r)}{r} \left[\frac{\alpha_k}{v_1} \tilde{S}_4(\alpha_k z_1) + \tilde{S}_3(\alpha_k z_1) \right] \right\} \right\rangle,
 \end{aligned}$$

де $\tilde{S}_2 = E^{(k)} sh(\alpha_k z_1) + \frac{R s_0}{\mu_k} ch(\gamma_k v_1 z_1)$, $\tilde{S}_3 = -sh(\alpha_k z_1) - M^{(k)} ch(\alpha_k z_1)$,

$\tilde{S}_4 = E^{(k)} ch(\alpha_k z_1) + \frac{R s_0}{\mu_k} sh(\gamma_k v_1 z_1)$, $\tilde{S}_5 = -ch(\alpha_k z_1) - M^{(k)} sh(\alpha_k z_1)$,

$$\begin{aligned}
 b_1^{(k)} = & J_0(\mu_k) \gamma_k t_{00} \left\langle t_{14} sh^2 \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) ch \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + \right. \\
 & + t_{11} \left[(1 + m_1) sh^2 \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left[t_{12} sh \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + t_{13} \right] + ch \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \times \right. \\
 & \left. \left. \times \left[t_{10} ch \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left[c_0 sh \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + c_1 \left(1 - ch \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) \right] + c_1 (1 + m_2) sh \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(1 - ch \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) \right] \right\} \right\rangle /
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\langle (I_0(\gamma_k v_1 R) - 1) \left\{ t_{11} t_{21} t_{00} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + t_{22} \left[c_1 t_{10} \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(1 + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + (1 + m_1) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(t_{12} \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + c_1 s_0 + t_{23} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) \right] \right\} + c_1 \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) - 1 \right) \left[t_{10} \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + \right. \\
 & \left. \left. + (1 + m_2) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right] + \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left[c_0 t_{10} \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) - t_{24} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right] \right\rangle \\
 E^{(k)} = & - \left\langle I_1(\gamma_k v_1 R) \mu_k^2 \gamma_k v_1^3 R^3 (m_2 - 1) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(t_{23} \left(1 - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) - t_{01} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(t_{15} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + (1 + m_2) t_{23} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{t_{00}}{\mu_k^2} (I_0(\gamma_k v_1 R) - 1) \left\{ \left[t_{10} t_{25} \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + t_{16} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + t_{17} t_{23} \right] \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left[t_{18} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + t_{17} t_{23} (1 + m_2) \right] \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right\} \right\rangle / \left\langle \alpha_k \left\{ \left[\left(c_1 t_{10} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) - 1 \right) - \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - (1 + m_1) t_{12} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) t_{23} (1 + m_1) - c_1 (1 + m_2) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right] I_1(\gamma_k v_1 R) \mu_k^2 \gamma_k v_1^3 R^3 (m_2 - 1) + \frac{t_{00}}{\mu_k^2} (I_0(\gamma_k v_1 R) - \right. \\
 & \left. - 1) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(c_1 t_{17} \left(1 - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) + t_{18} t_{12} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(t_{18} - (1 + m_1) t_{25} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) \right] \right\} \right\rangle \\
 M^{(k)} = & \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left\langle -t_{04} \left[t_{13} \left(1 - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right) - t_{12} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + (I_0(\gamma_k v_1 R) - 1) (1 + m_1) \mu_k^2 \left\{ \mu_k^2 t_{21} t_{11} \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + v_1^2 \left[v_1 (1 - m_2) \left(t_{19} \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + 2(c_2 + c_0 - c_1) \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + t_{20} \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + 2(1 - m_2) \left(t_{12} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + t_{02} \right) \right] \right\} \right\rangle / \left\langle t_{04} \left[t_{05} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - v_1 (c_2 + c_0 - c_1) \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(c_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + c_1 \right) \right] + \right. \\
 & \left. + (I_0(\gamma_k v_1 R) - 1) \mu_k^2 \left\{ -\mu_k^2 t_{21} t_{11} (1 + m_1) \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + v_1^2 \left[t_{03} \left(\frac{v_1}{2} t_{19} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + t_{05} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \left(t_{27} \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + 2c_1 (m_2^2 - 1) \right) \right] \right\} \right\rangle \\
 t_{00} = & \mu_k^2 (\mu_k^2 + R^2 v_1^2 \gamma_k^2), \quad t_{01} = (1 + m_2) t_{23} + t_{10} \tilde{c}_1 s_0, \quad t_{02} = 2(H \tilde{c}_1 \alpha_k - \tilde{c}_0 s_0), \quad t_{03} = 2(m_1 + 1)(m_2 - 1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{04} &= \frac{1}{2} t_{03} \gamma_k R^2 v_1^3 (2v_1 \gamma_k (I_0(v_1 \gamma_k R) - 1) - \mu_k^2 R I_1(v_1 \gamma_k R)), \quad t_{05} = t_{12} sh \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) + H \bar{c}_1 \alpha_k \left(1 - ch \left(\frac{\alpha_k H}{v_1} \right) \right), \\
 t_{10} &= \alpha_k H (m_1 + 1), \quad t_{11} = v_1 (1 - m_2) + s_0 m_1, \quad t_{12} = \alpha_k H \bar{c}_0 - \bar{c}_1 s_0, \quad t_{13} = v_1 (\bar{c}_2 - \bar{c}_1 + \bar{c}_0) + \alpha_k H \bar{c}_1 - \bar{c}_0 s_0, \\
 t_{14} &= \alpha_k H \bar{c}_1 (v_1 (m_1 + 1) (m_2 - 1) + m_1 (1 + m_2)), \quad t_{15} = v_1 (\bar{c}_0 - \bar{c}_1 + \bar{c}_2) t_{10} - \bar{c}_1 s_0 (m_2 + 1), \\
 t_{16} &= \mu_k^2 (t_{21} H s_0 m_1 (m_2 + 1) - t_{21} v_1 (m_2^2 - 1)) + 2v_1^2 (t_{23} (m_2^2 - 1) + \bar{c}_1 s_0 \alpha_k (m_2 - 1) (m_1 + 1)), \\
 t_{17} &= 2v_1^2 t_{10} (1 - m_2), \quad t_{18} = 2v_1^2 (m_2 - 1) (1 + m_1), \quad t_{19} = t_{21} \gamma_k^2 R^2 + 2(\bar{c}_1 - \bar{c}_0 - \bar{c}_2), \\
 t_{20} &= \gamma_k^2 H^2 R^2 s_0 m_1 (2\bar{c}_2 + 3 - 4\bar{c}_1 + \bar{c}_0) + H (2\bar{c}_1 \alpha_k (m_2 - 1) + m_1 \gamma_k^2 R^2 s_0 (1 + \bar{c}_0 - 2\bar{c}_1)) + 2\bar{c}_0 s_0 (1 - m_2), \\
 t_{21} &= H (H (3 + 2\bar{c}_2 - 4\bar{c}_1 + \bar{c}_0) + 1 + 2\bar{c}_1 + \bar{c}_0), \quad t_{22} = 2v_1^4 \gamma_k^2 R^2 (m_2 - 1), \quad t_{23} = v_1 (\bar{c}_2 - \bar{c}_1 + \bar{c}_0) - \bar{c}_0 s_0, \\
 t_{24} &= v_1 (1 + m_1) (\bar{c}_2 - \bar{c}_1 + \bar{c}_0) + \bar{c}_0 (1 + m_2), \quad t_{25} = \mu_k^2 t_{11} t_{21} + 2t_{23} v_1^2 (m_2 - 1), \\
 t_{26} &= t_{21} \gamma_k^2 R^2 m_1 - 2\bar{c}_0 (m_2 - 1), \quad t_{27} = (m_2 + 1) t_{26}.
 \end{aligned}$$

Напружено-деформований стан у пружному шарі з початковими напруженнями визначимо з [4] через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля. Задовольнивши третю умову (2), другу – (3) і умови (5), (6), після ряду перетворень матимемо

$$u_3^{(2)} = \theta_3 \left(\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} G(\eta h) J_0(\eta \rho) d\eta \right) \quad (9)$$

$$Q_{33}^{(2)} = \theta_1 \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta; \quad Q_{3r}^{(2)} = 0,$$

де $s_0 = \frac{1+m_2}{1+m_1}$; $s_1 = \frac{m_1-1}{m_1}$; $s_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{v_1}{v_2}$; $s_3 = s_0 \frac{v_1}{v_2}$; $s = s_0 \frac{l_2}{l_1}$; $\theta_1 = C_{44} l_1 (1+m_1) \kappa$

$$G(\eta h) = 1 - q_i^{-1}(\eta h); \quad h = H_1 / R; \quad \varphi_i = 2\eta \frac{h}{\sqrt{n_i}}; \quad \theta_3 = \frac{m_1 (s_1 - s_0)}{v_1};$$

$$q_i = \begin{cases} (sh2\varphi_1 + 2\varphi_1 / s - s_0)(ch2\varphi_1 - 1)^{-1} & \text{для (5);} \\ \frac{(1-s)(s_0 - s_1) + (1-s_1)(s_0 - s)sh^2\varphi_1 + \varphi_1^2}{\varphi_1 - (1-s_1)sh\varphi_1 ch\varphi_1} & \text{для (6)} \end{cases} \quad (10)$$

В (10) значення коефіцієнтів n_i , m_i , c_{44} , l_i , κ наведені у [7].

Метод розв'язування. Використовуючи розв'язки для циліндра (8) й задовольняючи третю умову (2) та другу умову (4), знайдемо власні значення задачі (1) – (6) для випадку рівних коренів $n_1 = n_2$

$$\gamma_k = \frac{2\pi k}{H}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \text{де } J_1(\mu_k) = 0. \quad (11)$$

Інші умови призводять до рекурентних співвідношень між довільними сталими та невідомими χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), які введемо за допомогою співвідношень

$$\int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta) d\eta = -\frac{8\varepsilon E}{\kappa \theta_2 l R} \chi_0, \quad \chi_k = -\frac{\mu_k N_k}{\varepsilon R}.$$

З другої граничної умови (2), враховуючи значення інтегралів

$$\int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) J_0(\mu_k \rho) d\rho = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \frac{1}{2} J_0^2(\mu_k), & k = n; \end{cases}$$

$$\int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) I_0(\gamma_k v_1 R \rho) d\rho = \frac{\gamma_k v_1 R I_1(\gamma_k v_1 R) J_0(\mu_n)}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_1^2 R^2},$$

матимемо

$$\int_0^{\infty} F(\eta) d\eta \int_0^1 \rho J_0(\eta\rho) J_0(\mu_k\rho) d\rho = \frac{\varepsilon R}{2\kappa} \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2 v_1^2 J_0(\mu_k) b_1^{(n)} (\gamma_m v_1 R I_1(\gamma_m v_1 R) + s_0 (1 - I_0(\gamma_m v_1 R)))}{\mu_k^2 + \gamma_m^2 v_1^2 R^2} H \chi_m - \right. \\ \left. - \frac{\mu_k}{R^2} J_0^2(\mu_k) \left(\frac{\mu_k}{R v_1} E^{(k)} + s M^{(k)} \right) \chi_k \right\rangle$$

А з перших умов (2) і (3) можна визначити невідому функцію $F(\eta)$ із парних інтегральних рівнянь для рівних коренів

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta = f(\rho), \quad (\rho < 1), \\ \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad (\rho > 1), \quad (12)$$

де

$$f(\rho) = -\frac{\varepsilon}{\theta_3} \left(1 - \chi_0 - \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \rho + \frac{v_1(m_2 - 1) - m_1 s_0}{n_1} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k J_0(\mu_k \rho) + \right. \\ \left. + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \right) + \int_0^{\infty} \frac{F(\eta) G(\eta h) J_1(\eta\rho)}{\eta} d\eta.$$

Застосування формули обернення до (12) призводить до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно функції $F(\eta)$

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2}{\pi\theta_3} p(\eta) + \frac{2}{\pi_0} \int_0^{\infty} \frac{F(u) G(uh) \psi_0(\eta, u)}{u} du, \quad (13)$$

де

$$p(\eta) = \varepsilon \left((1 - \chi_0) \psi_0(\eta, 0) - \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k v_1 R) \right)$$

$$\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt, \quad \psi_0(x, y) = \frac{x \sin x \cos y - y \sin y \cos x}{x^2 - y^2},$$

$$\psi_0(x, iy) = \frac{x \sin x \cosh y + y \sinh y \cos x}{x^2 + y^2}, \quad \psi_0(x, 0) = \frac{\sin x}{x}, \quad \psi_1(x, 0) = \frac{\cos x - 1 + x \sin x}{x^2}$$

$$\theta_2 = E \left(\frac{8m_1(1+H)}{n_1} - \frac{4H}{v_1} + \frac{(1-m_2)R^2}{H} \right), \quad \theta_4 = \frac{v_1(m_2 - 1) - m_1 s_0}{n_1}.$$

Розв'язок (13) будемо шукати методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення функцію

$$\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = -\frac{2}{\pi\theta_3} p(\eta).$$

Наступні наближення визначимо за формулою

$$\frac{F^{(k)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi_0} \int_0^{\infty} \frac{F^{(k-1)}(u)}{u} G(uh) \psi_0(\eta, u) du$$

та розв'язок (13) запишемо у вигляді

$$F(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(\eta). \quad (14)$$

Відзначимо, що процес послідовних наближень (14) збіжний при $h > 1$, але зважаючи на громіздкість доведення воно тут не наведено.

Задовільнивши перші дві граничні умови (2) з урахуванням ортогональності бesselевих функцій $J_0(\mu_k \rho)$ та значень інтегралів

$$\int_0^\infty \eta \Psi_0(\eta, \mu_k) d\eta \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0(\mu_n \rho) d\rho = \int_0^\infty \eta \Psi_1(\eta, \mu_k) d\eta \int_0^1 \rho J_0(\eta \rho) J_0(\mu_n \rho) d\rho = \Psi_0(\mu_n, \mu_k),$$

$$\int_0^\infty \Psi_0(\eta, \mu_k) J_1(\eta) d\eta = \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho) d\rho \int_0^\infty \eta \Psi_n(\eta, 0) J_0(\eta \rho) d\eta = \Psi_0(0, \mu_k),$$

$$\frac{2}{\pi} \eta \int_0^1 \cos \eta t dt \int_0^\infty \frac{\Psi_{j-1}(u, \mu_n)}{u} G(uh) \cos ut du = \Psi_j(\eta, \mu_n),$$

для визначення сталих χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^\infty \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{15}$$

Коефіцієнти системи можна представити у вигляді

$$\vartheta_0 = \frac{1}{\pi} \left[1 + \frac{(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \left(\Psi_0(u, 0) + \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \Psi_1(u, 0) \right) G(hu) \Psi_{j-1}(u, 0) du \right];$$

$$\varpi_0 = \frac{1}{\pi} \left[1 - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \Psi_0(u, 0) G(hu) \Psi_{j-1}(u, 0) du \right]; \quad \vartheta_k = \frac{\mu_k J_0^2(\mu_k)}{2\theta_3 \kappa R} \left[\frac{\mu_k}{Rv_1} E^{(k)} - sM^{(k)} \right];$$

$$\vartheta_{0n} = \frac{1}{\pi} \left[\theta_4 \Psi_0(0, \mu_n) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(n)} \Psi_0(0, i\gamma_n v_1 R) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \left(\theta_4 \Psi_0(u, \mu_n) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(n)} \Psi_0(u, i\gamma_n v_1 R) \right) G(hu) \Psi_{j-1}(u, \mu_n) du \right];$$

$$\vartheta_{00} = \frac{2E}{\kappa \theta_2 \theta_3 l R}; \quad \varpi_k = \frac{2}{\pi} \left[\Psi_0(0, \mu_k) + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\Psi_{j-1}(u, \mu_k)}{u} G(hu) \Psi_{j-1}(u, 0) du \right];$$

$$\vartheta_{k0} = \frac{2}{\pi} \left[\Psi_0(0, \mu_k) + \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \frac{\sin \mu_k}{\mu_k} + \frac{2}{\pi \epsilon \theta_3} \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \left(\theta_4 \frac{\Psi_{j-1}(u, \mu_k)}{u} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(k)} \frac{\Psi_{j-1}(u, i\gamma_k v_1 R)}{u} \right) G(hu) \Psi_{j-1}(u, 0) du \right]; \tag{16}$$

$$\vartheta_{kn} = -\frac{2}{\pi} \left[\theta_4 \Psi_0(\mu_k, \mu_n) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(k)} \Psi_0(\mu_k, i\gamma_n v_1 R) + \frac{2}{\pi \epsilon \theta_3} \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \left(\theta_4 \frac{\Psi_{j-1}(u, \mu_k)}{u} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(k)} \frac{\Psi_{j-1}(u, i\gamma_k v_1 R)}{u} \right) G(hu) \Psi_{j-1}(u, \mu_k) du + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{2\kappa \theta_3} \sum_{m=1}^\infty \frac{\gamma_m^2 v_1^2 J_0(\mu_k) b_1^{(n)} (\gamma_m v_1 R I_1(\gamma_m v_1 R) + s_0(1 - I_0(\gamma_m v_1 R)))}{\mu_k^2 + \gamma_m^2 v_1^2 R^2} \right].$$

При обчисленні функції (14) й коефіцієнтів (16) більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються, враховуючи складність функцій q_i ($i = 1, 2$). Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаються у ряди по степенях $\frac{1}{h}$, що дозволить обчислити коефіцієнти системи (16) наближено. Для шару, що лежить на жорсткій основі без тертя (5), при $n_1 = n_2$ апроксимуємо функцію $q_1^{-1}(x)$ виразом

$$q_1^{-1}(x) \cong 1 - \frac{1}{\tilde{\chi}_1 + 1} \frac{x}{shx} - \frac{0,14}{\tilde{\chi}_1(\tilde{\chi}_1 + 1)} \frac{x}{\tilde{n}hx},$$

де $\tilde{\chi}_1 = s - s_0$.

Використовуючи умову рівноваги, встановимо зв'язок між осадом торця штампа та рівнодіючою навантаження P

$$P = \frac{8\pi\epsilon E\theta_1}{\kappa\theta_2 l R} \chi_0.$$

Визначивши невідомі сталі χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) із системи (15), можна обчислити напружено-деформівний стан як у пружному штампі, так і в шарі за формулами (8) – (9), (14). У результаті цього розв'язок представлений у вигляді рядів через нескінченну систему констант, що визначаються із системи регулярних лінійних алгебраїчних рівнянь.

Чисельний аналіз. Система (15) розв'язана методом редукції для таких значень параметрів: $k=n=16$; $\nu=\nu_1=0,3$; $l=10$; $\lambda_1=0,7; 0,9; 1; 1,2; 1,3$; $h=1,6; 4,0$; $\delta=2$; $\left(\delta = \frac{E}{E_1}\right)$. На рис. 1, 2 зображено розподіл напружень для стисливих тіл (гармонічний потенціал) у циліндрі й на границі шару в області контакту.

На графіках пунктирні лінії відповідають шару без початкових напружень ($\lambda_1 = 1$), суцільні – шару з початковими (залишковими) напруженнями ($Q^{(2)} = -\frac{\pi R^2}{P} \tilde{Q}_{33}$), які відповідають значенням λ_1 знизу догори по зростанню λ_1 .

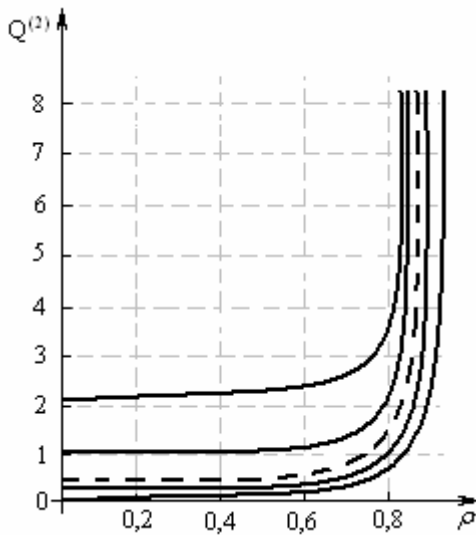


Рисунок 1. Розподіл контактного напруження під штампом ($h=1,6$)

Figure 1. Distribution of contact stresses under the stamp ($h=1,6$)

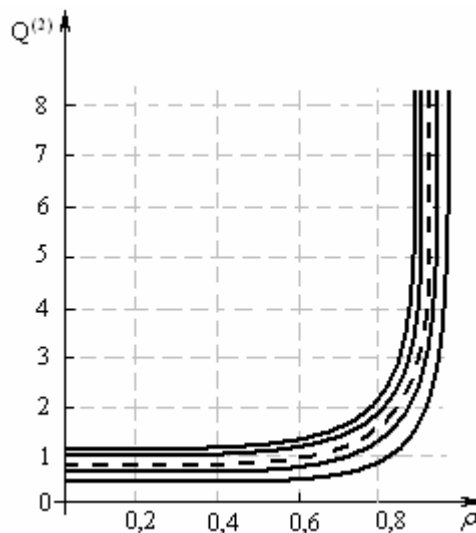


Рисунок 2. Розподіл контактного напруження під штампом ($h=4,0$)

Figure 2. Distribution of contact stresses under the stamp ($h=4,0$)

Висновки. На основі аналізу аналітичного розв'язку та чисельних підрахунків виявлено вплив початкових напружень на напружено-деформовані стани пружного циліндра та пружного шару, що контактують, який полягає у тому, що початкові напруження в шарі та циліндрі призводять у випадку стиснення до зменшення напружень, а у випадку розтягу – до їх збільшення, а для переміщень у випадку стискання значно збільшуються, і при розтягненні – зменшуються. Найбільший вплив початкових напружень виявлено на боковій поверхні штампа. Причому, характер впливу початкових напружень не залежить від товщини шару. Дія початкових напружень впливає тільки на їх величину.

Відзначено ефект «резонансного» характеру не тільки у шарі, але й у пружному циліндрі (при наближенні початкових напружень до значень, що відповідають поверхневій нестійкості шару), який полягає в тому, що напруження наближаються до нуля, а переміщення необмежено зростають.

Отримано аналітичні залежності, що відображають вплив початкових напружень на напружено-деформований стан системи «пружний циліндр – пружний шар» з початковими (залишковими) напруженнями. Цей вплив є суттєвим як для стисливих, так і нестисливих тіл та повинен враховуватися при розрахунках на міцність деталей машин і конструкцій.

Conclusions. Based on the analytical solution and numerous calculations the effect of initial stresses on the stress-strain states of an elastic cylinder and an elastic layer that are in contact have been defined. These are the following: the initial stress in the layer and in the cylinder punch reduce stress and tension of the punch and the layer in case of their compression and increase in the case of their strain; reduce in case of stretching. The greatest influence of initial stresses was found on the side surface of the punch. Moreover, the impact of initial stress is independent of the layer thickness. Effects of initial stress affect only its value.

The effect of "resonant" nature not only in the layer but also in the elastic cylinder (when initial stresses are approaching the values of the surface layer instability) has been testified. This impact is explained by the fact that tension is close to zero, and the displacement increases infinitely.

Thus, in this work the analytical dependence was obtained. It testified the influence of initial stresses on the stress-strain state of the system "elastic cylinder - elastic layer" with initial stress. This influence is essential for compressible and incompressible bodies and this influence should be taken into account while calculating strength of machine parts and their structures.

Список використаної літератури

1. Гузь, А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам [Текст] / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, №7. – С. 41 – 69.
2. Рудницкий, В.Б. К вопросу контактной задачи для предварительно напряженного слоя [Текст] / В.Б. Рудницкий, С.Ю. Бабич // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, №5. – С. 110 – 112.
3. Гузь, А.Н. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1983. – Т. 273, №6. – С. 1329 – 1332.
4. Гузь, А.Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, №8. – С. 3 – 11.
5. Гузь, А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (упругие штампы) (обзор) [Текст] / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, №9. – С. 3 – 28.
6. Guz A.N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. Focus on Ukrainian research / A.N. Guz, S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky // Apple Mech. Rev. Vol 51, nos May 1998. – p. 343 – 371.
7. Гузь, А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницький, изд. ПП Мельник, 2006. – 710 с.

Отримано 04.04.2013