Г.Габрусєв. Методика наближеного розв’язання рівняння Фредгольма першого роду в деяких осесиметричних задачах механіки деформівного твердого тіла / Г.Габрусєв, Б.Шелестовський // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 70. — № 2. — С.202-208. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 517.9

Г. Габрусєв, канд. фіз.-мат. наук;
Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МЕТОДИКА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ В ДЕЯКИХ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Резюме. *Проведено представлення наближеного розв’язку рівняння Фредгольма першого роду у вигляді полінома за ортогональними функціями. Проаналізовано можливість застосування варіаційної задачі з нерухомими кінцями та задачі поточкового зведення розв’язку до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів полінома. Отримано умову для вибору оптимальної кількості членів полінома-розв’язку.*

Ключові слова: *рівняння Фредгольма першого роду, регуляризація, многочлен, функції Бесселя, система лінійних алгебраїчних рівнянь.*

H. Habrusiev, B. Shelestovskyi

METHODS OF APPROXIMATE SOLUTION OF THE FRENDHOLM FIRST KIND EQUATION IN SOME AXISYMMETRIC TASKS OF FRACTURE MECHANICS

Summary. *While solving many applied tasks, axisymmetric contact problems of elasticity and thermoelasticity in particular, it arises a need to build an approximate solution of the Fredholm first kind equations. However, the problem of finding the solution of these equations is incorrect [1], since even small errors in the calculation of the right side of the equation or the core can result in distortion of the solution. For a long time reasonability of solving problems of this type was under question. However, with the appearance of various regularization methods it became possible to search approximate solutions of the Fredholm first kind equations [2-8].*

Classical the Lavrentiev and Tikhonov methods are adapted to be used for finding approximate solutions of the Fredholm first kind equations that arise in solving of axisymmetric problems of fracture mechanics. Desired function as a linear combination of polynom by cylindrical functions with unknown coefficients was presented. Then the system for finding these unknown coefficients, and hence the approximation of the desired function was obtained. Besides, the conditions for choosing the optimal number of polynom solution members are obtained.

However, the direct use of classical methods for solving of the Fredholm first kind equations in the applied problems of fracture mechanics becomes more complicated problem because of the necessity of finding the regularization parameter. In many cases, while solving axisymmetric contact problems of elasticity theory in particular [9], simpler approach can be used.

After the unknown functions in a generalized Fourier series with unknown coefficients for orthogonal functions of a special type are presented, integrating of the left and right side of the equation are made. The systems of linear algebraic equations for finding of these coefficients are obtained.

The characteristic feature of the obtained system is that the increase of the number of equations results in the increase of the accuracy of the approximation solution. It makes possible to build solutions with arbitrary predetermined accuracy.

Key words: *the Frendholm first kind equation, regularization, polynom, Bessel functions, the system of linear algebraic equations.*

Вступ. При розв’язанні багатьох прикладних задач, зокрема осесиметричних контактних задач теорії пружності та термопружності, виникає необхідність побудови наближеного розв’язку рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b y(t)K(t,r)\,dt = f(r), \qquad a \le r \le b. \tag{1}$$

Існує велика кількість важливих і різноманітних фізичних та технічних задач, що потребують розв'язання рівнянь такого типу. До них відносяться такі: задачі спектроскопії, синтезу антен, редукції спостережень мікрооб'єктів, інтерпретації кривих блиску затемнених зоряних систем, визначення функції розподілу конфігурації потрійних зірок, задачі масового обслуговування, визначення швидкості звуку в рідині тощо.

Проте задача знаходження розв'язку (1) є некоректною [1], оскільки навіть малі відхилення правої частини $f(r)$ чи ядра $K(t,r)$ можуть призводити до настільки великих похибок, що отриманий розв'язок буде далекий від шуканої функції. Наприклад, якщо розв'язувати рівняння (1) за допомогою методу квадратурних формул [2], замінивши інтеграл в (1) скінченою сумою за формулою трапецій зі сталим кроком h і розв'язавши отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень $y(a)$, $y(a+h)$, …, $y(b)$, то замість шуканого розв'язку (1), як правило, отримується так звана знакозмінна великоамплітудна «пилка». При цьому зменшення кроку h, яке здавалося б мало збільшувати точність апроксимації, навпаки збільшує амплітуду та частоту цієї «пилки».

Тривалий час взагалі ставилася під сумнів доцільність розв'язання задач такого типу. Проте із появою різноманітних методів регуляризації рівняння (1) стало можливим шукати наближені розв'язки інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. У сучасній літературі можна знайти багато числових методів, серед них: метод регуляризації Тихонова [1], метод помірного псування Лаврентьєва [3], методи статистичної регуляризації [4, 5], метод ітерацій [6], метод частинного інтегрування [7] тощо.

Метою роботи є розроблення методики відшукання наближених розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (1), що виникають при розв'язанні осесиметричних задач механіки деформівного твердого тіла.

Результати дослідження. Провівши регуляризацію рівняння (1) за методом Лаврентьєва [3] (методом «помірного псування»), отримуємо рівняння Фредгольма другого роду

$$\beta y(r) + \int_a^b y(t)K(t,r)\,dt = f(r), \qquad a \le r \le b, \quad \beta > 0. \tag{2}$$

Нестійкість розв'язку рівняння (1) зумовлена тим, що спектр власних значень оператора A ($Ax = f$) згущується до нуля, в результаті чого обернений оператор A^{-1} або необмежений, або не існує. Доданок βy, зсуваючи цей спектр на величину β, «покращує» обернений оператор, підвищуючи стійкість розв'язку. Потрібно лише, щоб цей зсув був «помірним».

Для відшукування наближених розв'язків інтегрального рівняння (2) шукану функцію $\tilde{y}(r)$ подамо у вигляді полінома за функціями $\varphi_n(t) = \sqrt{t}\cdot L(t,\gamma_n)$, де $L_n(t,\gamma_n) = N_0(\gamma_n)J_0\left(\frac{t}{a}\gamma_n\right) - J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{t}{a}\gamma_n\right)$. В останньому співвідношенні $J_0(t)$ та

$N_0(t)$ – функції Бесселя та Неймана відповідно, а γ_n – додатні корені рівняння $N_0(x)J_0\left(\frac{b}{a}x\right)-J_0(x)N_0\left(\frac{b}{a}x\right)=0$. Тобто $\tilde{y}(r)$ будемо вибирати у вигляді

$$\tilde{y}(t)=\sqrt{t}\sum_{n=1}^{N}a_nL(t,\gamma_n), \tag{3}$$

де a_n – невідомі коефіцієнти.

Враховуючи (3), інтегральне рівняння (2) запишемо у вигляді

$$\beta\sqrt{r}\sum_{n=1}^{N}a_nL_n(r,\gamma_n)+\sum_{n=1}^{N}a_n\int_a^b\sqrt{t}\,L_n(t,\gamma_n)K(t,r)\,dt=f(r),\quad a\le r\le b,$$

або

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\left[\beta\sqrt{r}\,L(r,\gamma_n)+K_n(r)\right]=f(r),\qquad a\le r\le b, \tag{4}$$

де $K_n(r)=\int_a^b\sqrt{t}\,L_n(t,\gamma_n)K(t,r)\,dt$.

У прикладних задачах теорії пружності та термопружності функції $K_n(r)$ та $f(r)$ перетворюються в нуль при $r=a$ та $r=b$ і є кусково неперервними на проміжку $[a;b]$. Тому кожну з них можна представити у вигляді поліномів за функціями $\varphi_j(r)$ із невідомими коефіцієнтами $c_j^{(n)}$ та b_j відповідно

$$K_n(r)=\sqrt{r}\sum_{j=1}^{N}c_j^{(n)}L(r,\gamma_j),\ f(r)=\sqrt{r}\sum_{j=1}^{N}b_jL(r,\gamma_j). \tag{5}$$

Перепишемо співвідношення (4) із урахуванням виразів (5)

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\left[\beta L_n(r,\gamma_n)+\sum_{j=1}^{N}c_j^{(n)}L_n(r,\gamma_j)\right]=\sum_{j=1}^{N}b_jL_n(r,\gamma_j),\ \ a\le r\le b. \tag{6}$$

Помноживши ліву і праву частини останньої рівності на $\sqrt{r}\,L(r,\gamma_q)$ та проінтегрувавши отриману рівність по r від a до b, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\left[c_q^{(n)}+\beta\delta_{nq}\right]=b_q,\qquad q=1,\dots,N, \tag{7}$$

де δ_{ij} – символ Кронеккера.

Аналогічно, помноживши на $\sqrt{r}\,L(r,\gamma_q)$ ліву і праву частини рівностей (5) та проінтегрувавши отриману рівність по r від a до b, отримаємо вирази для коефіцієнтів $c_q^{(n)}$ та b_q

$$c_q^{(n)}=\frac{1}{M_q}\int_a^b\sqrt{r}K_n(r)L(r,\gamma_q)\,dr,$$

$$b_q = \frac{1}{M_q} \int_a^b \sqrt{r} f\left(r\right) L\left(r, \gamma_q\right) dr\,, \tag{8}$$

$$M_q = \int_a^b r L_n^2\left(r, \gamma_q\right) dr = \frac{b^2}{2} \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\gamma_q\right)^2} \left[R^2\left(\frac{b}{a}\gamma_q\right) - \frac{4}{\pi^2} \right].$$

Співвідношення (8) визначає систему N рівнянь відносно невідомих a_n, $n = 1, \ldots, N$. Очевидно, що її рівняння, а, отже, і функція $\tilde{y}(r)$ залежать від параметра регуляризації β.

Згідно з методом «нев'язки», запропонованим Лаврентьєвим [2], значення коефіцієнта регуляризації β потрібно вибирати із умови

$\| A\tilde{y} - f \| = \delta$,

де $\delta = \left\| \tilde{f}(r) - f(r) \right\| = \sqrt{\int_a^b [\, \tilde{f}(r) - f(r)\,]^2 \, dr}$.

Оскільки при числових розрахунках остання рівність може не виконуватись точно, доцільно мінімізувати функціонал

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \sqrt{\int_a^b \left[\int_a^b K(r,t)\tilde{y}(t)\, dt - f(r) \right]^2 dr} - \delta \right|$$

або

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \beta \sqrt{\int_a^b \tilde{y}^2 \, dr} - \delta \right|. \tag{9}$$

Врахувавши співвідношення (3) та (8), із (9) отримаємо

$$\tilde{y}^2(r) = r\left(\sum_{n=1}^N a_n L_n(r, \gamma_n) \right)\left(\sum_{j=1}^N a_j L_n(r, \gamma_j) \right) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N a_n a_j r\, L_n(r, \gamma_n) L_n(r, \gamma_j)\,.$$

Отже,

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \beta \sqrt{\int_a^b r \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N a_n a_j r L_n(r, \gamma_n) L_n(r, \gamma_j)\, dr} - \delta \right| = \left| \beta \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2 M_n} - \delta \right|. \tag{10}$$

Величину N – кількість членів частинної суми (3), а значить і кількість рівнянь у системі (7) вибираємо із умови, щоб відносна похибка виконання рівності (1) $\varepsilon(N, \beta)$ не перевищувала заданої ε_0:

$$\varepsilon(N, \beta) = \max_{r \in [a,b]} \frac{1}{f(r)} \left(\int_a^b \tilde{y}(t) K(t,r)\, dt - f(r) \right) \cdot 100 < \varepsilon_0\,.$$

Або, враховуючи (3), в розгорненому вигляді

$$\varepsilon(N, \beta) = \max_{r \in [a,b]} \frac{1}{f(r)} \left(\sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \sqrt{t}\, L_n(t, \gamma_n) K(t,r)\, dt - f(r) \right) \cdot 100 < \varepsilon_0\,. \tag{11}$$

Дещо іншим підходом до відшукування наближених розв'язків інтегрального рівняння Фредгольма першого роду є метод регуляризації нульового порядку Тихонова [8].

Нехай $\delta > 0$ – похибка задавання $f(r)$, правої частини (1).

Оператор $R(f,\beta)$, залежний від параметра регуляризації β, називають регуляризуючим для рівняння (1) в околі $f(r)$, якщо:

1) $R(f,\beta)$ визначений для довільних $f(r) \in F$ та $\beta > 0$;

2) існує така функція $\beta = \beta(\delta)$, що для $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta(\varepsilon)$ таке, що у випадку $\left\| f(r) - \tilde{f}(r) \right\| \le \delta(\varepsilon)$ виконуватиметься $\left\| y_\beta(r) - y(r) \right\| \le \varepsilon$, де $y_\beta(r) = R(f, \beta(\delta))$.

При цьому з умови $\delta \to 0$ випливає $\varepsilon \to 0$.

У методі регуляризації нульового порядку Тихонова вводиться згладжуючий функціонал $M^\beta\left[y_\beta(r)\right] = \left\| Ay - f(r) \right\|_{L_2}^2 + \beta \|y\|_{L_2}$, мінімізація якого і дає шуканий оператор $R(f,\beta)$. Розв'язок рівняння (1) шукають у просторі L_2 із нормою $\|y(t)\|^2 = \int_a^b y^2(t)\,dt$. Отже, вираз для функціонала $M^\beta\left[y_\beta(r)\right]$ набуде вигляду

$$M^\beta\left[y_\beta(r)\right] = \int_a^b \left[\int_a^b y_\beta(t) K(t,r)\,dt - f(r) \right]^2 dr + \beta \int_a^b y_\beta^2(t)\,dt. \tag{12}$$

Вибираємо $y_\beta(t)$ у вигляді узагальненого ряду Фур'є за ортогональними в просторі L_2 функціями $\varphi_n(t)$, а наближений розв'язок, що відповідає параметру β, – у вигляді (3).

Враховуючи (3), вираз (12) представимо у вигляді

$$M^\beta\left[\tilde{y}_\beta(r)\right] = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^N a_n K_n(r) - f(r) \right]^2 dr + \beta \int_a^b t \left(\sum_{n=1}^N a_n L_n(t,\gamma_n) \right)^2 dt\,. \tag{13}$$

Шукаючи $a_n,\ n = \overline{1,N}$ з умови мінімізації функціонала $M^\beta\left[\tilde{y}_\beta(r)\right]$, тобто $\dfrac{\partial M}{\partial a_q} = 0$, отримаємо

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^N a_n K_n(r) - f(r) \right] K_q(r)\,dr + \beta \int_a^b t \left(\sum_{n=1}^N a_n L_n(t,\gamma_n) \right) L_n(t,\gamma_q)\,dt = 0\,. \tag{14}$$

Подамо функції $K_n(r)$ та $f(r)$ у вигляді (5). Тоді із (14) отримаємо

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^N a_n \sqrt{r} \left(\sum_{j=1}^N c_j^{(n)} L_n(r,\gamma_j) \right) - \sqrt{r} \sum_{k=1}^N b_k L_n(r,\gamma_k) \right] \sqrt{r} \left(\sum_{s=1}^N c_s^{(q)} L_n(t,\gamma_s) \right) dr +$$

$$+\beta\int_a^b t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n L_n\left(t,\gamma_n\right)\right) L_n\left(t,\gamma_q\right) dt = 0 .$$

Врахувавши ортогональність системи функцій $\varphi_n\left(r\right)$, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left[\sum_{s=1}^{N} c_s^{(n)} c_s^{(q)} M_s + \beta M_n \delta_{nq}\right] = \sum_{s=1}^{N} M_s b_s c_s^{(q)}, \ q = \overline{1,N}. \tag{15}$$

Параметр регуляризації β будемо визначати згідно із принципом узагальненої нев'язки з рівняння $p\left(\beta\right) = \left\|Ay_\beta - f\right\|^2 - \left(\delta + \xi\left\|y_\beta\right\|\right)^2$, де ξ – точність задавання оператора A. Дане рівняння, після представлення y_β через коефіцієнти a_n, набуде вигляду

$$p\left(\beta\right) = \left(1-\xi\right)^2 \beta^2 \sum_{n=1}^{N} a_n M_n - \delta^2 .$$

Величину N, кількість членів частинної суми (3), а значить і кількість рівнянь у системі (15), вибираємо з умови, щоб відносна похибка виконання рівності (1) не перевищувала заданої (11).

Безпосереднє використання класичних методів розв'язування рівнянь (1) у прикладних задачах механіки деформівного твердого тіла утруднюється необхідністю відшукування параметра регуляризації β. У багатьох випадках, зокрема при розв'язуванні контактних задач теорії пружності [9], доцільніше звести інтегральне рівняння (1) до нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього представимо шукану функцію у вигляді узагальненого ряду Фур'є за функціями $\varphi_n\left(t\right)$, тобто у вигляді $y\left(t\right) = \sqrt{t}\sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n\left(t,\gamma_n\right)$.

Враховуючи вираз для функції $y\left(t\right)$, інтегральне рівняння (1) представимо у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n\left(r\right) = f\left(r\right), \ a \le r \le b, \tag{16}$$

де $K_n\left(r\right) = \int_a^b \sqrt{t} L\left(t,\gamma_n\right) K\left(t,r\right) dt$. Подамо функції $K_n\left(r\right)$ та $f\left(r\right)$ у вигляді

$$K_n\left(r\right) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(n)} L\left(r,\gamma_j\right), \qquad f\left(r\right) = \sqrt{r}\sum_{j=1}^{\infty} b_j L\left(r,\gamma_j\right). \tag{17}$$

Для відшукування коефіцієнтів розкладу (17) використаємо співвідношення (8). Після застосування (17) система (16) набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(n)} L_n\left(r,\gamma_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j L_n\left(r,\gamma_j\right). \tag{18}$$

Помноживши ліву і праву частини попереднього співвідношення на $\sqrt{r} L_n\left(r,\gamma_q\right)$ та проінтегрувавши по r на проміжку $\left[a,b\right]$, отримаємо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_q^{(n)} = b_q \,, \tag{19}$$

яка є нескінченою системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_n, $n = \overline{1,\infty}$. N – кількість доданків частинної суми (3) можна вибирати довільно. Особливістю отриманої системи (3) є те, що збільшення кількості її рівнянь призводить до збільшення точності наближення розв'язку (1). Це дозволяє будувати розв'язки прикладних задач із довільною, наперед заданою точністю.

Висновок. Проведено адаптацію класичних методів Лаврентьєва та Тихонова для їх використання в осесиметричних задачах механіки деформівного твердого тіла. Також запропоновано власний підхід наближеного розв'язання рівняння (1).

Conclusions. Classical the Lavrentiev and Tikhonov methods for their use in solving axisymmetric problems of fracture mechanics are adapted in the paper. Besides the own approach of the approximate solution of equation (1) is proposed.

Список використаної літератури

1. Тихонов, А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач [Текст] / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 1. – С. 49 – 52.
2. Гласко, В.Б. О программе регуляризирующего алгоритма для уравнений Фредгольма первого рода [Текст] / В.Б. Гласко, П.Н. Заикин // Вычеслительные методы и программирование. – 1966. – Вып. 5 – С. 61 – 73.
3. Лаврентьев, М.А. О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст] / М.А. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. Турчин, В.Ф. Решение уравнений Фредгольма 1-го рода в статистическом ансамбле гладких функций [Текст] / В.Ф.Турчин // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1967. – Том 7, № 6. – С. 1270 – 1284.
5. Franklin J.N. Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems / J.N. Franklin // Anal. and appl. – 1970 – 31, N 3 – P. 682 – 716.
6. Крянев, А.В. Решение некоторых задач методами последовательных приближений [Текст] /А.В. Крянев// Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 210, № 1. – С. 20 – 22.
7. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения [Текст] / А.В. Манжиров, А.Д. Полянин. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. – 384 с.
8. Численные методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – Москва: Наука, 1990. – 231 с.
9. Габрусєв, Г.В. Побудова наближених розв'язків рівняння Фредгольма першого роду в деяких контактних задачах теорії пружності [Текст] / Григорій Габрусєв // Вісник Львівського національного університету імені Івана Франка. Серія механіко-математична. – 2007. – Вип. 67. – С. 59 – 65.

Отримано 02.04.2013