

Б. Окрепкий. Визначення температурного поля в системі тіл циліндр – півпростір при неідеальному тепловому контакті через проміж-ковий шар / Б. Окрепкий, М. Шелестовська // Вісник ТНТУ. — 2013. — Том 69. — № 1. — С.253-262. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 536.2

**Б. Окрепкий, канд. фіз.-мат. наук;
М. Шелестовська, канд. техн. наук**

Тернопільський національний економічний університет

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМІ ТІЛ ЦИЛІНДР – ПІВПРОСТІР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВИМУ КОНТАКТІ ЧЕРЕЗ ПРОМІЖКОВИЙ ШАР

Резюме. Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр – півпростір при неідеальному тепловому контакті з урахуванням тонкого проміжкового шару у випадку ізотропних матеріалів. Отримано формули для визначення температури при різних варіантах температурних умов на бічних поверхнях циліндра і півпростору. Досліджено вплив контактної провідності й коефіцієнтів теплопровідності проміжкового шару на розподіл температурних полів у зоні контакту двох тіл.

Ключові слова: температура, проміжковий шар, коефіцієнт теплопровідності, контактна провідність, ізотропні матеріали.

B. Okrepkiy, M. Shelestovska

DETERMINATION OF THE TEMPERATURE FIELD FOR THE BODY SYSTEM CYLINDER-SEMISPASE UNDER NON IDEAL HEAT CONTACT THROUGH INTERMEDIATE LAYER

Summary. Solution of the axes-symmetric temperature task for the body system cylinder-semispase under non-ideal heat contact taking into account thin intermediate layer in the case of isotropic materials has been built. Circular cylinder of the finite height with the flat basis, which is in the non-ideal heat contact through the intermediate layer with the semispase, is being analysed. On the free end of the cylinder the temperature is constant and its side surface is head-insulated. Free surface of the semispase is kept under zero temperature. Heat exchange with the outside environment occurs from the side surface of the thin intermediate layer according to the Newton's law.

The temperature in the cylinder area is found by the Furier's method, and in the semispase with the help of the Hanckel's transformation to the Laplace's equation, written in the cylinder coordinates system.

Providing the boundary conditions for the temperature on the side surfases and in the contact area body system cylinder-semispase, the task is reduced to the system of integral equations relatively unknown function, due to which the temperature in the semispase is found. Taking advantage of the Hanckel's transformation and the Bessel's function we obtain non-finite system of the linear algebraic equations relatively constants, through which the temperature fields in the system of two bodies are expressed. While solving the system of the linear algebraic equations the reduction method was used. The graphs of the temperature distribution for the cylinder and semispase in the contact area have been built. The effect of the contact conductivity and heat exchange coefficient of the thin intermediate layer on the temperature distribution in the contact area have been investigated. It was shown, that these coefficients affect sufficiently the temperature field in the semispase. Decrease of the temperature in the contact area in the case of the intermediate layer as compared with the ideal heat contact is caused by the fact, that the heat exchange occurs through the side surface of the intermediate layer.

Key words: temperature, intermediate layer, heat exchange coefficient, contact conductivity, isotropic materials.

Постановка проблеми. Знаходження температурних полів при контактній взаємодії тіл є необхідним при визначенні контактних деформацій і напружень з урахуванням температурних полів, що є важливим при дослідженні міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії та при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз останніх досліджень. У працях [1 – 3] досліджено вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл. У роботах [2, 3] розв’язано задачі теплопровідності для системи тіл циліндр – півпростір при неідеальному тепловому контакті для ізотропних і трансверсально-ізотропних тіл. Проте недостатньо вивченими є задачі теплопровідності з врахуванням умов неідеального теплового контакту тіл через тонкий проміжковий шар.

Мета роботи. Побудувати розв’язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр – півпростір з урахуванням умов неідеального теплового контакту через тонкий проміжковий шар для ізотропних матеріалів. Знайти формули для визначення температурних полів у тілах, а також дослідити вплив коефіцієнтів теплопровідності й контактної провідності проміжкового шару на розподіл температури в зоні контакту.

Постановка задачі. Нехай круговий циліндр з плоскою основою радіуса R і довжиною L знаходиться в тепловому контакті з півпростором. Матеріали тіл є ізотропними. На вільному торці циліндра задана постійна температура T_0 . Бічні поверхні циліндра й півпростору підтримуються при нульовій температурі або теплоізовані.

Тепловий контакт між тілами здійснюється через тонкий проміжковий шар [4, 5].

При зроблених припущеннях необхідно визначити температурні поля в циліндрі й півпросторі.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z , центр якої лежить на поверхні півпростору, а вісь Oz спрямована вздовж осі циліндра. Всі величини, які позначені індексом «1», відносяться до півпростору, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури матимуть вигляд

$$T = T_0, \quad (z = L, \quad 0 \leq r < R). \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r = R, \quad 0 \leq z < L). \quad (2)$$

$$T^1 = 0, \quad (z = 0; \quad R \leq r < \Gamma). \quad (3)$$

$$l_0^* D(T^1 + T) + 2 \frac{\partial T^1}{\partial z} - l_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (z = 0; \quad 0 \leq r < R). \quad (4)$$

$$l_0^* D(T^1 - T) + 6 \frac{\partial T^1}{\partial z} - l_z \frac{\partial T}{\partial z} - 12h_0(T^1 - T) = 0. \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\nabla^2 (T^1 + T)}{\nabla^2 r} + \frac{a_0^*}{l_0^*} \frac{\nabla^2 T^1 + T}{2} - T_c \frac{\nabla^2}{\nabla^2} = 0, \quad (z = 0; r = R). \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\nabla^2 (T^1 - T)}{\nabla^2 r} + \frac{a_0^*}{l_0^*} \frac{\nabla^2 T^1 - T}{2} - T_c^* \frac{\nabla^2}{\nabla^2} = 0.$$

Тут l_z^1, l_z – коефіцієнти теплопровідності півпростору та шару;

$$D = \frac{\nabla^2}{\nabla^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\nabla^2}{\nabla^2 r} - \text{оператор Лапласа}; \quad T_c = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d T_c^0 dg, \quad T_c^* = \frac{3}{2d^2} \int_{-d}^d g T_c^0 dg,$$

$2d$ – товщина проміжкового шару; $l_0^* = 2l_0 d$, $h_0 = \frac{l_0}{2d}$; $a_0^* = 2a_0 d$; l_0, a_0 – коефіцієнти теплопровідності й теплообміну проміжкового шару; h_0 – контактна провідність; T_c^0 – температура зовнішнього середовища.

Розв’язування крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Відомо (6), що в осесиметричному випадку температурне поле T для ізотропного тіла визначається із рівняння

$$\nabla^2 T = 0. \quad (8)$$

За допомогою методу Фур’є загальний розв’язок рівняння (8) для циліндричної області матиме вигляд

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0 (r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\Gamma} e^{-\beta_k z} J_0(\beta_k r) (A_k \sin \beta_k z + B_k \cos \beta_k z) + \sum_{k=1}^{\Gamma} e^{-\gamma_k z} I_0(\gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z), \quad (9)$$

де A_k, B_k, C_k, D_k ($k = \overline{0, \Gamma}$) – довільні постійні; $J_0(\beta_k r)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу; $I_0(\gamma_k r)$ – функція Бесселя першого роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні значення, які визначаються із граничних умов.

Застосувавши до (8) інтегральне перетворення Ганкеля, температуру в півпросторі подамо у вигляді

$$T^1(r, z) = \int_0^{\Gamma} e^{-h z} \varphi(h) J_0(h r) dh, \quad (10)$$

де $\varphi(\eta)$ – довільна функція, $r = \frac{r}{R}$, $z = \frac{z}{R}$, $h = xR$.

Умова (2) буде задовольнятися, якщо покласти

$$D_0 = 0, \quad D_k = 0, \quad C_k = 0 \quad (k = \overline{1, \Gamma}); \quad \beta_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \text{де } \mu_k - \text{корені рівняння } J_1(\mu) = 0.$$

Гранична умова (1), з урахуванням ортогональності функції Бесселя, призводить до співвідношень між постійними B_0, B_k і A_0, A_k ($k = \overline{1, \Gamma}$)

$$B_0 = T_0 - A_0 l R, B_n = - A_n t h m_n l, l = \frac{L}{R}. \quad (11)$$

Задовольнивши граничну умову (3), з урахуванням (10), отримаємо інтегральне рівняння відносно функції $j(h)$

$$\int_0^{\Gamma} j(h) J_0(hr) dh = 0 \quad (r > 1). \quad (12)$$

Для визначення функції $j(h)$ продовжимо рівняння (12) на весь інтервал $(0 \leq r < \Gamma)$

$$\int_0^{\Gamma} j(h) J_0(hr) dh = J(1-r) X(r) \quad (0 \leq r < \Gamma). \quad (13)$$

Тут $J(x)$ – функція Гевісайда; $X(r)$ – невідома функція, яку представимо співвідношенням

$$X(r) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k J_0(m_k r) \quad (0 \leq r < 1), \quad (14)$$

де $a_k (k = \overline{0, N})$ – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити; значення N вибирається з умови забезпечення необхідної точності розв’язку задачі.

Застосувавши до обох частин рівняння (13) формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, подамо функцію $j(h)$ через невідомі коефіцієнти a_k

$$j(h) = a_0 J_1(h) + h^2 J_1(h) \sum_{k=1}^N \frac{a_k J_0(m_k)}{h^2 - m_k^2}. \quad (15)$$

Застосувавши перетворення Ганкеля до рівнянь (4) і (5), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{T}(x) - 4 \frac{l_z^1}{l_0^*(x^2 + 0,5a^2)} \frac{\mathcal{H}\bar{T}^1(x)}{\mathcal{H}z} - 2 \frac{l_z}{l_0^*(x^2 + 0,5a^2)} \frac{\mathcal{H}\bar{T}(x)}{\mathcal{H}z} \\ - \frac{6h_0}{l_0^*} \frac{\bar{T}^1(x)}{x^2 + 0,5a^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\bar{T}^1(x) - \bar{T}(x) + \frac{6l_z^1}{l_0^*(x^2 + a^2)} \frac{\mathcal{H}\bar{T}^1(x)}{\mathcal{H}z} + \frac{6l_z}{l_0^*(x^2 + a^2)} \frac{\mathcal{H}\bar{T}(x)}{\mathcal{H}z} = 0, \quad (17)$$

де $a^2 = \frac{12h_0}{l_0^*}$, $\bar{T}(x) = \bar{T}(x, 0)$, $\bar{T}^1(x) = \bar{T}^1(x, 0)$, $\bar{T}^1(x) = \int_0^{\Gamma} r J_0(xr) T^1(r) dr$,

$$T^1(r) = \int_0^{\Gamma} x \bar{T}^1(x) J_0(xr) dx, \frac{\mathcal{H}\bar{T}^1(x)}{\mathcal{H}z} = \int_0^{\Gamma} r J_0(xr) \frac{\mathcal{H}T^1(r)}{\mathcal{H}z} dr,$$

$$\frac{\mathcal{H}T^1(r)}{\mathcal{H}z} = \int_0^{\Gamma} x J_0(xr) \frac{\mathcal{H}\bar{T}^1(x)}{\mathcal{H}z} dx, \int_0^{\Gamma} r J_0(xr) \mathcal{D}T^1(r) dr = -x^2 \bar{T}^1(x)$$

$$\int_0^r r J_0(xr) D T(r) dr = -x^2 \bar{T}(x),$$

$$T^1(r) = \int_0^r j(h) J_0(hr) dh, \quad \frac{\mathcal{I} T^1}{\mathcal{I} z} = \frac{1}{R} \int_0^r h j(h) J_0(hr) dh. \quad (18)$$

Використовуючи формулу для дельта-функції Дірака

$$d(a - b) = a \int_0^r x J_m(ax) J_m(bx) dx,$$

отримаємо

$$\bar{T}^1(x) = \int_0^r r J_0(xr) T^1(r) dr = \int_0^r r J_0(xr) dr \int_0^r j(h) J_0(hr) dh = \frac{1}{x} \int_0^r j(h) d\left(\frac{r}{x} - \frac{h}{R}\right) dh,$$

$$\frac{\mathcal{I} \bar{T}^1(x)}{\mathcal{I} z} = \int_0^r j(h) d\left(\frac{r}{x} - \frac{h}{R}\right) - x \int_0^r dh, \quad \frac{\mathcal{I} T}{\mathcal{I} z} = A_0 + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^r A_k m_k J_0\left(\frac{m_k r}{R}\right),$$

$$\frac{\mathcal{I} \bar{T}(x)}{\mathcal{I} z} = A_0 \frac{1}{x} \lim_{D \rightarrow 0} d(x - D) + \sum_{k=1}^r A_k d\left(\frac{m_k}{R} - x\right). \quad (19)$$

Застосувавши формули обернення інтегрального перетворення Ганкеля до рівностей (16), (17), отримаємо

$$T(r) - 4 \frac{l^1}{l_0^*} R \int_0^r \frac{h j(h) J_0(hr)}{h^2 + 0.5a^2 R^2} dh - \frac{2}{l_0^*} \frac{\mathcal{I} A_0}{\mathcal{I} a^2} + R \sum_{k=1}^r \frac{J_0(m_k r) m_k}{m_k^2 + 0.5R^2 a^2} A_k \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} B_1} - \frac{6h_0 R^2}{l_0^*} \int_0^r \frac{j(h) J_0(hr) dh}{h^2 + 0.5a^2 R^2} - C_0 I_0\left(\frac{aR}{\sqrt{2}} r\right) = 0 \quad (r < 1).$$

$$T(r) - T^1(r) - \frac{6l^1}{l_0^*} \int_0^r \frac{h J_0(hr) j(h)}{h^2 + a^2 R^2} dh - \frac{6l^1}{l_0^*} \frac{\mathcal{I} A_0}{\mathcal{I} a^2} + R \sum_{k=1}^r \frac{A_k m_k J_0(m_k r)}{m_k^2 + a^2 R^2} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} B_1} + C_1 I_0(aRr) = 0 \quad (r < 1),$$

де C_0, C_1 – невідомі постійні; $I_0\left(\frac{aR}{\sqrt{2}} r\right), I_0(aRr)$ – частинні розв'язки рівнянь (4) та (5).

Додавши і віднявши рівності (7), отримаємо

$$\frac{\mathcal{I} T^1}{\mathcal{I} r} + \frac{a_0^*}{l_0^*} (T^1 - T_c - T_c^*) = 0, \quad (z = 0, r = R);$$

$$\frac{\mathcal{I} T}{\mathcal{I} r} + \frac{a_0^*}{l_0^*} (T - T_c + T_c^*) = 0, \quad (z = 0, r = R).$$

Тоді система рівнянь (22), з урахуванням (9), (11), (10), (15), матиме вигляд

$$\begin{aligned}
 a_0 + e \sum_{k=1}^N a_k J_0(m_k) &= T_c + T_c^*, \\
 A_0 R l + e \sum_{k=1}^{\Gamma} J_0(m_k) t h m_k l \Psi_k &= T_0 + T_c^* - T_c.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Температурне поле в зоні контакту обчислюється за формулами:

а) для циліндра

$$T(r, 0) = T_0 - A_0 R l - e \sum_{k=1}^{\Gamma} J_0(m_k r) t h m_k l \Psi_k, \quad (r < 1);
 \tag{24}$$

б) для півпростору

$$T^1(r, 0) = a_0 + e \sum_{k=1}^N a_k J_0(m_k r), \quad (r < 1);
 \tag{25}$$

Використовуючи формули (15), (24), (25) і обчисливши невласні інтеграли згідно з [7], система рівнянь (20), (21) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
 & \Psi_0^{(1)} l_z a_0^{(1)}(r, b_1) + 4 l_z^1 a_0^{(2)}(r, b_1) \Psi_0 + \\
 1) & + e \sum_{k=1}^N a_k \Psi_0^{(1)} 6 h_0^{(1)} l_z a_k^{(1)}(r, b_1) + 4 l_z^1 a_k^{(2)}(r, b_1) \Psi_k + \frac{1}{3 l} + \frac{1}{3 h_0^{(1)}} A_0 R + \\
 & + e \sum_{k=1}^{\Gamma} J_0(m_k r) D^{(1)}(m_k, b_1) A_k + C_0 I_0(b_1, r) = T_0, \quad (r < 1).
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 & \Psi_0^{(1)}(r) + 6 l_z^1 a_0^{(2)}(r, b_2) \Psi_0 + e \sum_{k=1}^N a_k \Psi_k^{(1)}(r) + 6 l_z^1 a_k^{(2)}(r, b_2) \Psi_k \\
 2) & + \frac{1}{2 h_0^{(1)}} A_0 R + e \sum_{k=1}^{\Gamma} J_0(m_k r) D^{(2)}(m_k, b_2) A_k - C_1 I_0(b_2, r) = T_0, \quad (r < 1),
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

де $l_z = \frac{l_z R}{l_0^*}$, $l_z^{(1)} = \frac{l_z R}{l_0^*}$, $h_0^{(1)} = \frac{h_0 R}{l_z}$, $l_0^* = \frac{a_0^* R}{l_0^*}$, $b_1 = \sqrt{6 h_0^{(1)} l_z}$, $b_2 = \sqrt{2} b_1$,

$$\begin{aligned}
 a_0^{(1)}(r, b_i) &= \int_0^{\Gamma} \frac{J_1(h) J_0(hr) dh}{(h^2 + b_i^2)} = - \frac{I_0(b_i r) K_1(b_i)}{b_i}; \\
 a_k^{(1)}(r, b_i) &= J_0(m_k) \int_0^{\Gamma} \frac{h^2 J_1(h) J_0(hr) dh}{(h^2 + b_i^2)(h^2 - m_k^2)} = \frac{J_0(m_k r)}{m_k^2 + b_i^2} - \frac{b_i I_0(b_i r) K_1(b_i)}{(m_k^2 + b_i^2)} J_0(m_k), \\
 a_0^{(2)}(r, b_i) &= \int_0^{\Gamma} \frac{h J_1(h) J_0(hr) dh}{h^2 + b_i^2}, \quad a_k^{(2)}(r, b_i) = J_0(m_k) \int_0^{\Gamma} \frac{h^3 J_1(h) J_0(hr)}{(h^2 - m_k^2)(h^2 + b_i^2)} dh, \\
 b_0^{(1)}(r) &= \int_0^{\Gamma} J_0(hr) J_1(h) dh = 1, \quad b_k^{(1)}(r) = J_0(m_k) \int_0^{\Gamma} \frac{h^2 J_1(h) J_0(hr) dh}{(h^2 - m_k^2)} = J_0(m_k r), \\
 D^{(1)}(m_k, b_1) &= t h m_k l + \frac{2 l_z m_k}{b_1^2 + m_k^2}, \quad D^{(2)}(m_k, b_2) = t h m_k l + 6 l_z \frac{m_k}{b_2^2 + m_k^2}.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Помноживши рівності (26), (27) на r , $r J_0(m_n r)$ і проінтегрувавши їх по r в межах від 0 до 1, з урахуванням ортогональності функцій Бесселя і рівнянь (23), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих, $X_k (k = \overline{1, N})$, Y_0 , Y_1 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N A_{n,k}^{(1)} X_k + B_{n,0}^{(1)} Y_0 + B_{n,1}^{(1)} Y_1 &= D_n^{(1)} \quad (n = \overline{0, N}), \\ \sum_{k=0}^N A_{n,k}^{(2)} X_k + B_{n,0}^{(2)} Y_0 &= D_n^{(2)} \quad (n = 0, 1), \end{aligned} \quad (29)$$

де $a_k = X_k T_0$ ($k = \overline{0, N}$), $C_0 = Y_0 T_0$, $C_1 = Y_1 T_0$,

$$\begin{aligned} A_0 R &= \frac{2l}{3h_0} + \frac{1}{3h_0} T_0 - 2e \sum_{k=0}^N e_{0,k}^{(1)} X_k - \frac{2}{b_1} I_1(b_1) Y_0, \\ A_n &= - \frac{2T_0}{J_0^2(m_n) D^{(2)}(m_n, b_1)} \sum_{k=0}^N e_{n,k}^{(1)} X_k + \frac{b_1 I_0(m_n) I_1(b_1)}{m_n^2 + b_1^2} Y_0, \\ A_{0,0}^{(1)} &= - r_0^{(1)} e_{0,0}^{(1)} + d_{0,0}^{(1)}, \quad A_{0,k}^{(1)} = d_{0,k}^{(1)} - r_0^{(1)} e_{0,k}^{(1)}, \\ e_{n,k}^{(1)} &= 6h_0^1 l_z a_{n,k}^{(1)} + 4l_z^1 a_{n,k}^{(2)} \quad (k = \overline{0, N}; n = \overline{0, N}), \\ d_{n,k}^{(1)} &= b_{n,k}^{(1)} + 6l_z^{(1)} a_{n,k}^{(2)}, \quad r_0^{(1)} = \frac{2l}{3h_0} + \frac{1}{2h_0} l + \frac{1}{3h_0} T_0; \\ B_{0,1}^{(1)} &= - \frac{1}{b_1} r_0^{(1)} I_1(b_1), \quad B_{0,1}^{(1)} = \frac{1}{b_2} I_1(b_2), \quad D_0^{(1)} = \frac{1}{2} (1 - r_0^{(1)}), \\ e_{n,k}^{(1)} &= 6h_0^1 l_z a_{n,k}^{(1)} + 4l_z^1 a_{n,k}^{(2)}, \quad A_{n,k}^{(1)} = d_{n,k}^{(1)} - \frac{D^{(2)}(m_n, b_2)}{D^{(1)}(m_n, b_1)} e_{n,k}^{(1)}, \\ B_{n,1}^{(1)} &= - \frac{J_0(m_n) b_2 I_1(b_2)}{m_n^2 + b_2^2} \quad (n = \overline{1, N}), \quad d_{n,k}^{(1)} = b_{n,k}^{(1)} + 6l_z^1 a_{n,k}^{(2)} \quad (k = \overline{0, N}; n = \overline{0, N}), \\ B_{n,0}^{(1)} &= - \frac{b_1 D^{(2)}(m_n, b_2)}{D^{(1)}(m_n, b_1)} J_0(m_n) \frac{I_1(b_1)}{m_n^2 + b_1^2}, \quad D_n^{(1)} = 0 \quad (n = \overline{1, N}), \\ A_{0,k}^{(2)} &= - 2l \frac{2l}{3h_0} + \frac{1}{3h_0} T_0 e_{0,k}^{(1)} - 2e \sum_{m=1}^r \frac{thm l}{J_0(m_m) D^{(2)}(m_m, b_1)} e_{m,k}^{(1)} \quad (k = \overline{0, N}), \\ B_{0,0}^{(2)} &= - 2l \frac{2l}{3h_0} + \frac{1}{3h_0} T_0 l + e \sum_{k=1}^r \frac{thm_k l}{J_0(m_k) D^{(2)}(m_k, b_1) (m_k^2 + b_1^2)} I_1(b_1), \\ D_0^{(2)} &= 1 + \frac{T_c^* - T_c}{T_0} - l \frac{2l}{3h_0} + \frac{1}{3h_0} T_0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$A_{1,0}^{(2)} = 1; \quad A_{1,k}^{(2)} = J_0(m_k), \quad B_{1,0}^{(2)} = 0; \quad D_1^{(2)} = \frac{T_c + T_c^*}{T_0}, \quad a_{0,0}^{(1)} = - \frac{I_1(b_i)K_1(b_i)}{b_i^2},$$

$$a_{0,k}^{(1)} = - \frac{I_1(b_i)K_1(b_i)}{(m_k^2 + b_i^2)} J_0(m_k), \quad a_{n,0}^{(1)} = - \frac{I_1(b_i)K_1(b_i)}{b_i^2 + m_n^2} J_0(m_n);$$

$$a_{n,k}^{(1)} = \begin{cases} l_{n,k}^{(1)}, & k \neq n \\ \frac{J_0^2(m_n)}{2(m_n^2 + b_i^2)}, & k = n. \end{cases} \quad (31)$$

$$l_{n,k}^{(1)} = - \frac{b_i^2 I_1(b_i) K_1(b_i) J_0(m_n) J_0(m_k)}{(m_k^2 + b_i^2)(m_n^2 + b_i^2)}, \quad a_{0,0}^{(2)} = \int_0^r \frac{J_1^2(h) dh}{h^2 + b_i^2};$$

$$a_{0,k}^{(2)} = J_0(m_k) \int_0^r \frac{h^2 J_1^2(h) dh}{(h^2 - m_n^2)(h^2 + b_i^2)}, \quad a_{n,0}^{(2)} = J_0(m_n) \int_0^r \frac{h^2 J_1^2(h) dh}{(h^2 + b_i^2)(h^2 - m_n^2)},$$

$$a_{n,k}^{(2)} = J_0(m_k) J_0(m_n) \int_0^r \frac{h^4 J_1^2(h) dh}{(h^2 - m_k^2)(h^2 - m_n^2)(h^2 + b_i^2)},$$

$$b_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{2}; \quad b_{0,k}^{(1)} = 0; \quad b_{n,0}^{(1)} = 0; \quad b_{n,k}^{(1)} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{J_0^2(m_k)}{2}, & k = n. \end{cases}$$

Температурне поле в зоні контакту двох тіл знаходимо за формулами:

а) для циліндричної області

$$T(r,0) = T_0 \left[1 - \frac{1}{3h_0} l + \frac{1}{3h_0} l + 2 \sum_{k=0}^N e^{-X_k} \frac{J_0(m_k r)}{J_0(m_k)} + \frac{1}{3h_0} e_{0,k} - e^{-\frac{r}{m_1}} \frac{J_0(m_1 r)}{J_0(m_1)} \frac{e_{m,k}^{(1)}}{D^{(2)}(m_1, b_1)} \frac{thm_1 l}{T_0} \right] + 2I_1(b_1) Y_0 \left[\frac{1}{3h_0} l - b_1 e^{-\frac{r}{b_1}} \frac{J_0(m_k r) thm_k l}{J_0(m_k) D^{(2)}(m_k, b_1) (m_k^2 + b_1^2)} \right] \quad (32)$$

б) для півпростору

$$T^1(r,0) = T_0 X_0 + \sum_{k=1}^N J_0(m_k r) X_k \quad (r < 1). \quad (33)$$

Якщо коефіцієнти теплопровідності й теплообміну проміжкового шару l_0^*, a_0^* , температура зовнішнього середовища T_c^0 відповідно дорівнюють нулю, то отримаємо розв'язок задачі [2].

Розглянуто числовий приклад для знаходження температури в циліндрі й півпросторі згідно з формулою (32, 33) при $l = 1, a_0^* = 0, T_c^0 = 0$.

Розв'язувалась система лінійних алгебраїчних рівнянь (29) з 20-ма невідомими, що забезпечує досить високу точність задоволення граничних умов. На рис. 1 і рис. 2

наведено графіки розподілу температури для циліндра $a_1 = \frac{T(r)}{T_0}$ і півпростору

$a_2 = \frac{T^1(r)}{T_0}$ уздовж безрозмірної координати r при різних значеннях контактної

провідності $h_0^1 = \frac{h_0 R}{l_z}$ і параметрів $l_z = \frac{l_z R}{l_0^*}$, $l_z^1 = \frac{l_z^1 R}{l_0^*}$.

Пунктирною лінією зображено графіки для температури $a_2 = \frac{T^1(r)}{T_0}$.

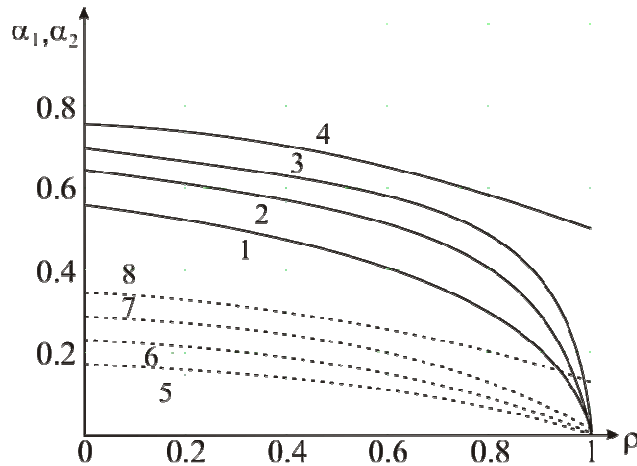


Рисунок 1. Розподіл температури для різних знаків параметрів $l_z = l_z^1$ при фіксованому $h_0^1 = 1$: крива 1- $l_z = 0.5$, 2- $l_z = 1$, 3- $l_z = 5$, 4- $l_z = \infty$, 5- $l_z^1 = 0.5$, 6- $l_z^1 = 1$, 7- $l_z^1 = 5$, 8- $l_z^1 = \infty$

Figure 1. Temperature distribution for different parameters $l_z = l_z^1$ under fixed $h_0^1 = 1$ curve 1- $l_z = 0.5$, 2- $l_z = 1$, 3- $l_z = 5$, 4- $l_z = \infty$, 5- $l_z^1 = 0.5$, 6- $l_z^1 = 1$, 7- $l_z^1 = 5$, 8- $l_z^1 = \infty$

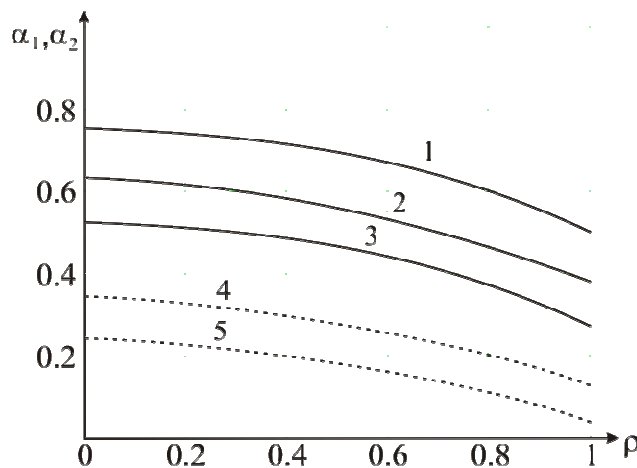


Рисунок 2. Розподіл температури для різних значень контактної провідності h_0^1 при $l_z = l_z^1 = \infty$: крива 1- $h_0^1 = 1$, 2- $h_0^1 = 5$, 3- $h_0^1 = \infty$, 4- $h_0^1 = 1$, 5- $h_0^1 = \infty$

Figure 1. Temperature distribution for different value of contact conductivity h_0^1 , when $l_z = l_z^1 = \infty$ curve 1- $h_0^1 = 1$, 2- $h_0^1 = 5$, 3- $h_0^1 = \infty$, 4- $h_0^1 = 1$, 5- $h_0^1 = \infty$

Висновки. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля та метод Фур'є, розв'язок температурної задачі зведено до визначення деяких постійних із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля в будь-якій точці системи циліндр – півпростір.

Дослідження показують, що нульова температура на бічній поверхні проміжкового шару призводить до зменшення температури в зоні контакту тіл. Це пояснюється тим, що частина тепла виходить через бічну поверхню проміжкового шару.

Контактна провідність h_0^1 також значно впливає на розподіл температурних полів.

Conclusions. Taking advantage of the Hankel's integral transformation and the Fourier's method, the solution of the temperature task is reduced to finding some constants from the system of linear algebraic equations due to which temperature fields in any point of the cylinder-semispase system is found.

Investigations testify that zero temperature on the side surface of the intermediate layer results in the decrease of temperature in the body contact area. It is caused by the fact, that some portion of heat comes through the side surface of the intermediate layer.

Contact conductivity h_0^1 sufficiently affects the distribution of temperature fields.

Список використаної літератури

1. Грилицкий, Д.В. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости [Текст] / Д.В. Грилицкий, Я.М. Кизыма. – Львов: Изд.-во при Львов. ун.-те, 1981. – 135 с.
2. Окрепкий, Б.С. Осесимметрична температурна задача для системи тіл циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Б.С. Окрепкий, М.Я. Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2005. – № 3. – С. 23 – 27.
3. Окрепкий, Б.С. Тиск циліндричного кругового штампа на трансверсально-ізотропний півпростір при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Б.С. Окрепкий, М.Я. Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2010. – № 1. – С. 32 – 40.
4. Подстригач, Я.С. Условия теплового контакта твердых тел [Текст] / Я.С. Подстригач // ДАН УССР. – Серия А. – № 7. – С. 54 – 61.
5. Подстригач, Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя [Текст] / Я.С. Подстригач // ИФЖ. – 1963. – Т. 6, № 10. – С. 37 – 45.
6. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости [Текст] / А.Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1970, – 304 с.
7. Мигович, Ф.Н. Обчислення групи невласних інтегралів, які містять функції Бесселя I-го роду [Текст] / Ф.Н. Мигович, Б.С. Окрепкий // Збірник наукових праць академії наук України. – К., 1995. – № 8 – С. 133 – 137.

Отримано 20.11.2012