МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

Б.І.Яворський

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

Частина 2

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

як навчальний посібник

з дисципліни "Основи радіоелектроніки"

Тернопіль-2008

УДК 621.396

Яворський Б.І. Математичні основи радіоелектроніки. Частина 2. Навчальний посібник — Тернопіль: ТДТУ, 2008. — 46 с.

У другій частині посібника розглянуто основні поняття з математичних структур та функціонального аналізу, які використовуються для математичного моделювання при розробці радіоелектронної апаратури і систем у різних сферах діяльності людини — зв’язку, медицини, побуту, тощо. Для студентів, що навчаються за напрямками базової вищої освіти “Електронні апарати”, “Прилади”, та ін.

Іл. 1.Табл.. Бібліогр.:5 назв.

Рецензент:
Я. П. Драган, доктор фізико-математичних наук, професор (Фізико-механічний інститут імені Г. В. Карпенка НАН України).

ÇÌ²ÑÒ

ПЕРЕДМОВА.

Погляд на радіоелектронні кола та сигнали з функціонального боку (в їх інформаційному сенсі: як засіб опрацювання даних) вимагає відповідної математичної моделі. Однією з властивостей вдалої моделі є компресія (стиснення) опису модельованого об’єкту. Системний підхід (зумовлений характером розв’язуваних проблем) призводить до універсалізації (однорідності) моделі — вона повинна добре описувати об’єкти різної природи. Ці, та й інші (наприклад, точність) ознаки призвели до використання потужних засобів функціонального аналізу в теорії систем і сигналів.

Тут потрібно детальніше зупинитися на смислові самої моделі (математичної). Безпосередньо математичному моделюванню передує (як правило) набуття значного експериментального матеріалу, досвіду роботи, спостережень модельованого об’єкту, а також наявність практично значимої проблеми. Виявлення у явищі якоїсь фізичної величини, інформаційно важливої для експериментатора, завжди має наслідком зв’язування її з іншими величинами на основі фізичних законів, постулатів і т.п. У подальшому зміни цієї величини в часі і просторі моделюють функцією, полем (час і просторові координати виступають тоді аргументами). Традиційно поля і сигнали описувалися диференціальними рівняннями, тому за модель явища вважалася краєва задача. Її розв’язок описував явище. Проте, складність розв’язання краєвих задач, а особливо необхідність мати для практичних потреб (задля керування, спостереження за станом і т.п.) не краєву задачу, а, власне, її розв’язок, призвели до появи проблеми представлення (зображення) самого розв’язку і пошуку його структурних елементів. Ці, останні, і є об’єктами розгляду даної частини посібника.

Зауважимо, що самі рівняння (краєві задачі) не зникають: вони і означують згадані структурні елементи, а спостереження за явищем дають матеріал для їх визначення.

Вступ

МАТЕМАТИЧНА ПРИРОДА ГАРМОНІЙНОГО АНАЛІЗУ

В ієрархії математичних понять є різні рівні абстракції (*лат.* Abstractio — відволікання). Поняття числа лежить на найнижчому рівні. Потім ідуть символи, які означують множини чисел. Далі розглядаються операції, за допомогою яких числам ставляться у відповідність числа. І, нарешті, ***функції*** — коли кожному числу ставлять у відповідність деяке інше число. Ще складнішим є розділ математики, який вивчає перетворення однієї функції в іншу (***оператори***).

Тільки на цьому рівні, розглядаючи оператори, можна зрозуміти природу і значення гармонійного аналізу.

Нехай оператор T перетворює функцію $f(x)$, $x\in\{-\infty,\infty\}$ у функцію $g(x)$, тобто $T\{f(x)\}=g(x)$, або, у інших позначеннях $(Tf)(x)=g(x)$. Якщо:

$$T\{f_1(x) + f_2(x)\}= T\{f_1(x)\} + T\{f_2(x)\};$$
$$T\{af_1(x)\}=aT\{f_1(x)\},\ a \equiv const,$$

то оператор T називають ***лінійним***. У фізиці здебільшого використовують лінійні оператори. (Наприклад $U(t)=R\cdot I(t)$ — закон Ома; $F(x)=kx$ — закон Гука та ін.)

Ще частіше зустрічаються у фізиці оператори, для яких справедлива властивість ***інваріантності*** (незалежності) від попереднього перетворення, яке називають ***зсувом***, тобто перетворення $f_1(x)= f(x+b)=S\{ f(x)\}$. Тоді, якщо $f_1(x)= f(x+b)$, $g_1(x)= g(x+b)$, а $T\{f(x)\}= =g(x)$ то $T\{f_1(x)\}=g_1(x)$. Кажуть, що оператор T ***допускає*** оператор S.

Майже у всіх фізичних процесах, що розвиваються у часі, зміна моменту початку відліку часу призводить лише до зміни початку всіх інших етапів процесу. Такі ж властивості можна зауважити і для просторової координати (координат).

Особливо важливу роль при вивченні властивості інваріантності до зсуву грає функція e^{-iux}. Справді,

$$e^{iu(x+b)}= e^{iub}\cdot e^{iux}\ ,$$

де $\left|e^{jub}\right| = 1$, тобто зсув призводить до множення вихідної функції на число, модуль якого рівний одиниці. Зауважимо, що лінійний оператор T тоді діє на зсунуту функцію так:

$$Te^{-iu(x+b)} = T(e^{iux} \cdot e^{iub}) = e^{iub} \cdot Te^{iux},$$

нагадаймо, що $b=const$. Тому, позначивши $e^{iux} = \varphi(x)$ отримаємо:

$$\varphi(x+b) = e^{iub}\varphi(x), \text{ або } \varphi(b) = \varphi(0)\, e^{iub}.$$

Тобто, застосування T до e^{iux} зводиться до множення на постійну. Звідси випливає, що коли

$$f(x) = \sum_k a_k e^{iu_k x},$$

то

$$T\{f(x)\} = T\left\{\sum_k a_k e^{iu_k x}\right\} = \sum_k a_k c_k e^{iu_k x},$$

де c_k залежить від вигляду T і значень u_k, але не залежить від a_k. Іншими словами, дія оператора T, інваріантного до зсуву, зводиться до множення коефіцієнтів a_k на деякі множники c_k, які, таким чином, виражають оператор T.

Цей факт, разом із різними його узагальненнями, визначає причину важливості методів гармонійного аналізу.

Як узагальнення розкладу функції $f(x)$ розглядають інтеграли вигляду:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iux}\, du.$$

І навпаки, маючи функцію $f(x)$, можна знайти $g(u)$:

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx.$$

Якщо

$$g_1(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-iux}\,dx,$$

то можна отримати вираз:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)f(\xi)d\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_1(u)\cdot g(u)\cdot e^{iux}dx,$$

так що перетворення $f(x)$ у вигляді $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)f(\xi)d\xi$ відповідає перетворенню $g(u)$, яке зводиться до застосування оператора до g, що виражається множенням g на $\sqrt{2\pi}\,g_1$. (Нагадаймо, що $f_1(x)=f(x+\xi)$). Розглянуте перетворення $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi)f(\xi)d\xi$ називають ***згорткою***. Легко зауважити, що згортка має властивості операції множення. Їй відповідає множення ***зображень*** функцій.

Механізм породження розкладів

Розглянуте у першій частині розділення змінних, маючи "математичну" природу, дає можливість для фізичної інтерпретації сутності появи усього наступного після введення розділу змінних математичного апарату.

Оскільки момент часу, у який ми починаємо спостерігати за сигналом чи системою, не синхронізується з її фазовими станами, то слід шукати незалежного від зсуву у часі (трансляції) опису (моделі) системи. Нехай вибрано за опис системи диференціальних рівнянь. Назвемо диференціальним оператором D сукупність операторів, яку містить диференціальне рівняння.

Розглянемо властивості диференціального оператора *D*, зокрема його зв'язок із оператором зсуву *T* (назвемо оператором зсуву операцію трансляції у часі).

За відомою формулою (ряд Тейлора) зсув виглядає так :

$$T_t^s y(T) = y(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} D_y^k(t) \ ,$$

або $y(t+s) = T_t^s y(T)$, де $T_t^s y(T)$ — оператор зсуву. Іншими словами, маємо розклад оператора зсуву за степенями диференціального оператора. Можна зауважити, що цей розклад має вигляд розкладу у такий же ряд експоненти:

$$e^{s\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(s) \cdot \lambda^k = \varphi(s, \lambda).$$

Відомо, що $De^{t\lambda} = \lambda e^{t\lambda}$.Функцію φ(*t*,λ), яка є розв'язком рівняння *D*φ(*t*,λ)=λφ(*t*,λ), називають власною функцією оператора *D*. Таким чином функція $e^{t\lambda}$ є власною функцією оператора *D*, а оператор *T* зв'язаний з оператором *D*

$$T_t^s = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(s) D^k \ ,$$

або, застосувавши поняття функцій оператора, запишемо більш стисло:

$$T_t^s = \varphi(s, D) \ ,$$

де $\varphi(\cdot,\cdot)$ —власна функція оператора.

Можна впевнитися в інваріантності вигляду власних функцій $\varphi(t,\lambda)$ оператора *D* по відношенню до зсувів T^s:

$$T_t^s = e^{t\lambda} = T_t^s \varphi(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(s) D^k \varphi(t,\lambda) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(s) \lambda^k \varphi(t,\lambda) = \varphi(s,\lambda)\varphi(t,\lambda) = e^{s\lambda} e^{t\lambda} = e^{(s+t)\lambda} .$$

Це є однією з властивостей власних функцій, необхідної (але, щоправда, недостатньої) для вибору їх у якості базисних (координатних) у просторах функцій (на множинах функцій M_f). Тепер можна пояснити механізм породження всіх функцій з множини функцій M_f як лінійних комбінацій базисних сум вигляду $f(t) = \sum_n a_n \varphi(t, n\lambda),\ a_n \in R$. Крім того, з'являється можливість розгляду інтегралів

$$f(t) = \int F(\lambda) \overline{\varphi(t,\lambda)} d\lambda ,$$

$$F(\lambda) = \int f(t) \varphi(t,\lambda) dt ,$$

які називають Фур'є-перетворенням.

Так що необхідність інваріантних до зсуву описів (моделей), яка виникає з практичних міркувань, є основою всього математичного арсеналу, який включає в себе пари інтегральних перетворень типу Фур'є. Власні функції є повними ортогональними системами функцій, породжених оператором зсуву за умови допускання його лінійних перетворень (інваріантності оператора до зсуву). В наступних розділах посібника наводиться поняття загальної структури, елементами якої є вище описані факти.

Розділ 1

АЛГЕБРИ ТА ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ

Розклади складних функцій на простіші, а також опис системи як суперпозиції простіших систем, інші питання, пов'язані з цим, вимагають достатнього обґрунтування понять такого роду. Для цього застосовується класична логіка, специфічні методи (типу граничних переходів) і засоби.

Наведені приклади розкладів функцій на елементарні складові пояснювалися фундаментальною впорядкованістю часу як аргументи. Підштовхують до цього і розділення змінних в методі Фур'є розв'язування диференціальних рівнянь.

Ці розклади віддзеркалюють властивості сигналу чи системи або уявлення про такі властивості. Базуючись на цьому, вигідно формулювати задачі, і розв'язуючи їх, тлумачити отримані результати. У багатьох випадках такі уявлення адекватні (відповідають, або майже відповідають) дійсності явищ, служать опорою для інтуїтивних уявлень про їх природу.

Арсенал певних засобів і методів математики, які використовують для опису і розв'язування задач в області сигналів і систем у різних прикладних галузях, зокрема, біомедтехніці, називається ***теорією сигналів і систем***. Сучасна математика має основним об'єктом множини (формально неозначувані) сукупності об'єктів з однаковими властивостями, функції (як відображення одних числових множин у інші).

Зрозуміло, що для узагальнюючої точки зору властивості елементів множин, а також відображень формуються наперед (наприклад у вигляді аксіом). Тому вони для різних об'єктів ототожнюються і не розрізняються. Але коли все-таки потрібно їх розрізнити, наприклад, за природою множин, то використовують поняття ізоморфізм. ***Ізоморфізм*** **—** взаємно однозначне відображення, яке стосується операції (його позначають $\leftrightarrow$).

Операція **—** означена на певній множині функція двох аргументів зі значеннями на цій самій множині.

Якщо для a_1, b_1, $c_1 \in M_1$, a_2, b_2, $c_2 \in M_2$ і операцій $\circ$ та $*$, заданих на множинах відповідно M_1 та M_2 , із $a_1 \leftrightarrow a_2$, $b_1 \leftrightarrow b_2$, $c_1 = a_1 \circ b_1$, $c_2 = a_2 * b_2$ виходить, що $c_1 \leftrightarrow c_2$, то це ізоморфізм.

Якщо відображення не взаємне, то це гомоморфізм, а відображення множини на себе називають ендоморфізмом. Виділимо елементи множини, що відображаються в один елемент. Їх називають ***класом*** еквівалентності. Співставлення одного елементу іншому називається ***відношенням***. Відношення ρ з властивостями:

1) рефлексивності — $a\rho a$ для всіх $a \in M$;

2) симетричності — якщо $a\rho b$, то $b\rho a$;

3) транзитивності — якщо $a\rho b$, $b\rho c$, то $a\rho c$

називається ***відношенням еквівалентності*** і позначається символом ~.

Якщо, відношення не має симетрії (антисиметрія), то це відношення називають відношенням порядку. Його позначають символом $\prec$ (або $\succ$).

Відношення еквівалентності розбиває множину M на класи. Розглядаючи множину вже класів і гомоморфізм, який переносить операцію з множини на множину класів (яку називають ще ***фактор-множиною***), відмітимо нейтральний (відносно операції $\circ$) клас $[e]$: $[a]\circ[e] = [a]$, $a \circ e = a$, де символом $[\cdot]$ позначимо клас фактор-множини M, a — елемент вихідної множини M, $a \in M$.

Властивості операцій вивчають ***алгебри***. Множина $G=\{g_1,g_2,...\}$з операцією $g_1 \circ g_2 = g_3 \in G$, яка має властивість асоціативності $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$, лівим нейтральним елементом $e \in G$: $e \circ g = g$, $g \in G$ і лівим оберненим елементом $g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = e, g \in G$, називається ***групою***. Якщо операція $\circ$ є додаванням, то групу називають ***адитивною***, а якщо множення — то ***мультиплікативною***. Якщо операція комутативна: $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$; $g_1, g_2 \in G$, то групу називають ***абелевою***. Множина дійсних чисел (з операцією додавання нейтральний елемент–нуль) — приклад абелевої групи. Підгрупою називають підмножину H елементів групи G з цією ж операцією. Множину $a \circ H$ називають ***суміжним класом*** (лівим, а $H \circ a$ — правим). Коли в некомутативній групі ліві суміжні класи за деякою підгрупою співпадають з правими, то підгрупу називають ***нормальною*** або ***інваріантною***.

Ще більше можливостей відкривається при вивченні множини з двома операціями. Якщо відносно адитивної операції (додавання) це адитивна абелева група, а мультиплікативна операція (множення) асоціативна і дистрибутивна відносно адитивної операції (додавання): $(a+b)c=ac+bc$; $a(b+c)ab+ac$ — то таку множину називають ***кільцем***. Якщо мультиплікативна операція комутативна, то кільце комутативне. Кільце з оберненим елементом відносно множення називається ***тілом***. Комутативне тіло називається ***полем***.

Ідеалом кільця називають підгрупу адитивної групи. Поняття ідеалу аналогічне поняттю нормальної підгрупи в групі, тому кожен ідеал розбиває кільце на суміжні класи (класи лишків). Якщо два елементи належать до одного класу лишків, то їх називають рівними за ідеалом i, та позначають $a \equiv b(mod\ i)$.

Якщо для тіла $K=\{a,b,c,...\}$, елементи якого називають скалярами (або коефіцієнтами) і адитивної абелевої групи (модуля) $M=\{x,y,...\}$, елементи якої називають ***векторами***, виконуються умови —

1) $a \in K$, $x \in M$; $ax \in$ M,
2) $a(x+y) = ax+ay$,
3) $(a+b)x = ax+bx$,
4) $b(ax) = bax$,
5) $1 \cdot x = x$,

то таку сукупність двох об'єктів називають ***векторним*** (лінійним, афінним) ***простором*** M (лівим, бо множення на скаляри введені зліва). Роль K може грати поле комплексних чисел. Якщо K —комутативне, то лівий і правий простори над таким полем співпадають і говорять просто про векторний простір. Елементи векторного простору завжди можна лінійно зобразити у вигляді $x = \sum\limits_k a_k e_k$, де $\{e_k\}$ — порідні вектори простору M.

Якщо $\sum\limits_k a_k f_k = 0$ тільки тоді, коли всі $a_k=0$, то f_k називають ***лінійно незалежними векторами***.

Вектори називають ***базисом***, коли вони лінійно незалежні і для всіх $x \in$ M, $x = \sum\limits_k a_k e_k$ виражаються єдиним способом. Числа a_k

називають координатами вектора x в базисі $\{e_k\}$. Число n базисних векторів простору M називають розмірністю простору — dim M. Значення цього числа від вибору базису не залежить.

Лінійною формою (функціоналом) на лінійному просторі M називають функцію, значення $f(x)$ якої належать K, тобто є числами, для якої $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $x,y\in$ M (суперпозиція) і $f(ax)=af(x), x\in$ M, $a\in K$ (однорідність).

Якщо:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k ,$$

де $\{e_k\}$ — базис простору M , то:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

Легко помітити, що добуток лінійних форм над векторним простором M є також векторним простором M', який називають спряженим простором для простору M.

Розглянемо поле комплексних чисел C, у якому кожен елемент $c=a+b\Theta$, де $\Theta = \sqrt{-1}$, $a,b\in K$. Тоді спряжений елементу C буде елемент $C^* = a - b\Theta$, а $c \cdot c^* = a^2 - b^2\Theta^2$ — завжди дійсне і більше нуля $c \cdot c^* = 0$, коли c=0. Для поля C операцію комплексної спряженості називають ***інволюцією***:

$$\left(x^*\right)^* = x, (x+y)^* = x^* + y^*, x, y \in C .$$

Означимо ***скалярний добуток*** векторів, як функціонал (x,y) з властивостями:

1) $(x+y, z) = (x,z)+(y, z)$,
2) $(x, y+z) = (x,y)+(x, z)$,
3) $(ax,y) = a(x,y)$, $a\in K$,
4) $(x,ay) = a^*(x,y)$

(дистрибутивності, однорідності, симетрії).

Вектори $x,y\in$ M називають ***ортогональними***, якщо $(x,y)=0$. Ортогональні вектори лінійно незалежні.

Для базису e_k, $k=\overline{1,n}$

$$(e_k, e_e)=\delta_{ke}, k,e=\overline{1,n}, \qquad (1.1.)$$

де δ_{ke} — символ Кронекера, рівний 1 для $k=l$ і нулю для інших k і l. Тоді, якщо $x=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, $y=\sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k$, то скалярний добуток —

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \qquad (1.2.)$$

(див. означення скалярного добутку).

Для $x=y$ з (1.2.) отримаємо:

$$(x,x)=\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2, \qquad (1.3.)$$

що є рівністю Парсеваля, а коефіцієнти x_k тоді даються формулами Фур'є:

$$x_k=(x,e_k), \qquad (1.4.)$$

а сам розклад Фур'є запишеться:

$$x=\sum_{k=1}^{n} (x,e_k)e_k. \qquad (1.5.)$$

Узагальнення ***довжини вектора*** трьохвимірного простору на вектори більш загальні призводить до необхідності введення поняття норми. ***Нормою*** називають функціонал $x\to\|x\|$, де $x\in$ M, $\|x\|\in K$, якщо йому властиві:

1) $\|x\|>0$ — позитивність, додатньоозначеність,

2) $\|x\| = |a| \cdot \|x\|$ — абсолютна однорідність,

3) $\|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\|$ — нерівність трикутника.

У просторі зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$зазвичай норму означають так:

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} \tag{1.6.}$$

N-вимірний простір з нормою називають простором ***Мінковського*** (German Minkovsky, 1864—1909 р.р., Прусія, Німеччина), а коли $n=\infty$ — простором Банаха (Стефан Банах, працював у Львові, помер у 1946 р.). Простір з нормою (1.6.) називають евклідовим (Евклід, V ст. до Р.Х.), а при $n=\infty$ — гільбертовим (David Hilbert, 1862–1919 р.р., Прусія, Німеччина). Назвав так цей простір Дж. фон Нейман — американський математик угорського походження.

У загальному випадку часто означають l_p норму:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Розглядають випадки:

1) $p=\infty$. Тоді $\|x\|_\infty = \max|x_k|$ (так звана рівномірна норма);

2) $p=2$ (див формулу (1.6.)).

В евклідовому просторі справедливою є нерівність Буняковського-Коші:

$$|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|.$$

Знак рівності буде у випадку, коли $y=ax$ (вектори лінійно залежні).

Теорема Ф.Ріса (Frederic Riesz, 1880–1956, Угорщина):

Лінійна форма (функціонал) у евклідовому просторі означується скалярним добутком (однозначно):

$$f(x)=(x,y) \tag{1.7.}$$

Якщо $x\in E$, $f(x)$ — лінійний функціонал на E, значення якого $f\in E'$, а $\varphi_x(f)$ — лінійний функціонал на E', значення якого $\varphi_x\in E''$, то відображення φ:$E\to E''$ є ізоморфізмом, і кожен функціонал на E є вектором в E', а кожен вектор з E є функціоналом на E''.

Простір зі скалярним добутком над полем комплексних чисел називається ***унітарним***. Для неортонормованого базису $\{f_k, k=\overline{1,n}\}$в унітарному просторі умову ортогональності векторів підмінюють більш загальною умовою: $f(x)=0$ — взаємної ортогональності лінійного функціоналу $[f]$ і вектора x (***біортогональності***).

Систему векторів $\{g_k, k=\overline{1,n}\}$ і систему лінійних функціоналів $\{f_k, k=\overline{1,n}\}$ називають взаємно біортогональними, якщо:

$$f_k(g_e)=\delta_{kl},\ k,l=\overline{1,n}, \tag{1.8.}$$

що є узагальненням (1.1.). Відповідно до (1.4.) і (1.5.) матимемо формули:

$$x_k = f_k(x),\ x = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k,$$

а до (1.2.) і (1.3.) — формули:

$$\left(x, y^*\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)(g_k, y);\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)(g_k, x).$$

Відомі ефективні алгоритми побудови ортонормованих і біортогональних систем за даними системами лінійно незалежних векторів.

В застосуваннях теорії сигналів важливим є поняття ***білінійної форми***. Білінійною формою у векторному просторі М над полем K називають функцію $f(x,y)$, $x,y\in$ М, $f\in K$, якщо:

1) $f(x+y,z) = f(x,z)+f(y,z)$;
2) $f(x,y+z) = f(x,y)+f(x,z)$;
3) $f(ax,y) = af(x,y)$;
4) $f(x,ay) = \bar{a}\ f(x,y)$.

Для базису $\{g_k, k=\overline{1,n}\}$ простору М білінійна форма задається матрицею $f(g_k,g_l)=a_{kl}$, $k,e=\overline{1,n}$. Тоді —

$$f(x,y)=\sum_{k,l=1}^{n} x_k y_l f(g_k,g_l)=\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k y_l \,.$$

Розглядаючи пари векторів $\{x,y\}$, отримаємо новий лінійний простір — декартовий добуток. Якщо E_1, E_2 — евклідові простори, то декартовий добуток їх позначають $E_1 \times E_2$. Відповідно, функціонал $B(x,y)$ на $E_1 \times E_2$ називають білінійним, якщо для кожного $x \in E_1$ функціонал $B_x(y)=B(x,y)$ на просторі E_2 лінійний, тобто $B_x \in E'_2$ і для кожного $y \in E_2$ функціонал $B'_y(x)=B(x,y)$ на просторі E_1 лінійний, тобто $B'_y \in E'_1$. Для базисів $\{g_k, k=\overline{1,n}\}$ і $\{g_k, k=\overline{1,n}\}$ просторів E_1 і E_2 білінійний функціонал визначається матрицею $b_{kl}=B(e_k,g_l)$.

Для ермітового білінійного функціоналу $H(x,y)$, $x,y \in$ М виконується умова $H(x,y)=H(y,x)$, $H(x,y)=\sum_{k,l=1}^{r} h_{kl} x_k \overline{y_l}$ де $r \le n$ — ранг функціоналу. Матриця h_{kl} — ермітова: $h_{kl}=\overline{h_{lk}}$. Якщо $H(x,x)>0$, $x \in$ М, то ермітову форму називають додатньою.

Якщо $r<n$, то білінійний функціонал фактично означено на $\mathrm{E}|\eta_i \times \mathrm{E}|\eta_n$, де $\mathrm{E}|\eta_n$ — фактор-простір, а η_n — нуль-простір білінійного функціоналу H, тобто $x \in$ Е такі, що $H(x,x)=0$. Очевидно, що ранг H рівний $n\text{-}dim\,\eta_n$.

Розділ 2

ОПЕРАТОРИ У ЛІНІЙНОМУ ВЕКТОРНОМУ ПРОСТОРІ

2.1. Оператори у кінцевомірних просторах

Оператор A: $M_1 \to M_2$ є відображенням простору M_1 в простір M_2 або для $x \in M_1$, $Ax \in M_2$. Якщо $A(x+y)=Ax+Ay$ (дистрибутивність), $A(ax)=aAx$ (однорідність), $a \in K$, то оператор A називають ***лінійним***. Таким чином, лінійний оператор — гомоморфізм.

Якщо А: М→М, то це ендоморфізм. Якщо ж оператор є ізоморфізмом, тобто існує обернений оператор, то його називають ***регулярним*** (часто — ***невиродженим***).

Спряжений оператор $\tilde{A}: y(Ax) = \left(\tilde{A}\,y\right)(x)$, $y \in M'_2$, $\tilde{A}y \in M'_1$. Для евклідових просторів E_1 і E_2 із скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{E_1}$ і $(\cdot,\cdot)_{E_2}$ оператор $\tilde{A}$, спряжений оператору A: $E_1 \to E_2$ означується як:

$$(Ax, y)_{E_1} = \left(x, \tilde{A}\,y\right)_{E_2}, \; x \in E_1, y \in E_2 .$$

Самоспряжений оператор A: $E \to E$ називають ще ***ермітовим***. Для нього $\tilde{A}=A$, тобто $(Ax,y)=(x,Ay)$, $x,y \in E$.

В кінцевоивмірному просторі E_1 розмірності $dimE_1=n_1$ оператор A визначається своїми значеннями на базисі $\left\{e_k^1, k=\overline{1,n_1}\right\}$ простору E_1:

$$y = Ax = \sum_{k=1}^{n_1} x_k\, Ae_k^1 .$$

Якщо $\dim E_2 = n_2, \left\{e_k^2 \ , k = \overline{1, n_2}\right\}$ — базис E_2, то $Ae_k^1 = \sum_{k=1}^{n_2} a_{ik} e_i^2$. Це означає, що $y_i = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} x_k \ , i = \overline{1, n_2}$.

Тобто, при фіксованих базисах в E_1 і E_2 лінійний оператор однозначно визначається матрицею $\|a_{ik}\|, \ i = \overline{1, n_2}, k = \overline{1, n_1}$.

Розмірність простору образів $E_2 = AE_1$ називають ***рангом оператора A***, позначають ***rg*** *A*, а розмірність його нуль-простору — множини розв'язків рівняння $Ax=0$ — ***дефектом оператора A***, позначають ***def*** *A*.

Якщо *def A*=0, то оператор ***обернуваний*** (оборотній).

Якщо послідовне застосування операторів з множини операторів розуміють як операцію множення операторів, то це буде ***кільце операторів над лінійним простором***. Ізоморфною цій алгебрі (кільцю) буде алгебра матриць. Тоді одиницею у цій алгебрі буде матриця $I = \|\delta_{lk}\|$, а оберненим елементом — матриця з елементами $Ca_{kl} det\ A$, де Ca_{kl} — алгебраїчне доповнення елемента a_{kl}, $det\ A$ — визначник матриці.

Рівняння $Au=\lambda u$ визначає такий вектор $u \neq 0$, для якого можна вказати число λ, яке називають ***власним значенням оператора A***. Вектор *u*, відповідно, називають ***власним вектором***. Множину власних значень оператора називають ***спектром***. Якщо оператор заданий матрицею, то власні числа знаходять з розв'язку рівняння —

$$det\,(\mathrm{A} - \lambda E)=0.$$

Кожний власний вектор породжує інваріантний лінійний простір — $\{au_l \ , a \in K\}$. У цьому просторі оператор *A* діє так: $A(au_l)=\mathrm{a}(Au_l)=\mathrm{a}\lambda_l u_l$, тобто дія оператора зводиться до множення на власне число λ_l.

Якщо за базис у просторі *E* взяти множину власних векторів $\{u_l \ , l = \overline{1, n}\}$, то його матриця буде ортогональною. Тому,

$$A_x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k u_k \qquad (2.1)$$

Оператор A називають ***скалярним***, якщо він має власний базис. Якщо число точок спектру рівне $n=dim\ E$, то це ***оператор простої структури***. Із формули (1) видно, що оператор простої лінійної структури є сумою операторів рангу 1 і розбиває простір E на інваріантні підпростори, у яких він є скалярним.

Операція переходу до спряженого оператора називається ***інволюцією*** і має властивості:

1) $(\tilde{A})^{\sim} = A$;
2) $(A+B)^{\sim} = \tilde{A} + \tilde{B}$;
3) $(\mathrm{a}\tilde{A}) = \bar{a}\tilde{A}$;
4) $(AB) = \tilde{A}\ \tilde{B}$;
5) $(A^{-1})^{\sim} = (\tilde{A})^{-1}$.

Для самоспряженого оператора $(\bar{A})_{ij} = \bar{A}_{ij}$. Для ермітового оператора $h_{ij} = \bar{h}_{ij}$, $(Hu, u) = (u, Hu)$, €‡ ” $\lambda(u, u) = \bar{\lambda}(u, u)$, □”“— $\bar{\lambda} = \lambda$, або $\lambda(u,u) = \bar{\lambda}(u,u)$, тому $\bar{\lambda} = \lambda$, тобто власні числа є дійсними; $(Hu_i, u_i)=(u_i, Hu_i)$, звідси $\lambda_i(u_i, u_j)= \lambda_j(u_i, u_j)$, або $(\lambda_i - \lambda_j)(u_i, u_j)$, а оскільки $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $(u_i, u_j)=0$, тобто власні вектори є ортогональні, або, приймаючи $(u_j, u_j)=1$, власні вектори ермітового оператора є базисом. Для ермітового оператора розклад (1) має вигляд:

$$A_x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, u_k) u_k ,$$

оператор має вигляд:

$$A_x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, u_k) u_k , \qquad (2.2.)$$

а функція від оператора $f(A)$ означується —

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)(\cdot, u_k)u_k \,.$$

Додатнім називають оператор P, для якого при всяких $x \in E$ справедливо $(Px,x)>0$, а для $x=u_i$ бачимо, що $(Pu_i,u_i)=\lambda_i>0$, тобто ***власні значення додатні***.

Якщо $\tilde{U} = U^{-1}$, то оператор U є ***унітарним***. Він не змінює значення скалярного добутку, а отже і норми вектору; його власні значення за модулем рівні одиниці:

$$(Ux,Uy) = \left(x,\tilde{U}Uy\right) = \left(x,U^{-1}Uy\right) = (x,y)$$

$$(u_n,u_n) = (\lambda u,\lambda u) = |\lambda|^2 (u,u), \text{ тобто } |\lambda|^2 = 1$$

Оператор P в гільбертовому просторі називають оператором проектування, якщо він лінійний, ермітовий, ідемпотентний ($P^2=P$). За останньою властивістю власні значення цього оператора рівні одиниці: для підпростору L, який є областю значень проектного оператора, або нульові — для ортогонального доповнення до L. Якщо $L_1 \perp L_2$, то $P_{L1}\, P_{L2} = 0$, і проектори P_{L1} і P_{L2} називають ортогональними.

Унітарні оператори — аналоги комплексних чисел на одиничному колі.

Має місце ***полярний розклад*** оператора A: $A = PU, P = \left(\tilde{A}A\right)^{\frac{1}{2}}$. Це аналог показникової форми комплексного числа: $z = |z| e^{j \arg z}$.

За аналогією l^p норми векторів, виходячи з розкладу типу (2.2.), означимо ***норму оператора***:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p(A)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Важливі окремі випадки:

1) p=∞, тоді отримаємо рівномірну норму $\|A\|_{\infty} = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \lambda_k(P)$;

2) p=1, тоді отримаємо слідову норму (слід оператора):

$$tr\,A = \|A\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(P) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{kk}\ ;$$

3) p=2, тоді отримаємо норму Гільберта-Шмідта, або абсолютну норму:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2(P)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left|a_{kj}\right|^2}\ .$$

Для цих форм справедлива нерівність:

$$\|A\| \le \|A\|_2 \le tr\,A. \qquad (2.3.)$$

Ермітову білінійну форму $f(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j \bar{y}_k$ можна записати ще так: $f(x,y)=(A_f x,y)$, де $A_f = \bar{A}$; $\bar{A}$ — оператор з матрицею $\|a_{jk}\|$. Додатню форму можна вибрати за скалярний добуток, (вона задовільняє відповідні аксіоми). Це вказує на можливість породження нових просторів за допомогою додатніх операторів. Білінійна форма має самий простий канонічний вигляд для оператора з матрицею у власному базисі: $f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \bar{y}_k$.

Застосовуючи метод Якобі, який використовує метод Гауса зведення квадратної матриці до трикутного вигляду, можна отримати аналогічну форму, але із коефіцієнтами відмінними від власних значень канонічного вигляду.

Має місце закон інерції для канонічного вигляду білінійних форм: число додатніх p і від'ємних q коефіцієнтів не залежить від вигляду перетворення, яке приводить висхідну білінійну форму до канонічного вигляду. Числа p і q називають додатніми і від'ємними індексами інерції, їх сума рівна рангу: $p + q = r$. Очевидно, що для додатньої форми $p = r$.

Коли перетворення T, яке приводить білінійну форму до канонічного вигляду, унітарне ($T^{-1} = \tilde{T}$), то вигляд форми називають приведеним до головних осей. Тоді матриця перетворення T має стовпчиками ортонормовані власні вектори матриці оператора.

Приведена до головних осей матриця має вигляд:

$$B(u,v) = \sum_{i=1}^{u} \lambda_j u_j \bar{v}_j \;.$$

Додатні оператори мають важливе значення при вивченні систем і сигналів.

2.2. Оператори у нескінченновимірних просторах

Перехід від алгебри до аналізу — перехід до нової якості. Він пов'язаний з граничним переходом: ***границею послідовності*** a_k, $k\to\infty$ називають число a таке, що починаючи із деякого N при $k>N$ віддаль від a_k до a стає меншою від як завгодно малого ε.

Тому для знаходження границі необхідно ввести (вибрати) поняття віддалі. Аксіоматично це означує $M \times M \to K$ відображення ρ таке, що:

1) $\rho(x, y) > 0$, $x \neq y$, $\rho(x, x) = 0$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Простір із заданою віддаллю (метрикою) називається ***метричним простором***.

Узагальненням теорії кінцевовимірних векторів із скалярним добутком на нескінченновимірний випадок є ***теорія гільбертового простору***. Оскільки скалярним добутком можна ввести метрику: $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — віддаль визначається нормою, то гільбертовий простір дозволяє розвинути питання аналізу.

Для виконання умови замкнутості гільбертового простору за ***гільбертів простір*** **(**ГП**)** вважають повний простір із скалярним добутком. Тобто, для розвитку аналізу у векторному просторі із неозначеним скалярним добутком, але із заданою нормою, необхідно вимагати ***повноти*** простору. Простір Банаха — повний лінійний нормований векторний простір (див. означення норми), у якому кожна послідовність Коші $\{x_k\}$має границю $\lim\limits_{k, j \to \infty} \|x_k - x_j\| = 0$ і для кожного x: $\lim\limits_{k, j \to \infty} \|x_k - x_j\| = 0$. ГП, як і простір Банаха, отримується шляхом ***приєднання*** граничних точок множини (або, як кажуть, ***замиканням*** лінійної оболонки чи ***поповненням*** простору). Якщо множина метричного простору зліченна і її замикання містить весь простір, то простір називають ***сепарабельним***. І в такому просторі для будь-якого елементу можна знайти як завгодно близький до нього елемент цього простору. Якщо $\{e_k\}$ — базис ГП, то комбінації вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$, коли $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 < \infty$ скрізь будуть густою множиною. Таким чином, сепарабельний ГП має зліченний базис.

Замкнувши за l^2-нормою множину n-ок (кінцевих числових послідовностей) отримаємо l^2***-простір***. Тут факти відомі відносно простору E_N (N-вимірного комплексного простору Евкліда) переносять на нескінченновимірний аналог — простір Гільберта (ГП).

Оператори в ГП мають зображення вигляду операторів у кінцевовимірному просторі. При поповненні простору кінцевовимірних операторів, отримуємо класи операторів ГП.

1) неперервні оператори, отримані поповненням за нормою $\|A\|$, для яких $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = 0$;

2) оператори Гільберта-Шмідта, отримані поповненням за нормою $\|A\|_2$, для яких $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$;

3) ядрові оператори, отримані поповненням за нормою $\|A\|_1$=*trA*, для яких $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty$.

Співвідношення між класами операторів таке: ядрові оператори є операторами Гільберта-Шмідта, а останні — неперервними операторами (див. для порівняння (2.3.)). Важливою у вжитку реалізацією простору *H* є ***простір*** $L^2(T)$. Його елементи — класи еквівалентності функцій (вимірних) на множині *T* (вимірній, з кінцевою мірою) інтегровних з квадратом модуля $\int_T |f(t)|^2 dt < \infty$ (наприклад, інтегровних за Лебегом, коли інтеграл розглядають у сенсі Лебега).

Множина стане також ГП, якщо скалярний добуток задати так: $(f,g) = \int_T f(t)\overline{g(t)}dt$. Збіжність у такому просторі означають так: $\lim_{n\to\infty} \int_T |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 0$, записуючи $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, .f_n(t) = f(t)$ (*limes in medio* — границя в середньому).

Якщо $\{\varphi_k(t), k = \overline{1,\infty}\}, t \in T$ — повна ортонормована система в сепарабельному ГП, то в $L^2(T)$ має місце розклад:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k(t) \tag{2.4.}$$

і теорема Парсеваля:

$$\int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 .$$

Теорема Парсеваля описує унітарність та ізометрію (збереження норми) при відображенні $L^2(T) \to l^2$. Формулу (2.4.) такого відображення можна записати ще таким чином:

$$f(t) = \int_T f(s) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \overline{\varphi_k(s)} \right] ds, \tag{2.5.}$$

звідки видно, що крім ортонормованості $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$ виконується також інша „ортонормованість“:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \overline{\varphi(s)} = \delta(t-s), \tag{2.6.}$$

де $\delta(t–s)$ — так звана функція Дірака, означає рівність своїх значень нулеві крім випадку t=s, коли вона рівна нескінченності. Точка (t=s) називається ***сингулярною***.

Тому, виходячи з (2.5.) маємо:

$$f(t) = \int_T f(s) \delta(t-s) ds. \tag{2.7.}$$

Формула (2.7.) описує “розклад” по імпульсному базисові {δ(t–s), $s \in T$} ортонормованому у сенсі

$$\int_T \delta(t-u) \delta(s-u) du = \delta(t-s).$$

Зауважимо, що тут T — континиум, інтеграли в цих записах — інтеграли на вимірних множинах з кінцевою мірою, елементами множини є функції. Тут має місце перехід від одних понять до інших.

Наведені вище вирази "строго" трактують у теорії узагальнених функцій — лінійних функціоналів на множині основних функцій, фінітних, тобто рівних нулеві поза кінцевим інтервалом. За умовами неперервності ці функціонали можна поширити і на функції з L^2. Узагальнені функції пов'язані ***із слабкою збіжністю*** в ГП: послідовність $f_k \in H, k = \overline{1,\infty}$ ***слабкозбіжна,*** що записують $f_k \xrightarrow{\text{сл.}} f$,якщо для всякого $h \in H \lim\limits_{k \to \infty} (f_k, h) = (f, h)$. ***Збіжність за нормою*** (її називають ще сильною збіжністю) записують —

$$\|f_k\| = \|f\|.$$

Сильнозбіжна послідовність збігається слабко. Але слабкозбіжна послідовність не завжди є сильнозбіжною.

Якщо $\lim\limits_{k \to \infty} \|f_k\| = \|f\|$, то завдяки

$$\|f_k - f\|^2 = \|f_k\|^2 - (f_k, f) - (f, f_k) - \|f\|^2,$$

слабка збіжність тягне сильну.

Простір Гільберта слабко повний (завдяки обмеженості слабкозбіжної послідовності). Сповна неперервний оператор переводить слабкозбіжну послідовність у сильнозбіжну. На практиці конструктивним є поняття δ-подібної послідовності, наприклад послідовність вигляду $\delta_n(t-s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(t-s)^2}{2n}}$. Тоді,

$$\lim_{n \to \infty} \left(f, \delta_n^t \right) = \left(f, \delta^t \right), \tag{2.8.}$$

δ^t означає "зсунутий на *t* функціонал, такий, що:

$$\delta(f) = \left(f, \delta^t \right) = f(t). \tag{2.9.}$$

Функції δ(t) не є елементами $L^2(T)$.

Аналогічно зображенню оператора (2.2.) в $L^2(T)$, маємо:

$$A_t = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)(\cdot, \varphi_k(t)) \qquad (2.10.)$$

де $\{\lambda_k(A),\ k=\overline{1,\infty}\}$ — спектр оператора A, тому таке зображення природньо назвати ***спектральним***, як і розклад (2.4.) функції f∈ $L^2(T)$, якщо $\{\varphi_k(t)\}$ — власний базис оператора:

$$(Af(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)(f, \varphi_k)\varphi_k(t).$$

Розклад (2.7.) — зображення функції в "часовій" області; (2.10.) — в "частотній" області.

Як бачимо, простір $L^2(T)$ ізоморфний простору l^2, а тому і сепарабельний (хоч і континуальний). Аналогом матриці оператора є його ***ядро*** g(t, s), t, s∈ T. Ядро — функція двох змінних.

$$(Af(t)) = \int_T f(s) f(t,s) ds.$$

Тоді δ-функція є ядром одиничного (тотожного) оператора (див. формулу (2.7.)). Відомо, що такий оператор не має звичайного ядра.

У випадку самоспряженості на основі (2.8.), (2.9.), (2.10.) отримаємо, що ядро оператора А:

$$g_A(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)\overline{\left(\delta^t, \varphi_k\right)}\varphi_k(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)\varphi_k(t)\overline{\varphi(s)}.$$

Таким чином, оператори розрізняються за властивостями ядер.

За властивостями ядер множину операторів розбивають також на класи:

1) сповна неперервних операторів, для яких $\max\limits_{t,s\in T} |g(t,s)| < \infty$ майже скрізь на $T\times T$;

2) оператори Гільберта-Шмідта, для яких $\iint\limits_{T\times T} |g(t,s)|^2 dtds < \infty$;

3) ядрові оператори, для яких $\int\limits_{T} g(t,t)dt < \infty$.

Розділ 3

БАЗИСИ ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ

Зображення сигналів та систем, а отже і методів формулювання та розв'язування задач, залежить від вибору базису. В сепарабельному гільбертовому просторі повна ортонормована система векторів $\{g_i,\ i=\overline{1,n}\}$ є ортонормованим базисом, тобто $(g_i, g_j)=\delta_{ij}$. Елементи цього базису лінійно незалежні (за означенням). Якщо K_N — лінійна оболонка цього базису, то K_N — N-вимірний простір. Для дослідження властивостей базису використовують матрицю $\|(g_i, g_j)\|,\ i, j=\overline{1,n}$, яку називають матрицею Грама, її визначник $\det\|g_i, g_j\|=\partial(g_1,...,g_n),\ i, j=\overline{1,n}$ — визначником Грама. Для лінійної незалежності векторів g_i необхідно та достатньо, щоб визначник Грама був рівним нулеві.

Матриця Грама є додатньо означеною, тому що

$$\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\overline{\alpha_j}(g_i, g_j)=\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i g_i\right\|^2\geq 0,$$

(бо вектори лінійно незалежні), тобто вона породжує додатньо означений оператор, і, навпаки, — кожна додатньо означена матриця є матрицею Грама деякої лінійнонезалежної системи векторів. Видно, що кожен додатній оператор породжує сім'ю лінійнонезалежних систем векторів, більше того, всі ці системи будуть базисами. Нагадаймо, що K_N у поданому тут контексті — підпростір H, тобто $K_N\subset H$. Для визначення степені наближення $K_N\subset H$ розглянемо віддаль між векторам з K_N і H, тобто $h\in H$ і $g\in K_N$ (рис.3.1). Для цього введемо поняття проекції $g=\sum_{k=1}^{n}a_k g_k=\Pr_{K_N} h$ вектора з H на K_N.

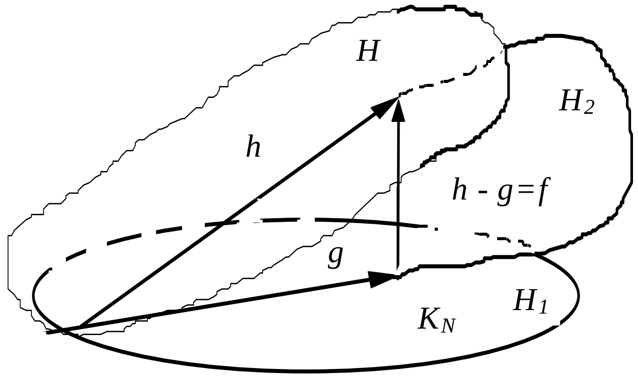

Рис.3.1. Система векторів

Тоді віддаль $d = \|h - g\|_H$. Вектор (h–g) ортогональний до g: (h-g)⊥g . Тому $d = \|h - g\|_H$.

Оскільки h–g⊥g, то h–g⊥g_j , або

$$\left(h - g, g_j\right) = (h, g_j) - \sum_{k=1}^{n} a_k \left(g_k, g_j\right) = 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Тобто одержимо систему n рівнянь з якої можемо визначити a_k (коефіцієнти розкладу вектора g).

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left(g_k, g_j\right) = (h, g_j),\ j = \overline{1,n}.$$

За правилом Крамера

$$a_k = \frac{(-1)^k \partial\left(h, g_1, ..., g_{k-1}, g_{k+1}, ..., g_n\right)}{\partial\left(g_1, ..., g_n\right)}.$$

За введеним позначенням визначника Грама випишемо чисельник цього виразу — алгебраїчне доповнення елементу (h,g_k) визначника (з точністю до знаку):

$$\det\begin{Vmatrix} z & (g_1,h) & (g_2,h) & \dots & (g_n,h) \\ (h,g_1) & (g_1,g_1) & (g_2,g_1) & \dots & (g_n,g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (h,g_n) & (g_1,g_n) & (g_2,g_n) & \dots & (g_n,g_n) \end{Vmatrix}.$$

Взявши $z = (h,h)$, отримаємо:

$$d^2 = \frac{\partial(h, g_1,\dots, g_n)}{\partial(g_1,\dots, g_n)}.$$

Існування біортогональної, до системи $\{g_j, j = \overline{1,\infty}\}$, послідовності векторів $\{f_j, j = \overline{1,\infty}\}$означає, що для будь-якого j вектор f_j не належить замкнутій лінійній оболонці M_j векторів $\{g_{i,j} = \overline{1,\infty}\}$ з M, а належить її ортогональному доповненню
$M \ominus M_j$.

Якщо для будь-якого j величина —

$$d_j^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial(f_j, f_{j+1},\dots, f_k)}{\partial(f_{j+1},\dots, f_k)},$$

відмінна від нуля, то ця умова еквівалентна тому, що $g_j \notin M_j$.

Очевидно, що описана ситуація вимагає виконання певних умов. Оскільки, матриця Грама породжує додатню білінійну форму, а власні значення такої форми мають екстремальні властивості ($0<\lambda_{min}<\lambda_{max}<\infty$), то для всякого вектора з K_n, з розкладом $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k g_k$ мають місце нерівності:

$$\lambda_{min} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n} (g_k, g_j) c_k \overline{c_j} \le \lambda_{max} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2. \qquad (3.1.)$$

В загальному випадку $\|h\|$ лежить в інтервалі

$$\|h\|^2 \in \left[\lambda_{min} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 , \lambda_{max} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \right]. \qquad (3.2.)$$

Базиси, для яких виконується остання умова, називають ***базисами Ріса***. Іншими словами, для таких базисів отримано однозначне відображення H на l^2 ($H \to l^2$), коли вектор $h = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k$.

Трактуючи $\sum_{k,j=1}^{n} (g_k, g_j) c_k \overline{c_j}$ як скалярний добуток$(\cdot,\cdot)_1$ в l^2 просторі послідовностей, а звичайну l^2 норму скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_0$, можна сказати, що знайдуться такі константи C_1, C_2, для яких

$$C_1(f,f)_0 \leq (f,f)_1 \leq C_2(f,f)_0 \ .$$

Тобто, при розкладі за базисом Ріса, відображаючи H в l^2 можна знайти $(\cdot,\cdot)_1$ — норму — ***топологічно еквівалентну*** звичайній нормі.

Біортогонально спряжена система векторів також є базисом.

Розглянемо тепер загальний вигляд базисів з однаковими матрицями Грама. Для $\Gamma\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$ та U — довільного унітарного оператора, коли Γ — оператор, матриця якого є матрицею Грама базису $\{g_i, i = \overline{1,\infty}\}$можна отримати:

$$g_k = \Gamma^{\frac{1}{2}} U \varphi_k \ , \qquad (3.3.)$$

бо для ортонормованого базису $\{e_k\}$ вектори вигляду $g_k = \Gamma^{\frac{1}{2}} e_k$, мають матрицю Грама рівну матриці оператора Γ в базисі $\{e_k\}$. Дійсно

$$\left(g_k, g_j\right) = \left(\Gamma^{\frac{1}{2}} e_k , \Gamma^{\frac{1}{2}} e_k \right) = \left(\Gamma e_k e_j\right), \ e_k = U\varphi_k \ .$$

Вектори (3.3.) утворюють ортонормований базис в просторі зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_1=(\Gamma^{-1}\cdot,\cdot)_0$:

$$\left(g_k, g_j\right)=\left(\partial^{-1}\partial^{\frac{1}{2}}U\varphi_k, \partial^{\frac{1}{2}}U\varphi_j\right)_0=\left(U\varphi_k, U\varphi_j\right)_0=\left(\varphi_k, \varphi_j\right)_0=\delta_{kj}$$

Вектори вигляду:

$$f_j=\partial^{\frac{1}{2}}U\varphi_j \qquad (3.4.)$$

утворюють біортогональну з системою $\{g_k\}$, систему. Вона є ортонормованим базисом в *ГП* зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_2=(\Gamma\cdot,\cdot)_0$.

Як видно, що поряд з *ГП* зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_0$ можна розглядати простори Гільберта H_1 та H_2 зі скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_1$ і $(\cdot,\cdot)_2$ відповідно, з ортонормованими базисами в яких будуть системи $\{g_k\}$ (3.3.) і $\{f_j\}$ (3.4.), зв'язані співвідношеннями біортогональності $(g_k, f_j)=\delta_{kj}$.

Базиси $\{g_k\}$ і $\{f_j\}$ — базиси Ріса.

В загальному випадку, якщо A — додатній оператор, то білінійний функціонал (Ax,y) можна взяти за новий скалярний добуток, величину (Ax,x) — за норму вектора. При цьому утворений простір має назву ***енергетичного***, або ***Фрідріхса*** і позначається $H[A]$. Тому $H_1\equiv H[\Gamma]$, $H_2\equiv H[\Gamma^{-1}]$ — це простори Фрідріхса.

Схема отримання базисів Ріса наступна: якщо A — лінійний, обмежений, оборотній оператор, а $\{\varphi_j\}$ — ортонормований базис простору, то з огляду на співвідношення:

$$\left(g_k, g_j\right)=\left(\partial^{-1}\partial^{\frac{1}{2}}U\varphi_k, \partial^{\frac{1}{2}}U\varphi_j\right)=\left(U\varphi_k, U\varphi_j\right)_0=\left(\varphi_k, \varphi_j\right)_0=\delta_{kj}\ .,$$

базиси Ріса задаються формулами —

$$g_k = A\varphi_k;\ f_j = \tilde{A}^{-1}\varphi_j$$

(3.5.)

Вони ортонормовані в просторах $H[P]$ і $H[P^{-1}]$, де $P=A\tilde{A}$ — додатній обмежений оборотній оператор. Так що оператор A є узагальненим квадратним коренем оператора P. Множина таких коренів вичерпується операторами вигляду $A = P^{\frac{1}{2}}U$, де U — довільний унітарний оператор.

З формули (3.5.) маємо:

$$\varphi_j=\tilde{A}f_j,\ \text{тому}\ g_k=A\tilde{A}f_k=Pf_k,\quad H[P^{-1}]\subset H\subset H[P]$$

Якщо $\{g_k\}$ — базис Ріса, B — обмежений оборотній оператор, то всі множини векторів $\{Bg_k\}$будуть базисом Ріса. Тому базис Ріса є ***афінним поняттям*** — залежить лише від лінійних операцій і топології простору H, а не від вигляду скалярного добутку у ньому.

Виникнення просторів Фрідріхса $H[P]$ і $H[P^{-1}]$ пов'язують з поняттям розщеплення додатніх операторів. ***В загальному випадку можливість розщеплення не вивчається.*** Якщо ГП утворює всюди щільну множину у банаховому просторі B і оператор $H\to B$ неперервний: $\|x\|_B \le c\|x\|_H$, $x\in H$; A — додатній оператор з B в B'. Тоді можна побудувати розщеплення A: $A=A_1A_2$, де A_2 діє з B в H, A_1 діє з H в B_1.

Породжені додатнім оператором трійки просторів $H[P^{-1}]\subset H\subset H[P]$ називають ***оснащеним простором Гільберта*** (***ОГП***). Сенс оснащення — вираження функціоналів над $H[P^{-1}]$ не через скалярний добуток у цьому просторі, а через скалярний добуток у висхід-ному просторі — що ***еквівалентно заміні у розкладах сильної збіжності на слабку.*** Базиси $\{g_k\}$і $\{f_k\}$в просторах $H[P]$ і $H[P^{-1}]$ будуть базисами Ріса, якщо оператор $A = P^{\frac{1}{2}}U$, а отже і P, обмежений і оборотній, оскільки це еквівалентно, де $g_A(x) \in [\lambda_{min}(A), \lambda_{max}(A)]$, де $g_A(x) = (Ax, x)/(x, x)$ (відношення Релея) і виконанню (3.1.). Коли P сповна неперервний оператор, то його власні значення зверху тягнуть-ся до нуля, а тому $\tilde{A}^{-1}$ — необмежений. Тому концепція базисів Ріса неможлива. Введене О*ГП* дозволяє коректно описати цю ситуацію: величини $f_k=D^{-1}\varphi_k$ інтерпретують як лінійні неперервні функціонали над $H[P^{-1}]$.

Оскільки $\|Dx\|_0^2=\|x\|_{H\left[P^{-1}\right]}^2$, то їх можна поширити і на H. При цьому $\|Dx\|_0^2=\|x\|^2 H\left[P^{-1}\right]$,, де $N^2(D)$ — норма Гільберта-Шмідта оператора D:$N^2(D)=trP$ (слід). Як наслідок,

$$\|x\|_{H[P]}^2\le trP\|x\|_0^2 \text{ µ } \|x\|_{H\left[P^{-1}\right]}^2\ge\frac{1}{trP}\|x\|_0^2 ,$$

тобто норми в H, $H[P^{-1}]$, $H[P]$, топологічно еквівалентні. Таким чином, якщо оператор, за яким в *ГП* будують базис, оборотній, то базис з його власних функцій і біортогонально спряжена система функціоналів будуть системами базисів Ріса; якщо ж оператор необоротній, то маємо біортогональну систему функціоналів як таку.

Перехід до базису Ріса — абстрактне вираження ідеї про ***перехід від ортогональної системи координат з однаковими масштабами на осях до косокутної (афінної) системи з різними масштабами.***

Розглядаючи випадок $H=L^2(T)$ — простір інтегровних з квадратом на відрізку T функцій, встановили характерні властивості простору $H[P^{-1}]$. Оператор P тоді виглядає: $(Px)(t)=\int\limits_T g_p(t,s)x(s)ds$, при цьому $g_p(t,s)\overset{\Delta}{=}P_1\cdot\delta(t-s), g_p(t,s)$ — ядро оператора D. Тому $P_t^{-1}g_p(t–s)=\delta(t–s)$. За властивостями δ–функції в H отримаємо:

$$(P^{-1}y,g(\cdot,s))_0=(y,P^{-1}g(\cdot,s))_0=(y,\delta^s)_0 .$$

Для скалярного добутку в $H[P^{-1}]$ матимемо:

$$[y,g(\cdot,s)]=y(s),y\in L^2(T), \qquad (3.6.)$$

якщо

$$\text{g}(\cdot,\text{s})\in H[P^{-1}] \qquad (3.7.)$$

для майже всіх $s \in T$.

З (3.6.) випливає, що $[g(\cdot,t), g(\cdot,s)]=g(s,t)$,

$$\|g(\cdot,t)\|^2_{H\left[P^{-1}\right]} = g(t,t).$$

Таким чином, для виконання (3.7.) необхідно, щоб:

$$g(t,t)<\infty,\ t\in T,\ \text{тоді}\ g(\cdot,s)\in H[P^{-1}]. \tag{3.8.}$$

Умови (3.6.) і (3.7.) означують ***гільбертовий простір з відтвірним ядром*** $g(t,s)$, який позначають $H[g]$. З (3.6.) видно, що ядро $g(t,s)$ в $H[g]$ грає роль, аналогічну ролі δ–функції в $L^2(T)$.

Умова (3.8.) еквівалентна умові $\int\limits_T g(t,t)dt < \infty$. Так як:

$$g(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t)\overline{\varphi_k(s)}\ ,$$

де λ_k — власні числа, а φ_k — власні функції оператора P. В силу ортонормованості φ_k маємо $\int\limits_T g(t,t)dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$, тобто P — ядерний оператор. Іншими словами — простір Фрідріхса, побудований за ядерним додатнім оператором в $L^2(T)$ співпадає з гільбертовим простором з відтвір-ним ядром $H[g]$.

Аналогічно, простір $H[P]$ має відтвірну властивість $[y,g_{p-1}(\cdot,s)]_{H[P]}=y(s)$. Цей простір містить δ-функції:

$$\left[\delta^t,\delta^t\right]_{H[P]} = \left(P\delta^t,\delta^t\right)_0 = \left(g_P(\cdot,t),\delta^t\right)_0 = g(t,t),$$

звідки —

$$\left\|\delta^t\right\|_{H[P]} = \left(P\delta^t,\delta^t\right)_0 = \sqrt{g(t,t)}\ ,$$

або, для майже всіх t маємо, що $\delta^t \in H[P] \equiv H[g_{p-1}]$.

У просторі l^2 послідовностей роль δ–функцій грає символ Кронекера: $x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta_{\cdot k}$. У свою чергу оператор зображається матрицею, і має місце матриця $a=\|a_{ik}\|$ з відтвірними властивостями, для якої

$$\left[a_{\cdot j}, a_{\cdot k}\right]=a_{kj} \text{ і } \left\|a_{\cdot j}\right\|^2_{H\left[A^{-1}\right]}=a_{ij},$$

так що $a_{\cdot j} \in H\left[A^{-1}\right]$ тоді, коли $a_{jj}<\infty, j=\overline{1,\infty}$.

Для цього досить, щоб $trA=\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}<\infty$, тобто оператор A — ***ядерний.***

Зображення $x_k = (x, \delta_{\bullet k})$ є аналогом часового зображення функції з $L^2(T)$.

ПІСЛЯМОВА.

В цій частині посібника наведено основні відомості про структуру математичних моделей радіоелектронних засобів: функцій (сигналів) і операторів (пристроїв, кіл, систем). Пошук математичних аналогій радіоелектронних засобів в елементах цих структур і їх самих складає сутність моделювання.

Важливими складниками математичних структур функцій і операторів є простори, елементами яких вони є, а також базиси, на основі яких функції і оператори представляють (зображують), наприклад, у вигляді розкладів.

Потреби аналізу висувають необхідність вводу математичних аналогій розмірів, віддалей — а саме, відповідно, норм і метрик у просторах. Наявність метрики робить можливим дослідження збігання послідовностей, близькість функцій.

Звичайно, у поняття простору входять крім множини ще й операції, що мають необхідні для цього властивості (алгебри). Але для реалізації операторів необхідне поняття міри — одиниці масштабу. Тут це поняття не розглядається. Проте, саме на його основі будується інтегральне числення. Міру можна вводити на основі понять метрики і різних граничних понять.

Таким чином, множина, алгебра і міра є трійкою понять, що конструктивно визначає простір. Такі простори вивчатимуться у третій частині посібника (імовірнісний колмогорівський гільбертів простір) і дозволяють будувати методики розрахунків (синтезу) характеристик і параметрів апаратури.

Важливою властивістю (поняттям) у просторах є поняття морфізмів, які дають можливість вивчати і застосовувати математично еквівалентно, але конструктивно (інженерно) більш вигідну структуру при математичному моделюванні. Наприклад, розглядаючи простір обмежених за нормою функцій з операцією згортки, можна побудувати ізоморфний йому простір функцій з операцією множення, що досить важливо практично. Переваги від такого зображення полягають в тому, що на його основі просто формуються задачі, порівняно просто розв’язуються, а також просто інтерпретують отримані результати.

Першими, як практичний метод розв’язування задач, були алгебраїчні лінійні перетворення (системи алгебраїчних рівнянь).

Переніс ідею алгебраїчних лінійних перетворень на нескінченновимірні простори С. Пінкерле (1901 р.). Він вперше аксіоматично означив функційний простір, дав означення лінійного оператора, скалярного добутку, спряженого оператора, ввів поняття спектру лінійного оператора.

Пізніше (у 40-х, 50-х роках XX ст.) Н. Вінером, Дж. Нейманом теорія операторів у конкретних випадках, розвивалася і використовувалася для побудови математичних моделей (сигналів, у ядровій фізиці — чи як її називають, квантовій механіці).

Подальші зауваження фізичних властивостей сигналів та полів стимулювали розвиток їх математичної моделі. Виникло поняття оснащеності гільбертового простору (Гельфенд, Н. Віленкін), гільбертового простору з відтвірним ядром (Т. Кайлатц), Е. Парзен, Я. Гаєк використовують останню структуру при постановці задач прогнозу і згладжування сигналів (початок 60-их років XX ст.). Я. Драган (70-80 рр. XX ст.), використав ОГП при розвитку теорії структур і зображень стохастичних сигналів.

Зауважимо, що за "постачальника" конструктивних елементів матеріалу даного посібника можна взяти математичну фізику (відповідні краєві задачі): рівняння у частинних похідних у відповідних системах координат (прямокутній, циліндричній чи ін.) за певних граничних і початкових умов. Не торкаючись питання побудови (постановки) цих задач, зауважимо згадані конструктивні елементи — множини функцій, множини спеціальних функцій (базисів), як інваріанти певних перетворень. Останні, з одного боку, зауважуються з практики (зсуви, повороти, розтяги і ін.), а з іншого можуть вводитися за теоретичних потреб.

Подібно, як для повного опису зауважуваних в природі фізичних величин (швидкості, сили змінних струмів, ін.) добре підходять комплексні числа, для опису сигналів, так само добре підходять такі властивості як нескінченна вимірність, δ-функції, і інші розглядувані тут поняття. Причому, деякі фізично прості зрозумілі позірно об'єкти (наприклад, послідовність значень якоїсь величини), математично коректно описуються досить складно. При цьому основні результати можуть мати вигляд зовсім простих і зрозумілих формул.

Нагадаємо, що математиці, як і будь-якій науці, притаманні системні властивості її знань, причому, виділимо ті, що надають можливість подальшого саморозвитку. Тому є ще досить напрацьованих нею (математиками) об'єктів, які поки що не використовуються. Крім того, у даному посібнику викладення матеріалу здійснено на "описовому" рівні строгості, задля доведення основної, практичної, інженерної ідеї до студентів і тих, хто знайомиться вперше з таким матеріалом. Для поглиблення знань у царині функціонального аналізу і його застосуваннях потрібно звертатися до спеціальної літератури.

Контрольні питання

1. Природа гармонійного аналізу.
2. Властивість інваріантності.
3. Властивості диференціального оператора.
4. Поняття про алгебри.
5. Поняття групи, кільця, тіла, поля, простору.
6. Відношення симетрії, еквівалентності, порядку.
7. Векторні простори.
8. Базис. Лінійна форма.
9. Скалярний добуток. Ортогональність.
10. Поняття норми.
11. Поняття білінійної форми.
12. Функціонали. Оператори.
13. Ранг оператора.
14. Спектр оператора.
15. Норма оператора у кінцевовимірному просторі.
16. Метричний простір.
17. Теорія гільбертового простору.
18. Теорема Парсеваля.
19. Зображення операторів.
20. Матриця Грама.
21. Поняття про збіжність.
22. Слабка збіжність, збіжність за нормою.
23. Повнота простору. Сепарабельність.
24. Ядро оператора. Класи операторів за виглядом ядер.
25. Оператори ермітові, унітарні, оборотні.
26. Базиси Ріса.
27. Простір Фрідріхса.
28. Афінні базиси.
29. Оснащений гільбертів простір.
30. Проектори.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ

1. Чи утворюють групу за множенням:

а) множина цілих чисел;

б) множина раціональних чисел;

в) множина раціональних чисел, відмінних від нуля;

г) числа +1 і -1;

д) число 0.

2. Перерахувати підгрупи групи цілих чисел за додаванням.

3. *G* — група лінійних функцій. *H* — підгрупа функцій вигляду *ax*. Описати праві і ліві суміжні класи за підгрупою *H*.

4. Довести, що числа $a + ib$, a, b - цілі, $i = \sqrt{-1}$ утворюють кільце.

5. Показати, що в лінійному векорному *n*-вимірному просторі всяку систему незалежних векторів можна доповнити до базису.

6. Знайти власні вектори оператора, матриця якого —

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Чи ортогональні вектори:

$x_1 = (1, 1, 1, 2), x_2 = (1, 2, 3, -3)$?

8. Чи ортогональна матриця ?

$$\begin{vmatrix} \cos 2 & -\sin 2 \\ \sin 2 & \cos 2 \end{vmatrix}$$

9. За яких умов діагональна матриця є унітарною ?

10. Довести, що власні значення ортогональної матриці рівні за модулем одиниці.

11. Знайти вираз оператора (Лапласа) $(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2)$ $u \equiv \Delta u$ в циліндричній системі координат ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$).

12. Чи будуть лінійнонезалежними вектори: $x_1 = (1, 2, 3)$; $x_2 = (3, 6, 7)$.

13. Чи можна в просторі многочленів степені ≤ 2 вибрати базисні многочлени

$1 + t^2$, $1 - t^2$, $1 + 2t$.

14. Чи утворюють лінійний простір множини степені *n* ?

15. Показати, що вектори

$$e_1=(2, 1, -3),\ e_2=(3, 2, -5),\ e_3=(1,-1, 1)$$

утворюють базис трьохвимірного простору. Знайти координати вектора $x = (6, 2, -7)$ у цьому базисові.

16. $x = (x_1, x_2, x_3)$; $Ax = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$. Перевірити, що оператор *A* - лінійний. Знайти його матрицю в базисі $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$.

17. Лінійний оператор в базисі

$$e_1=(8, -6, 7),\ e_2=(-16, 7, -13),\ e_3=(9,-3, 7)$$

має матрицю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{vmatrix}$$

Знайти матрицю в базисі

$$e`_1=(1, -2, 1),\ e`_2=(3, -1, 2),\ e`_3=(2, 1, 2).$$

18. Якщо $f_n \xrightarrow{\text{с л}} f$, і $\|f_n\| \to \|f\|$, то $f_n \to f$ (сильно). Показати.

19. Чи кожній матриці відповідає оператор?

20. Показати, що скалярний добуток в комплексному просторі задовільняє тотожність:

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + j\|x+jy\|^2 - j\|x-jy\|^2$$

(поляризаційна тотожність).

21. Показати, що $(a = b)_{\text{mod n}}$ є відношенням еквівалентності $A \sim B$, коли $a \in A$, $b \in B$.

22. Показати, що відношення $a > b$ є відношенням a f b, $a,b \in R^+$.

23. Дано різницеве рівняння $b_2 y_{n-2} + b_1 y_{n-1} + x_n = y_n$. Розбити множину операцій на підмножини за відношенням еквівалентності та порядку.

24. Який з цих виразів є функціоналом, оператором, функцією, відображенням:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\varphi(t)dt; \qquad f_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jQt}dt = X\left[\frac{Q}{2\pi}\right];$$

$$f_3(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt; \quad f_4(\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} x(\tau - t)h(t)dt;$$

$$f_5(\tau) = \int\limits_{0}^{\infty} x(t + \tau)x(t)dt;$$

25. Обчислити енергію E та норму $\|x\|$ сигналу

$$x(t) = x_0[H(t) - H(t - \tau_0)]$$

26. Математична модель сигналу задана функцією $f(t)$, $-\infty < t < \infty$. Запишіть функцію $f(t)$ у вигляді

$$f(t) = f_{п}(t) + f_{н}(t),$$

де $f_{п}(t)$ — парна частина, $f_{н}(t)$ — непарна.

27. Для довільних сигналів $U(t)$ та $Q(t)$, що належать гільбертовому простору довести рівність паралелограма

$$\|U + Q\|^2 + \|U - Q\|^2 = 2\|U\|^2 + 2\|Q\|^2.$$

28. $\|x\| = \|y\| = 1;\ x, y \in R^n$.

Показати, що $x + y$ і $x - y$ — ортогональні.

29. Перевірити для $t, f \in (-\infty; \infty)$ твердження $x(t) = \delta(t) \Rightarrow X(f) = 1$ (використати рівність Парсеваля).

Список використаної літератури

Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: "Мир", 1979.

Драган Я. П.. Структура и представления моделей стохастических сигналов. Киев: Наукова думка, 1980.

Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Київ: Вища школа, 1974.

Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб Ц. О. Лінійні про-стори. Київ: Вища школа, 1971.

Безрук В. М., Драган Я. П., Омельченко А. В. і ін. Імовірнісні моделі випадкових сигналів та полів у прикладах і задачах. Київ: ІСДО, 1996.