

ЛІТЕРАТУРА



НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА

Б. І. Яворський, Т. М. Рафа

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ КОМП'ЮТЕРНОЇ РЕКОНСТРУКТИВНОЇ ТОМОГРАФІЇ

Навчальний посібник

Б. І. Яворський, Т. М. Рафа

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ КОМП'ЮТЕРНОЇ РЕКОНСТРУКТИВНОЇ ТОМОГРАФІЇ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як
навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які
навчаються за спеціальністю

“Біотехнічні та медичні апарати і системи”

Тернопіль — 2010

Методи та засоби комп'ютерної реконструктивної томографії: Навчальний посібник / Б. І. Яворський, Т. М. Рафа.—Тернопіль: ТНТУ, 2010. — с.

Наведено концептуальні засади, постановку та методи розв'язання задачі Х-променевої комп'ютерної томографії — реконструкції та візуалізації розподілу речовини по площині перерізу біооб'єкту за експериментально отриманим радонівською проекцією цього розподілу.

Викладено математичний, фізичний та прикладний аспекти комп'ютерної томографії, зокрема, проблеми, що виникають при розв'язуванні основної задачі комп'ютерної томографії та методи їх подолання, орієнтовані на використання обчислювальних засобів.

Розрахований на студентів вищих навчальних закладів що навчаються за спеціальністю “Біотехнічні та медичні апарати і системи”

Укладачі: д.т.н., с.н.с. Богдан Іванович Яворський, зав. кафедрою
к.т.н., доц. Тарас Миколайович Рафа

Кафедра „Біотехнічні системи”,
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Рецензенти: д.т.н., проф. Щербак Леонід Миколайович
професор, Національний університет цивільної авіації,
м.Київ

д.т.н., с.н.с.. Муравський Леонід Ігорович
зав. відділом, Фізико-механічний інститут імені
Г.В. Карпенка, НАН України, м. Львів

д.т.н., проф. Сікора Любомир Степанович,
професор, Національний університет „Львівська
політехніка”

Схвалено і рекомендовано до друку Вченою радою Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя, протокол № 4 від 20.05.2008 р.

Гриф надано 22.07.2009 р., лист №1/П-5894 Міністерства освіти і науки України

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 КОМП'ЮТЕРНА РЕКОНСТРУКТИВНА ТОМОГРАФІЯ ЯК ЗАСІБ НЕІНВАЗИВНОЇ ДІАГНОСТИКИ У МЕДИЦИНІ	5
1.1 Вимоги та концептуальні засади побудови медичного обладнання для неінвазивного спостереження внутрішньої структури біооб'єктів	5
1.2 Медична інтроскопія. Комп'ютерна томографія. Емісійна та трансемісійна томографія.	9
РОЗДІЛ 2 ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСАДИ ТОМОГРАФІЇ	12
2.1 Радонівський образ двовимірної функції у прямокутній системі координат	12
2.2 Томографічне зображення та його характеристики і параметри.	16
РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РЕКОНСТРУКЦІЇ ТОМОГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ	19
3.1 Теорема про центральний переріз	19
3.2 Задача реконструкції томографічного зображення	21
3.3 Застосування прямого і оберненого перетворення Фур'є для розв'язання задачі реконструкції томографічного зображення	22
РОЗДІЛ 4 РЕКОНСТРУКЦІЯ ЗВОРОТНІМ ПРОЕКТУВАННЯМ ТА ЇЇ МЕТОДИ	24
4.1 Реконструкція як зворотнє проектування.....	24
4.2 Метод реконструкції на основі зворотнього проектування.....	26
4.3 Застосування розкладу у скінченні ряди	28
РОЗДІЛ 5 ФІЗИЧНА ТА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛІ ТОМОГРАФІЇ	29
5.1 Загальна фізична схема томографії	30
5.2 Рівняння Больцмана та його спрощення при математичному моделюванні взаємодії X-променя зі середовищем у томографії	31
РОЗДІЛ 6 МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ.....	34
6.1 Поняття про зворотні задачі математичної фізики.....	34
6.2 Регуляризація розв'язування зворотніх задач	35
6.3 Регуляризаційні множники і фільтри	37
6.4 Порівняльна характеристика методів реконструкції.....	38
РОЗДІЛ 7 ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є У ТОМОГРАФІЇ	41
7.1 Пряме та обернене перетворення Фур'є	41
7.2 Алгоритми дискретного швидкого перетворення Фур'є	42
7.3 Реконструкція на основі теореми про центральний переріз з використанням двовимірного алгоритму швидкого перетворення Фур'є	44

7.4 Реконструкція методом зворотнього проектування з використанням алгоритму швидкого перетворення Фур'є	45
РОЗДІЛ 8 ЦИФРОВА ФІЛЬТРАЦІЯ У ТОМОГРАФІЇ	46
8.1 Цифрова фільтрація як лінійна обробка біомедичних образів та сигналів	46
8.2 Алгоритми цифрової фільтрації	48
8.3 Застосування цифрової фільтрації при реконструкції томографічних зображень	50
РОЗДІЛ 9 ВИКОРИСТАННЯ ЗГОРТКИ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦІЇ ТОМОГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ	51
9.1 Нерекурсивна цифрова фільтрація в часовій та просторовій областях	51
9.2 Обчислення одно- і двовимірної дискретної згортки	52
9.3 Використання згортки для реконструкції	53
9.4 Метод зворотнього проектування на основі одновимірної згортки	55
РОЗДІЛ 10 ЕЛЕМЕНТНА БАЗА, ЗАСОБИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ТА ОСНОВНІ КОНСТРУКТОРСЬКО-ТЕХНОЛОГІЧНІ РІШЕННЯ ПРИ ПОБУДОВІ ЦИФРОВИХ ТОМОГРАФІВ.....	58
10.1 Засоби відбору даних в X-променевих обчислювальних томографах	58
10.2 Засоби реалізації алгоритмів реконструкції та обробки зображень.....	60
10.3 Засоби виводу та зберігання зображень	62
10.4 Основні конструкторські рішення та особливості технології виробництва томографів	63
РОЗДІЛ 11 ТЕХНІЧНІ ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМП'ЮТЕРНИХ ТОМОГРАФІВ	65
11.1 Основні технічні характеристики апаратури	66
11.2 Експлуатаційні характеристики апаратури.....	68
РОЗДІЛ 12 ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ КОМП'ЮТЕРНОЇ РЕКОНСТРУКТИВНОЇ ТОМОГРАФІЇ	71
12.1 Технічні характеристики та можливості сучасних томографічних систем (фірм Siemens, Elscint, Philips, Toshiba та ін.)	71
12.2 Існуючі проблеми та перспективи розвитку комп'ютерної томографії	75
ЛІТЕРАТУРА	80

ВСТУП

У медицині важливу роль відіграють візуальні обстеження пацієнта (examination, checkup of patient, *англ.*) та біооб'єктів (клітин, тканин, органів, систем органів живого організму). Методи таких обстежень не тільки *in vitro* (у штучних умовах, *лат.*), але й *in vivo* (в живому організмі, *лат.*) відомі здавна. Проте, вже з тих давніх часів думка людини працювала над проблемою зменшення впливу обстеження на організм. Наприклад, відомий хірург, академік М.І. Пірогов (1810-1881 рр.) у пошуках ефективного методу навчання хірургів розробив новий метод вивчення будови тканин та структур внутрішніх органів. Суть методу полягала у вивченні пошарово розрізаних у різних анатомічних площинах заморожених трупів („анатомічна томографія”; сам Пірогов назвав це „льодовою анатомією”). Піроговим було видано атлас під назвою „Топографічна анатомія, ілюстрована розрізами, проведеними через заморожене тіло людини у трьох напрямках”. Фактично, малюнки в атласі (їх можна побачити у Національному музеї-садибі М.І. Пірогова, м. Вінниця) стали попередниками подібних зображень, отриманих променевими томографічними методами. Цей атлас довгий час був незамінним довідником для лікарів-хірургів, уможлилював оперування з мінімальним травматизмом хворого. Зрозуміло, що сучасні способи отримання пошарових зображень мають незрівнянні переваги:

- нетравматичність, що уможливорює прижиттєву діагностику захворювання;
- можливість апаратної реконструкції однократно отриманих зображень в різних анатомічних площинах (проекціях), а також трьохвимірної реконструкції;
- можливість не тільки оцінювати розміри й взаємне розташування органів, але й детальне вивчення їх будови і навіть деяких фізіологічних характеристик тощо.

Для отримання зображення перерізу біооб'єкта використовуються результати зовнішніх спостережень взаємодії потоків енергії (частинок або хвиль різної природи) з його внутрішнім середовищем та складні технічні засоби, у тому числі радіоелектронні та обчислювальні. Розроблення, конструювання, виробництво, експлуатація та ремонт такої техніки, її модернізація, зокрема, її радіоелектронної складової, вимагають відповідних знань, розуміння, навиків. У даному посібнику на прикладі Х-променевої томографії наведено базові принципи, математичні та фізичні аспекти, задачі, методи та засоби томографії. Метою посібника є сприяння виробленню системного підходу при вивченні схем функціональних, блок-схем та схем електричних принципів і характеристик та параметрів різних томографів.

РОЗДІЛ 1

КОМП'ЮТЕРНА РЕКОНСТРУКТИВНА ТОМОГРАФІЯ ЯК ЗАСІБ ДЛЯ НЕІНВАЗИВНОГО МЕДИЧНОГО ОБСТЕЖЕННЯ

Медичне обстеження. Відбір інформації для обстеження внутрішньої будови біооб'єкта. Інформаційний та енергетичний аспекти впливу фізичного поля на біооб'єкт. Інтроскопія. Емісійна та трансемісійна інтроскопія. Одно- та багатопроєкційна інтроскопія. Томографія.

1.1 Концептуальні засади обстеження внутрішньої будови біооб'єктів

Кому обстежували якийсь внутрішній орган методом ендоскопії, рис. 1.1¹ (ενδοῦ — зсередини, та σκοπέω — спостерігаю, *грецьк.*)², той знає, якою неприємністю може стати ця процедура для пацієнта.



Рис. 1.1 Гнучкий ендоскоп. Світлопровід вводиться у внутрішні порожнини організму через природні шляхи (в шлунок — через рот, в легені — через гортань тощо), або через прокол чи хірургічний доступ

Є ще багато інших методів обстеження, які не тільки неприємні, але й можуть становити загрозу здоров'ю. Але їх продовжують використовувати, бо у низці випадків без такого обстеження неможливо вчасно визначити достовірний стан таких об'єктів обстеження як тканини, внутрішнього органу чи системи органів організму людини. Обстеження є досить складною процедурою, оскільки стан біооб'єктів навіть в „нормі” мінливий, різноманітний, ознаки його мають стохастично-нестационарний характер. А під час діагностики за даними від спостереження відповідного біооб'єкту

¹ <http://en.wikipedia.org/wiki/Endoscopy>

² переклад та транслітерація за Merriam-Webster's collegiate dictionary.— 10th ed., 1997.— 1559 p.; переклад деяких інших іноземних слів наведено також в [1].

(внутрішніх тканин, органів тощо) необхідно вчасно вибрати достовірне рішення про їх стан. Це означає, що необхідно:

- а) мати значення ознак стану обстежуваного біооб'єкту в „нормі”;
- б) визначити значення ознак біжучого стану обстежуваного біооб'єкту;
- с) порівняти за попередньо обґрунтованим критерієм ознаки визначені за даними обстеження з ознаками „нормального” стану біооб'єкту;
- д) ухвалити рішення про стан біооб'єкту, оцінити достовірність рішення.

Отже, в основі визначення стану біооб'єкту лежить представлення біооб'єкту ознаками цього стану. На підставі низки концептуальних припущень за ознаки вибирають множину спостережуваних біофізичних величин властивих стану біооб'єкту. Ці величини можуть змінюватися з часом, бути розподіленими у просторі (всередині, по поверхні чи навколо біооб'єкту). Проте, з аксіом теорії інформації та теорії складності випливає, що найбільш достовірним та простим представленням об'єкту є сам об'єкт, або його фізичне (оптичне) зображення (у тому числі його внутрішньої будови). Тому в медичній практиці спостереження біооб'єкту часто виконують не досить безпечними методами, шляхом хірургічного втручання, „-томії” — від томі (*грецьк.*), відсікання, розтин³.

За способом отримання значень ознак біжучого стану біооб'єкту під час обстеження виокремимо такі групи методів.

Група "А": пасивні методи — визначення або вимірювання фізичних величин, параметрів сигналів, джерелом яких є сам об'єкт спостереження (рис. 1.2).

Приклади:

а) вимірювання температури. Норма та інформативна ознака задані у числовій формі — (36,6 - 37) °С; значення температури вимірюється простими технічними засобами.

б) визначення ознак стану біооб'єкту безпосередньо, за допомогою органів чуття лікаря, з використанням або без використання додаткових технічних засобів (пальпація, аускультация, зовнішній огляд — наприклад, в іридодіагностиці тощо).

Група "Б": активні методи — визначення або вимірювання фізичних величин, параметрів реакції біооб'єкта на зовнішнє подразнення (рис. 1.3).

Приклади:

а) введення спеціальних речовин в організм та оцінювання реакції його тканин, органів, систем;

б) ретинографія (електропотенціальний відгук сітківки ока на подразнення її світлом).

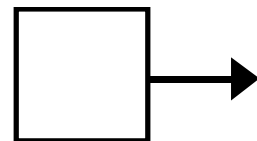


Рис.1.2 Схема пасивного обстеження

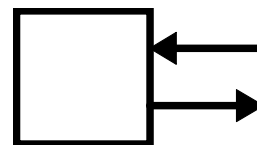


Рис.1.3 Схема активного обстеження

³ Словник іншомовних слів. Під ред. член-кор. АН УРСР О.С. Мельничука. Київ: Гол.ред. УРЕ АН УРСР, 1974.

Важливим є те, що зовнішній вплив має бути оптимальним (достатньо сильним для отримання інформативної реакції, яку можна зареєструвати, але біооб'єкт при цьому не має суттєво змінитися).

Група "В": ідентифікаційні методи — вимірювання параметрів потоку, хвиль фізичного поля після взаємодії його з біооб'єктом (наприклад, після поширення його крізь біооб'єкт, рис. 1.4). При цьому використовуються природні (фізичні, φύσις, *грецьк.*) або генеруються штучні „технічні” (τέχνη, *грецьк.* — штука, *староукр.*) поля. Крім того, поширення поля може бути транзитивним (наскрізьним) або рефлексивним (віддзеркалювальним), а взаємодія поля з речовиною біооб'єкта повинна відбуватися без суттєвих вторинних ефектів, розсіювання та поглинання його енергії.

Приклади:

- а) транзитивна ідентифікація — Х-променева індикація (рентгеноскопія, рентгенографія);
- б) рефлексивна ідентифікація — ультразвукова індикація (УЗІ).

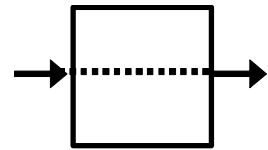


Рис. 1.4 Схема транзитивно-ідентифікаційного обстеження

Концептуальна відмінність поміж методами з груп "А" - "В" в тому, що в одних носіями інформації є біосигнали (притаманні живому організму біофізичні величини, що генеруються в процесі життєдіяльності та реакцій на подразнення, а в других — використовуються зовнішні, сторонні, фізичні або технічні поля. На відміну від методів групи "В", в яких дія на біооб'єкт повинна перевищувати порогові значення інтенсивності подразнення, методи з групи „В” допускають застосування інтенсивностей енергії без значного впливу на організм (методи з групи „А” не вимагають такого впливу взагалі). Методи медичних обстежень з інтенсивністю впливу на біооб'єкт значно меншою за інтенсивність, яка викликає його миттєву, активну реакцію або відхилення його характеристик чи параметрів від норми називають інформаційними. Інформаційні методи дослідження об'єктів вперше знайшли застосування в техніці, науці, військовій справі тощо — для неруйнівного чи прихованого контролю деталей та конструкцій машин, споруд, у гідро- та геофізиці, астрофізиці, локації тощо. Проте, виходячи із специфіки біооб'єкту (живого організму, його систем, органів) концепції побудови та вимоги до апаратури медичного обстеження мають свої особливості. Їх фіксують у відповідних стандартах.

У посібнику [1] наведено принципи підходу до проектування біотехнічної апаратури. При цьому означено систему базисних (взаємно доповнюючих) множин ознак, які відрізняють медичні апарати від іншої технічної апаратури: Н — неінвазивність, А — адаптивність, С — системність, А — антропогенність, або, у сукупності — НАСА. Очевидно, що дотримання принципу НАСА є обов'язковим при проектуванні не тільки

діагностичної апаратури, але й профілактичної, терапевтичної, реабілітаційної.

Н — неінвазивність, від *invasio* (лат.) — втручаюсь. Ця ознака містить гуманітарний та юридичний аспекти. Медична техніка повинна відбирати інформацію від біооб'єкта так, щоб не руйнувати його, не змінювати його структуру, не впливати на фізіологічні процеси та показники і, в ідеальному випадку, повинна бути такою, щоб об'єкт дослідження (пацієнт) не зауважував її застосування. Показник неінвазивності буде тим вищим (кращим), чим менший вплив на пацієнта чинить апаратура, і навпаки (рис. 1.5)⁴.

При дослідженні внутрішньої структури організму найменшу неінвазивність мають хірургічні інструменти. Такі традиційні, як електрокардіографічні, тепловізійні, та деякі інші методи обстежень можна вважати неінвазивними. Але, вже два–три обстеження X-променевим комп'ютерним томографом (у середньому, залежно від пацієнта та типу томографа) за дозою (40 mSv) еквівалентні опроміненню жертв атомного бомбування (Хіросіми, Японія), або працівників атомної індустрії (вони отримують дозу до 20 mSv)⁵.

А — адаптивність, від *adapto* (лат.) — пристосовую. Цим означається врахування специфіки живих організмів, як таких, що пристосовуються. Містить такі аспекти:

а) зовнішній — живий біооб'єкт бореться за життя, і тому потрібно вчасно припинити медтехнічне втручання при критичній реакції організму (наприклад, при алергічній реакції на втручання), навіть, якщо ще не отримано потрібної інформації;

б) внутрішній — організм здатний пристосовуватись до зовнішніх умов, протидіяти втручанню, відштовхувати чужорідні тіла, що приводить до унеможливлення застосування медтехніки;

с) суб'єктивний — коли ми проникаємо в організм, він змінює свої функції, пристосовується, часом пацієнт свідомо чи несвідомо впливає на результати вимірювання, спотворює їх, робить необ'єктивними. Це



Рис. 1.5 Номінальна шкала неінвазивності технічних засобів

⁴ Крім номінальної шкали застосовують й інші шкали, наприклад — ординальну, інтервальну, відносну тощо (для забезпечення інваріантності результатів вимірювань до вимірювальної процедури) [2].

⁵ http://en.wikipedia.org/wiki/Computed_tomography. Зіверт — одиниця отриманої дози, помножена на k — коефіцієнт, який враховує радіаційну небезпеку виду випромінювання.

необхідно враховувати, пристосовувати медтехніку до конкретного біооб'єкта;

d) психологічний — потрібно враховувати і психологічні чинники, які можуть впливати на значення вимірюваних ознак.

С — системність, від *συστήμα* (грец.) — утворення, складення. Людина є складною, сукупністю функціональних частин, які взаємодіють одна з одною. Існує у природному середовищі і взаємодіє з ним — система в системі. Тому при проектуванні біотехнічної апаратури потрібен системний підхід. Бажано вести постійний контроль зовнішніх параметрів, умов зовнішнього середовища, враховувати їх вплив на біооб'єкт, враховувати взаємозв'язок підсистем, враховувати аналіз багатьох сигналів, різної фізичної природи, від сукупно. Наприклад, зображення на тепловізорі при температурі 12 °С в неопалюваному приміщенні буде відрізнятися від отриманого при нормальній кімнатній температурі; після значного фізичного навантаження показники тиску і пульсу також будуть далекими від норми.

А — антропогенність, від грецьких слів *άνθρωπος* — людина та *γενεος* — походження, рід. Діагностує, лічить лікар. Медична техніка лише допомагає йому у цьому. Вона повинна відібрати об'єктивну інформацію і представити її у формі, зручній для сприйняття лікарем, вказати на можливі варіанти, наприклад, діагнозу, висновку, але не остаточні. Юридичну (і моральну) відповідальність несе лікар. Сучасні діагностично-експертні системи використовують великі бази даних та знань, готові приклади типових патологій, норм тощо при формуванні інформації, яка виводиться, наприклад, на екран. Вона може підлаштовуватися під стандартне зображення, яке вже знайоме лікарю. Але завжди надається технічна можливість змінити той варіант, який пропонує машина — наприклад, через натискання „кнопки” "УТОЧНИТИ" на спеціальному пульті керування діагностичної системи та відповідне програмне оброблення такого фізичного переривання її роботи.

Перераховані ознаки формують 4-х координатну систему — базис (рис. 1.6). Залежно від типу біотехнічна система є „точкою” в цьому понятійному, чотиривимірному просторі. За означенням номінальної шкали чим далі знаходиться ця точка від початку координат, тим система краща. Залежно від важливості кожного з показників для конкретного типу медичної апаратури, можна сформулювати узагальнений показник якості біотехнічних систем, як функцію від чотирьох координат у базисі НАСА: $q = f(n, ad, s, an)$, причому для більшості терапевтичних систем важливішими параметрами є адаптивність та системність, а для

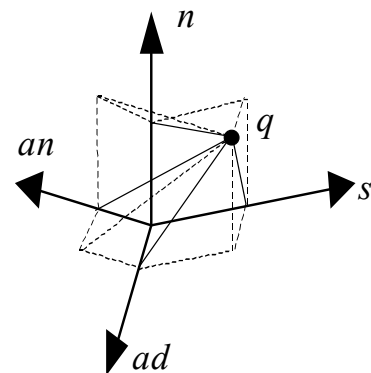


Рис. 1.6 Базис НАСА

діагностичних — неінвазивність.

1.2 Медична інтроскопія. Комп'ютерна томографія.

Методи обстеження з групи "А" (рис. 1.2) є простими. Проте, для підвищення достовірності, прогностичності, швидкості визначення стану обстежуваного об'єкту використовуються значно складніші методи груп "Б" та "В" (рис. 1.3 та рис. 1.4).

Групу методів спостереження за схемою рис. 1.4 називають медичною інтроскопією, від *intro* (лат.) — всередині та *σκοπέω* (грец.) — спостерігаю. Методами інтроскопії обстежують внутрішню структуру біооб'єктів достатньо неінвазивно. Для інтроскопії використовуються промені (хвилі, потоки частинок) різного походження (фізичні та технічні), які, поширюючись крізь біооб'єкт (трансемісійна або емісійна інтроскопія, рис. 1.7), або віддзеркалюючись від нього (рефлексійна інтроскопія), взаємодіють з ним, і, тому, містять інформацію про його внутрішню структуру. При емісійній інтроскопії (рис. 1.7, а), джерело випромінювання розміщене всередині самого біооб'єкту, а вимірювання проводиться за його межами. Наприклад, при емісійній радіоізотопній томографії радіоактивна речовина попередньо вводиться в організм шляхом інгаляції або ін'єкції. При трансемісійній інтроскопії випромінювання проходить від зовнішнього джерела через об'єкт до його детекторів (рис. 1.7, б).

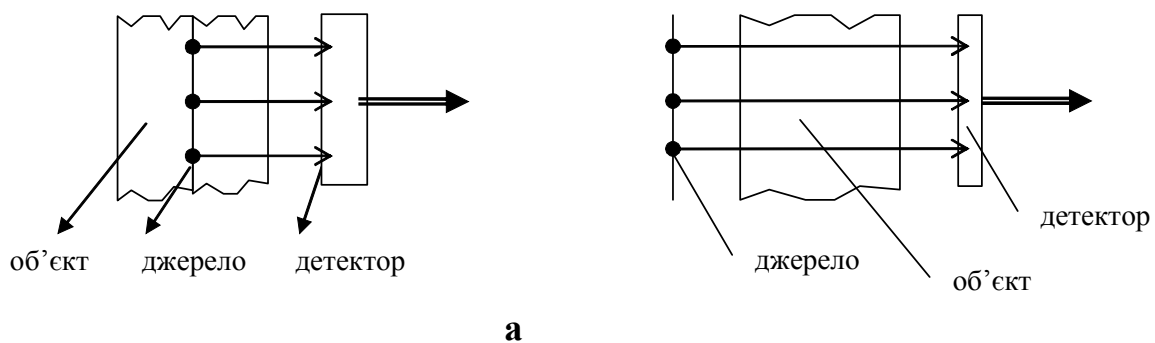


Рис. 1.7 Схеми емісійної (а) та трансемісійної (б) інтроскопії.

Під час інтроскопії створене технічно або природне поле, пронизивши біооб'єкт, змінює свою структуру (просторову орієнтацію силових ліній, інтенсивність тощо). Відповідно зареєструвавши цю зміну можна отримати проекцію внутрішнього середовища об'єкта. Хвилю (поле) від зовнішнього джерела після взаємодії з об'єктом обстеження можна означити (назвати) носієм відомостей про об'єкт (або, сигналом, *signum* — знак, лат.). Важливо зазначити, що при інтроскопії важливим є саме сигнальний (інформаційний) аспект взаємодії, а не енергетичний. Внаслідок взаємодії „фізичне поле-біооб'єкт” повинні змінюватись лише властивості носія

(поля), а не властивості біооб'єкта (інформаційна взаємодія). Це основна відмінність інтроскопії від багатьох терапевтичних застосувань опромінення, коли застосовується енергетична взаємодія, тобто коли суттєвою є не зміна фізичного поля, а зміна об'єкту.

Якщо виконати поперечні (з торця) проектування тонкого шару (зрізу) досліджуваного об'єкта, то сукупність отриманих проекцій уможливи́є реконструкцію зображення розподілу речовин (структури) по площині зрізу шляхом математичної обробки цих проекцій. Таке зображення називають томограмою, а спосіб отримання його — томографією. Слово "томографія" походить від грецького слова "τόμος" — шар, шматок, та "γραφω" — писати.

Томографія є розвитком, удосконаленням методу інтроскопії, оскільки є не одно-, а багато проекційним методом, що більш інформативно. Методи класичної інтроскопії є частинним випадком томографії (при якій виконується проектування з одного ракурсу, „поздовжнє”, відносно отриманого зображення, яке є тінню внутрішнього середовища об'єкту).

Деколи томографію називають багатопроєкційною інтроскопією. Це справедливо, коли в основу означення методу покласти менш інформативне за змістом, але ширше за обшаром складне слово („інтро-“ ширше за змістом ніж „томо-“).

В 1963 р. математик Allan M. Cormack (США) розробив метод реконструкції зображення зрізів об'єктів для випромінювань з експоненційним зниканням інтенсивності в їх внутрішньому середовищі (для X- та γ — променів) та виконав експерименти для фізичної моделі з γ — променями, рис. 1.8 [3].

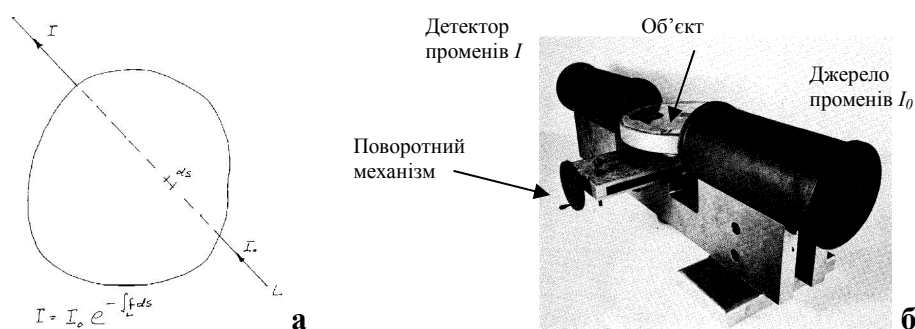


Рис. 1.8
Математична (а) та фізична (б) моделі томографічного експерименту

Реконструктивна обчислювальна томографія — це метод отримання (реконструкції) зображення розподілу речовини по площині зрізу біооб'єкта за допомогою обчислювальних операцій над поперечними його проекціями, отриманими в результаті інформаційної взаємодії фізичного поля з речовиною біооб'єкта.

В 1972 р. було виготовлено перший клінічний X-променевий томограф та отримано першу томограму головного мозку людини, рис. 1.9, [4].

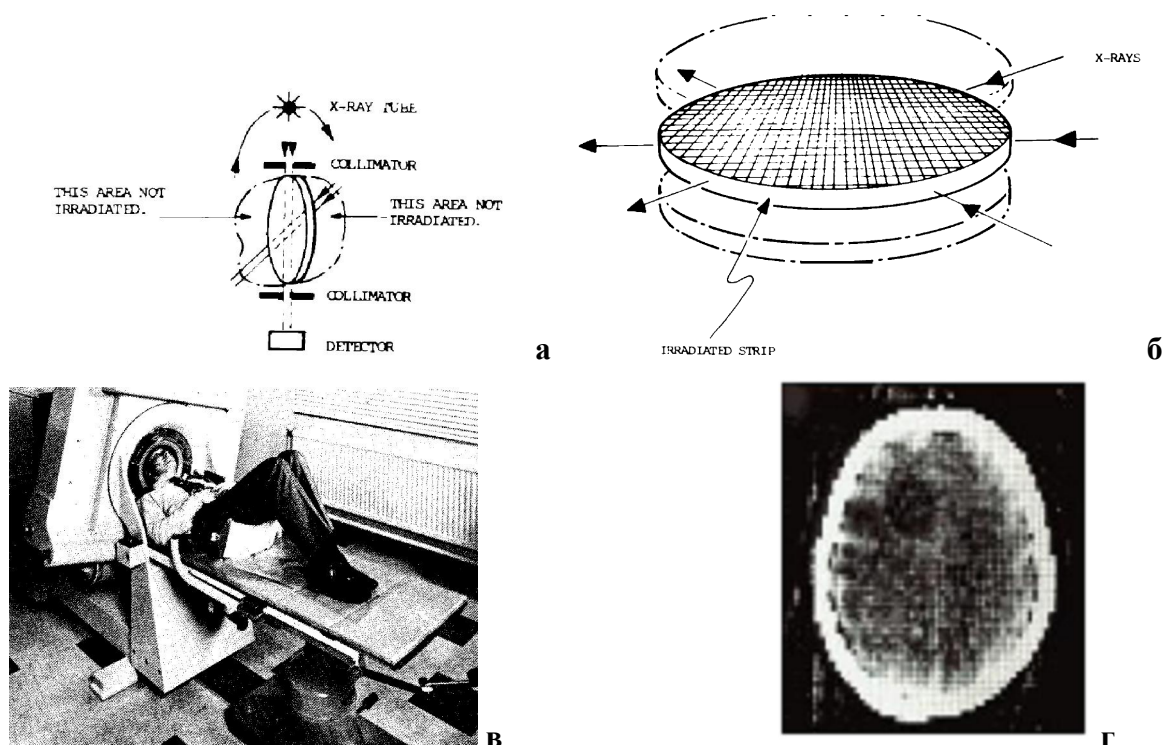


Рис.1.9.

Схеми сканування (а, б) і перший клінічний - сканер голови (в) та перша томограма головного мозку (г)

У СРСР перший томограф СРТ-1000 був розроблений в 1978 р. під керівництвом І.Б. Рубашова (1987-1998 р.р. — директор Всесоюзного науково-дослідного інституту комп'ютерної томографії) [5, 6].

До 1979 р. томографи вже вироблялись багатьма фірмами серійно (сканер ЕМІ коштував \$390 000) і застосовувались більше ніж в 2000 клініках світу.

На рис 1.10 наведено зразки томограм, отриманих на сучасному X-променевому томографі⁶.

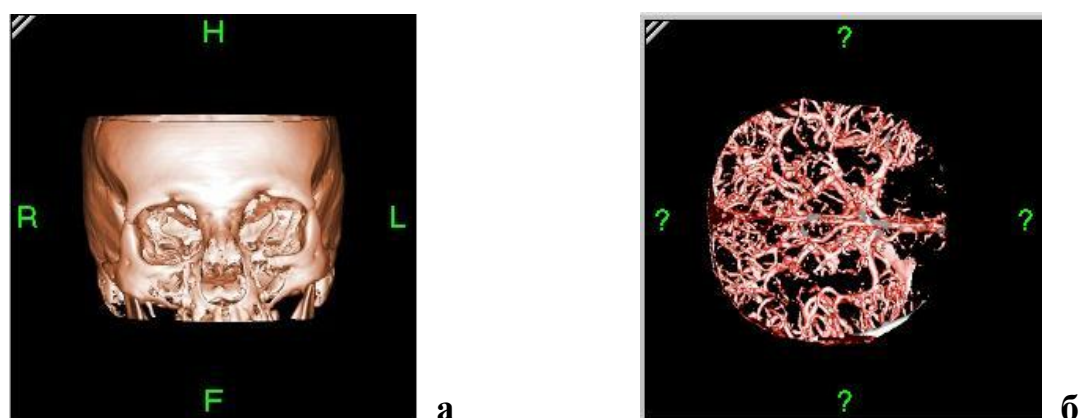


Рис. 1.10 Томограма кісткової тканини (а) та судин мозку (б) ГОЛОВИ ЛЮДИНИ

⁶ http://en.wikipedia.org/wiki/Computed_tomography

На рис. 1.11 наведено вигляд пристрою сканування Х-променевого томографа⁷.

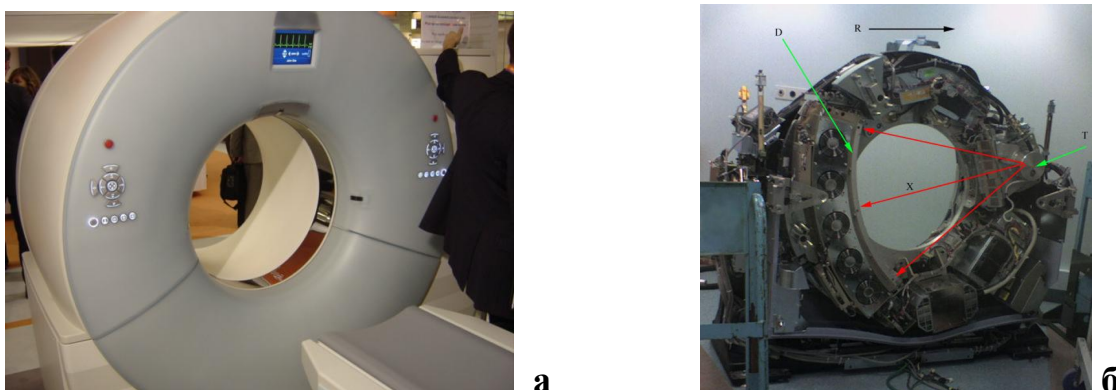


Рис.1.11 (а) —Зовнішній вигляд (а) та будова (б) гантрі

На рис. 1.11 (а) у правому нижньому куті знаходиться пристрій для поздовжнього переміщення пацієнта; на рис. 1.11 (б) позначено: Т — джерело Х- променя, Х — напрям Х- випромінювання, D — детектори, R — напрям обертання частини пристрою сканування (gantry, „гентрі”).

Питання для самоперевірки

1. Що таке медичне обстеження та які його методи?
2. Що таке стан біооб'єкту та які його ознаки?
3. Чим відрізняються медичні апарати від іншої технічної апаратури?
4. Навести загальну схему неінвазивного медичного обстеження.
5. Що таке „інтроскопія”, „томографія” та чим вони відрізняється?
6. Фізичне та математичне підґрунття томографії.

Література до розділу 1

1. Яворський Б. І. Введення в спеціальність. — Тернопіль: ТДТУ, 1999.— 32 с.
2. Орлов А.И. Репрезентативная теория измерений и ее применения. – Журнал “Заводская лаборатория”. 1999. Т.65. No.3. С. 57-62.
3. Cormack A.M. Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it / Nobel Lecture, 8 December, 1979
4. Hounsfield G.N. Computed medical imaging / Nobel Lecture, 8 December, 1979
5. Лопата В.А. К истории рентгеновской томографии// Электроника и связь.- №5, 2010.- с. 236-242.
6. Марусина М.Я., Казначеева А.О. Современные виды томографии. Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 132 с.

⁷ ibid (там само)

РОЗДІЛ 2

ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСАДИ ТОМОГРАФІЇ

Х-променева оптомеханічна томографія. Основні принципи томографії. Геометрична схема комп'ютерної реконструктивної томографії. Рівняння прямої з врахуванням обертання системи координат. Інтегральна геометрія Радона. Основна задача томографії. Роздільна здатність (просторова і амплітудна), динамічний діапазон (просторовий, тоновий), точність реконструкції. Часові та спектральні характеристики зображення.

2.1 Радонівський образ двовимірної функції у прямокутній системі координат.

Отримання зображення структури речовини внутрішніх тканин організму технічними засобами уможливило відкриттям в кінці XIX ст. Іваном Пулюєм властивостей невидимих Х-променів поширюватися крізь непрозорі середовища, поглинатися цими середовищами та впливати на фоточутливі матеріали (фотопластинки). При застосуванні Х-променів у медицині різна густина речовин, що входять до складу тканин організму, спричиняє різне поглинання цими речовинами Х-променів, різний вплив їх на фотоматеріал та формування зображення внутрішньої структури на фотопластинці. Проте недоліком такого способу отримання зображень (методи рентгеноскопії, рентгенографії, флюорографії) є те, що ці зображення відображають сумарне поглинання випромінювання всіма структурами, які знаходяться на шляху проходження променів. Зображення є „тінню” на фотопластинці від всіх кісток, м'яких тканин, рідин, газів тощо. Накладання „тіней” від структур, що знаходяться у різних шарах, ускладнює ідентифікацію нормальних і патологічних утворень. Більше того, неможливо (або важко) розрізнити структури, що знаходяться поруч. Для уможливлення розрізнення двох суміжних областей їх коефіцієнти поглинання повинні достатньо відрізнятися, а для зменшення ефекту накладання тіней необхідні спеціальні заходи. Як результат, використання Х-променів з часом виявилися не придатними для швидкого, високопрогностичного обстеження через їх недостатню роздільну здатність.

Для підвищення роздільної здатності Х-променевих зображень використовують хімічно-радіологічні методи контрастування. Проте, введення контрастувальних речовин є небезпечним для здоров'я. Інший підхід до підвищення роздільної здатності базовано на відомому в оптиці ефекті фокусування світлових променів. Цим було уможливлено отримання поширових Х-променевих зображень — томограм, а методи отримання таких томограм називають класичною томографією.

В класичній томографії для забезпечення фокусування Х-променя під час проектування на заданій площині використано взаємне переміщення Х-трубки та фотопластинки, рис. 2.1¹. При цьому зображення від інших шарів досліджуваного біооб'єкта знаходилися поза фокусом і, тому, розмивались. Фокусування на заданій площині досягалося вибором належної інтенсивності випромінювання та швидкостей переміщень. Такий оптико-механічний метод отримання зображення називається реконструктивною томографією з поздовжнім (longitude, *англ.*) скануванням (класичною томографією). Крім поздовжнього сканування використовувалося поперечне (transverse, *англ.*) сканування. При цьому об'єкт обстеження та фотопластинка оберталися навколо осі².

Оптико-механічна томографія є ефективною для об'єктів зі значними різницями у розмірах їх складових. Проте їй властиві складність конструкції, недостатня швидкодія та недостатня роздільна просторова здатність (розрізнення малих об'єктів).

На відміну від оптико-механічної томографії, комп'ютерна томографія уможливує отримання зображення окремих шарів (площин, зрізів, січень) досліджуваного біооб'єкта з належною швидкістю та якістю. Принциповим для комп'ютерної томографії є використання обчислень, а не механічних переміщень для реконструкції зображення за результатами проектування.

Крім терміну "комп'ютерна томографія" (в англomовній літературі: "Computed Tomography" — CT, "Computed Axial Tomography" — CAT, "Computed Axial Transverse scanning" — "CAT scanning") в літературі вживаються також терміни "машинна", "реконструктивна обчислювальна", "комп'ютеризована" томографія.

Теоретичні основи комп'ютерної томографії ґрунтуються на праці Й. Радона "Про визначення функцій за їх інтегралами вздовж деяких многовидів", яку він опублікував у 1917 р. [1]. В рамках цієї роботи геометрична інтерпретація сканування біооб'єкта та визначення проєкцій під час комп'ютерної томографії наведена на рис. 2.2. Допускається, що двовимірна функція $f(x, y)$ адекватно задає розподіл густини речовини по

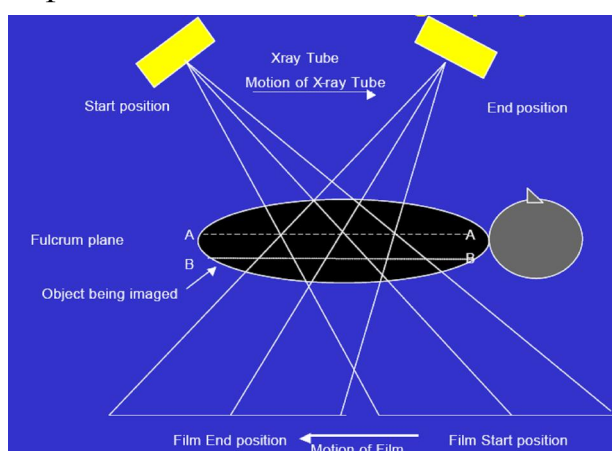


Рис. 2.1. Схема оптико-механічної поздовжньої томографії

¹ Terry Peters, CT Image Reconstruction/ www.aapm.org/meetings/02AM/pdf/8372-23331.pdf

² ibid

перерізу площиною досліджуваного біооб'єкта. Проекції (інтеграли) цієї функції по прямих лініях L називаються Радонівським образом $R_f(s, \varphi)$ біооб'єкта, а визначення його — перетворенням Радона. На практиці проектування легше виконати по паралельних до осі ординат лініях, отриманих зсувом на s через Δs по осі абсцис X , для кожного кута φ повороту на кут $\Delta \varphi$ прямокутної системи координат: $XY \xrightarrow{\Delta \varphi} X'Y'$. Таким чином, результатом дискретного перетворення Радона є матриця $N \times N$ чисел. Отримати дискретний Радонівський образ функції $f(x, y)$ означає, що потрібно виконати обчислення значень $N \times N$ означених інтегралів по лініях. Значно складнішою є задача визначення значень функції за заданим її Радонівським образом — задача реконструкції функції.

Ошибка! Ошибка связи.

Рис. 2. 2. Схема геометричної інтерпретації визначення Радонівського образу двовимірної функції

Розв'язання задачі реконструкції функції за заданими її інтегралами уможливив стрімкий розвиток області комп'ютерної томографії, який розпочався наприкінці ХХ ст., що пов'язано з прогресом твердотільних мікроелектронних технологій та обчислювальної техніки. Нові технічні засоби забезпечували можливість реалізації алгоритмів реконструкції на основі зворотнього перетворення Радона. З цього часу активізується виробництво нових комп'ютерних томографів, розширюється область їх застосувань, покращуються технічні параметри. Так, перший томограф мав такі технічні характеристики: число ракурсів сканувань — 180, число ліній проектування у ракурсі — 160, реконструювалось зображення 80 на 80 елементів, кожен розміром 3 мм; томограф, створений у 1975 р. Йорком та Маршалом забезпечував реконструкцію для матриці 160 на 160 елементів, а створений Евентом в 1976 р. — вже 256 на 256 (сучасні томографи мають такі характеристики: розмірність зображення — 1024 на 1024 елементів, просторову роздільну здатність 15 ліній на см, роздільну здатність за густиною кращу 1%, час реконструкції близько 1 с.

Залежно від конкретного виду томографії (Х-променева, ЯМР тощо), значення функції розподілу густини мають різну фізичну природу (розмірність). Проте методи реконструкції зображень за проекційними даними мають багато спільного для різних видів томографії. Алгоритми відновлення зображення плоского перерізу з експериментально отриманих його проекцій ґрунтуються на припущенні, що ці проекції є інтегралами по лініях від функції, що адекватно моделює розподіл речовини по площині перерізу. Степінь порушення цього припущення визначає інтенсивність артефактів, що проявляються на томограмі. Для Х-променевої комп'ютерної томографії функція $f(x, y)$ описує розподіл лінійного коефіцієнта ослаблення Х-випромінювання по площині. Значення цього коефіцієнта

майже пропорційно залежать від густини речовини біооб'єкта, тому вважають, що Х-променеве томографічне зображення відображає розподіл густини біооб'єкта в досліджуваній площині. При Х-променевій томографії Х- промінь поширюється в основному прямолінійно, як зображено на рис. 2.2. Таким чином, цей рисунок відображає геометричну схему отримання проєкційних даних, на якій ґрунтуються алгоритми реконструкції.

Пряма L , що задається параметрами s та φ , визначає лінії інтегрування (“проєкціювання”, “сканування”). Її нормальне рівняння в координатах (x, y) має вигляд

$$L : x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0, \quad (2.1)$$

де φ — кут між нормаллю прямої та віссю x , s — відстань між прямою та початком координат є параметрами, якими задається множина таких прямих (многовид).

Інтеграл від функції $f(x, y)$ по множині прямих L (по многовиду прямих $L(s, \varphi)$), є її радонівським образом $R(s, \varphi)$:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) dx dy, \quad (2.2)$$

де за допомогою дельта-функції $\delta(\bullet)$ задано многовид прямих $L(s, \varphi)$. Фактично границі інтегрування не є безмежними (по всій координатній осі), тому що Х- промінь поглинається тільки в межах об'єкту обстеження. Формула (2.2) перетворення Радона функції $f(x, y)$ є математичною моделлю експериментального отримання Х- променевих проєкцій.

В Х-променевій томографії радонівський образ представляє всю сукупність проєкцій досліджуваного об'єкта (функцій від s) під різними кутами φ . Відбір однієї проєкції ($R(s, \bullet)$ для фіксованого кута φ) може відбуватись або послідовно (для різних s), або паралельно (одночасно для всіх s). Після отримання проєкції для одного кута (“аспекту”), кут змінюється (наприклад, система трубка-детектор повертається) і отримується нова проєкція. Коли скануюча система здійснить поворот на 180° , то отримується повна сукупність проєкцій для всіх кутів — радонівський образ.

Інший запис формули (2.2), що охоплює загальніший випадок інтегрування по многовиду ліній (в тому числі й кривих), виглядає так

$$R(s, \varphi) = \int_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma. \quad (2.3)$$

Повернемо систему координат на кут φ так, щоб вісь y' була паралельною до прямої L . Оскільки поворот системи координат у матричній формі має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

то

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Підставивши (2.5) в (2.2) та врахувавши, що $x' = s$, отримаємо основне рівняння томографії

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, s \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy', \quad (2.6)$$

в якому інтеграл одинарний, інтегрування виконується по осі y' .

Основна задача томографії полягає у реконструкції значень функції $f(x, y)$ за її радонівським образом $R(s, \varphi)$ — інтегралами вздовж многовиду прямих $L(s, \varphi)$.

2.2 Томографічне зображення та його характеристики і параметри.

Основні властивості томографічного зображення впливають з природних властивостей величин, які воно відображає, методів сканування та цифрових методів обробки, які використовуються для його реконструкції.

Фізична величина, яка характеризує внутрішні властивості біооб'єкта в кожній його точці, визначається видом фізичного поля, яке використовується для відбору інформації про нього. Тому, основними характеристиками та параметрами томографічних зображень є ті, що стосуються речовини розподіленої в січенні біооб'єкта. Фізичною величиною може бути густина, чи пов'язаний з нею лінійний коефіцієнт ослаблення X-променів для X-променевої томографії, коефіцієнт пропускання, заломлення чи поглинання ультразвукових коливань для ультразвукової індикації, електропровідність для електроімпедансної томографії, коефіцієнт магнітної проникності чи спінове число і пов'язаний з ними молекулярний чи атомний склад речовини для ЯМР- томографії та ін.

Кожна з цих фізичних величин, а відповідно і томографічне зображення, характеризується своїм мінімальним та максимальним значенням або динамічним діапазоном, який визначається відношенням максимально можливого за амплітудою абсолютного значення фізичної величини до її практично досяжного мінімального значення. Як правило, мінімальне значення береться на рівні шумів, який визначається можливостями вимірювальної апаратури (апаратурний шум) та фізичною

природою носія інформації (квантовий шум). Для визначення величини динамічного діапазону в техніці найчастіше використовують нелінійну шкалу і відповідну його одиницю — дБ (“децибел”), яку означають через відношення $20\lg \frac{A_{\max}}{A_{\min}}$, де замість A підставляють відповідні значення

фізичної величини. Таким чином динамічний діапазон 20дБ означає, що можливі максимальні та мінімальні значення фізичної величини відрізняються в 10 разів, 40дБ — в 100 разів, 60дБ — в 1000 і т. д.

В Х-променевої томографії основною фізичною характеристикою в кожній точці зображення є лінійний коефіцієнт ослаблення Х-випромінювання μ , що залежить від величини енергії випромінювання та хімічного складу речовини, через яку воно проходить, і має розмірність $1/(\text{одиночку довжини})$ [2]. Так для води при енергії випромінювання 73 кеВ, $\mu = 0,19\text{см}^{-1}$. При відомій спектральній характеристиці джерела випромінювання використовуються відносні одиниці Гаунсфілда (HU), що характеризують лінійний коефіцієнт ослаблення Х-випромінювання. При визначенні HU приймається такий масштаб, щоб вода мала 0 HU, а повітря — 1000 HU [3]. Тоді різні кісткові тканини будуть мати (60 ... 1000) HU, м'які — (0..60) HU.

При представленні зображення з допомогою півтонових або кольорових засобів виводу (графічні дисплеї, друкуючі та фотовивідні пристрої) важливе значення має півтоновий динамічний діапазон вивідного пристрою, що визначається співвідношенням яскравості білого та чорного півтонів, кількості градацій кольору та “сірої” шкали, які він здатний передати. Існуючі вивідні пристрої в кращому випадку забезпечують розрізнення до сотні градацій, тому часто використовують нелінійне перетворення (амплітудне вікно), що дозволяє “розтягнути” потрібний амплітудний діапазон в межах градаційної шкали вивідного пристрою.

Наступними важливими характеристиками є геометричні параметри зображення — його розміри, форма та взаємне розміщення окремих його частин.

Для оцінювання точності реконструкції використовують різні критерії, такі як середньоквадратична похибка реконструкції, співвідношення сигнал / шум, просторова та амплітудна роздільна здатність.

Відносна середньоквадратична похибка визначається за формулою:

$$d = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} |f - g|^2 dx dy}}{\sqrt{\int_{\Omega} |f|^2 dx dy}}, \quad (2.7)$$

де $f \equiv f(x, y)$ — “істинне” зображення, а $g \equiv g(x, y)$ — реконструйоване зображення, Ω — область інтегрування (область на якій реконструйовано зображення). За „істинне” зображення часто беруть математичне сподівання ансамблю зображень, отриманих під час верифікаційного (випробувального) томографічного експерименту, коли об’єктом є тестовий об’єкт (апріорно відомий).

Просторова роздільна здатність визначається можливістю розділити в реконструйованому зображенні два близько розташовані елементи, вона задається як параметрами дискретизації, так і алгоритмом обробки. Для сучасних томографів просторова роздільна здатність становить 0.2 ... 2 мм.

Амплітудна роздільна здатність безпосередньо пов’язана з динамічним діапазоном зображення і визначається можливістю розрізнити на зображенні дві тканини з різною рентгенівською густиною в одиницях розмірності HU (одиниці Хаунсфілда). Для сучасних томографів амплітудна роздільна здатність становить (1 ... 10) HU.

Для реконструкції зображень динамічних біооб’єктів, таких як серце, важливе значення мають часові характеристики, тобто швидкість зміни зображення. Основною вимогою до системи відбору даних у томографі (“скануючої системи”) є така швидкість збору даних про одне січення, щоб характеристики за цей час не змінились суттєво. Як правило, дослідження динамічних біооб’єктів використовують спеціалізовані томографи, в яких відбір даних ведеться паралельно великою кількістю давачів.

До зображень, за аналогією з часовими сигналами можна застосувати перетворення Фур’є, що дозволяє знайти спектральні характеристики зображення. Спектр зображення являє собою його двовимірне перетворення Фур’є за просторовими координатами x та y :

$$f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy. \quad (2.8)$$

Змінні ω_1 , ω_2 називаються просторовими частотами. Просторова частота має фізичний зміст кількості коливань на одиницю довжини, розмірність — 1/(одиницю довжини). Максимальна частота просторового спектра задає мінімально можливу частоту просторової дискретизації зображення: за узагальненням теореми Котельникова при просторовій дискретизації з відліками на квадратній сітці, частота дискретизації повинна бути принаймні в два рази вищою ніж максимальна просторова частота зображення.

Питання для самоперевірки

1. Проаналізуйте геометричну схему отримання радонівського образу двовимірної функції у прямокутній системі координат.

2. Поясніть значення параметрів s та φ у виразі 2.1.
3. Перетворення Радона точки має вигляд прямої (див рис.2.3). Який вигляд буде мати перетворення Радона прямої? Відповідь поясніть.

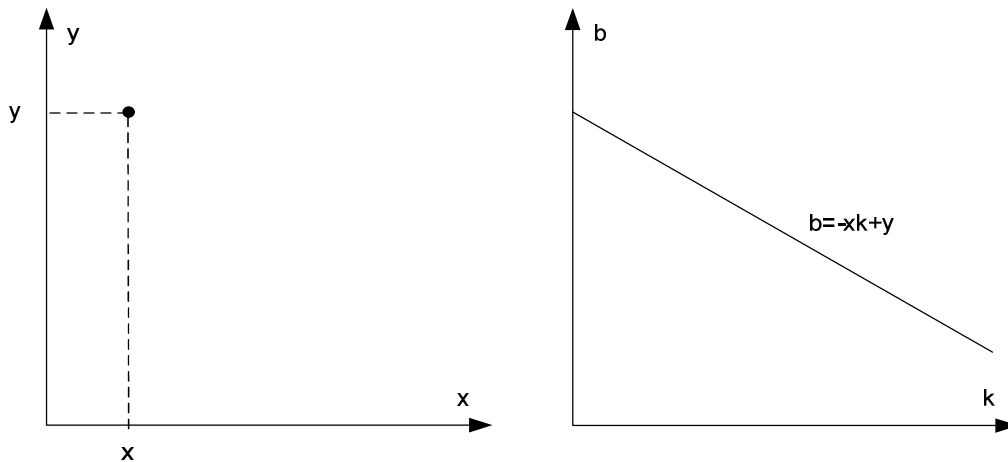


Рис. 2.3. Перетворення Радона точки

4. Проаналізуйте характеристики і параметри томографічного зображення: роздільна здатність (просторова та амплітудна), динамічний діапазон (просторовий, тоновий), точність реконструкцій.

Література до розділу 2

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften.— Math.—Phys. Kl. — Leipzig, 1917. — Vol. 69. — P. 262–277.
2. Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения.— М.: Госатомиздат, 1963.
3. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 231 с.

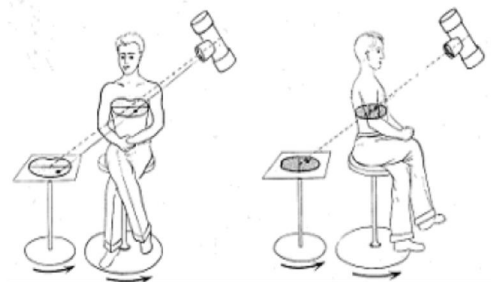
РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РЕКОНСТРУКЦІЇ ТОМОГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Основне рівняння томографії. Просторово-часовий ізоморфізм. Просторова інтерпретація частоти. Теорема про центральний переріз. Проекційна теорема. Метод реконструкції на основі теореми про центральний переріз. Використання одновимірного та двовимірного перетворення Фур'є в томографії.

3.1 Теорема про центральний переріз

Отримання зображень розподілу речовини по перерізах непрозорого об'єкту без його руйнування уможливилось після відкриття явищ радіоактивних (А.А. Беккерель, 1896 р) та Х- (В.К. Рентген, 1895 р) променів, здатних проникати крізь непрозорі тіла (з поглинанням у внутрішньому середовищі цих тіл). Причому І.П. Пулюєм Х- променеві тіньові зображення на фотопластинках було отримано та опубліковано майже за сім років до отримання пріоритету В.К. Рентгеном на відкриття Х-променів. З самого початку ХХ-го ст. дістали широке поширення апарати для рентгенографії та дещо пізніше — радіографії. Були розроблені та побудовані (30-40 рр. ХХ ст.) й апарати для пошарової та одночасно багатопарової (симультанної, *simultaneously* — одночасно, *англ.*) томографії (стратиграфії, *strata* — шар, *лат.*), рис. 3.1 [1]. В їх основу евристично (правдоподібно) покладено принципи оптичної та проективної геометрії (рис. 2.1, розділ 2).



**Рис. 3.1. Схема стратиграфа
А. Валлебона (рисунок з патенту
1947 р.)**

У 1917 р. Й. Радоном було створено теоретичні основи для розроблення методів побудови зображень перерізу тіла за їх проекціями по багатовиду ліній [2]. Лише у 1953 р. офіційно зауважено фундаментальну роль цієї праці для томографії (її виклав проф. Й. Влока у своїй лекції „Зображення поперечних січень” у відповідь на запитання доктора медицини Маєрека [3, 4]).

При розв'язуванні задач математичної фізики, до якої належить й задача томографії, часто використовують відображення функцій дійсного аргументу (наприклад, які є моделями змін фізичних величин у часові) до функцій комплексного аргументу, який інтерпретується через частоту. За відповідних умов, що накладаються на функції, таке відображення є взаємнооднозначним (або — ізоморфізмом, рис.3.2). При цьому й самі

задачі дістають представлення в іншій області — частотній, застосування якого спрощується розв'язання задачі.

Найвідомішим відображенням в частотну область є перетворення Фур'є функцій від часу у функції від комплексної частоти. При застосуванні перетворення Фур'є до радонівського образу

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) dx dy, \quad (3.1)$$

функції $f(x, y)$, аргументи x, y якої є просторовими координатами, зміст поняття частоти (розмірність якої 1/сек) міняється. Аргументом функції-образу стає "просторова частота" (її розмірність 1/м). Перетворення Фур'є уможливорює розв'язок задачі визначення функції $f(x, y)$ при відомому радонівському образі $R(s, \varphi)$ обчислювальним, а не аналоговим методом. При цьому необхідно забезпечити виконання потрібних властивостей функцій — $R(s, \varphi)$ та $f(x, y)$ для існування їх Фур'є – образів $R_{\Phi}(\omega, \varphi)$ та $f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2)$.

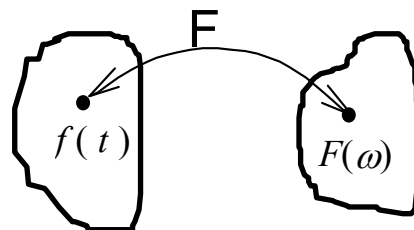


Рис. 3.2

Якщо $R_{\Phi}(\omega, \varphi)$ — одновимірне перетворення Фур'є функції $R(s, \varphi)$ за змінною s , а $f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2)$ — двовимірне перетворення Фур'є функції $f(x, y)$ за змінними x та y , тоді, за означенням Фур'є перетворення

$$R_{\Phi}(\omega, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi) e^{-i2\pi\omega s} ds, \quad (3.2)$$

$$f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy, \quad (3.3)$$

де

$$\omega_1 = \omega \cos \varphi, \quad \omega_2 = \omega \sin \varphi \quad (3.4)$$

справедливим є твердження (теорема про центральний переріз) [5]:

Якщо для функції $f(x, y)$ існує її радонівський образ $R(s, \varphi)$, а також їх Фур'є – образи $f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2)$ та $R_{\Phi}(\omega, \varphi)$, то спектр функції за змінною ω описує переріз двовимірного спектру при фіксованому φ , тобто

$$R_{\Phi}(\omega, \varphi) = f_{\Phi}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi). \quad (3.5)$$

На рис. 3.3 наведено геометричну інтерпретацію кута φ з радонівського образу в кут φ перерізу двовимірного спектру $f_\varphi(\omega_1, \omega_2)$ функції-розподілу речовини. Формула (3.5) однозначно пов'язує спектри радонівського образу та томографічного зображення і уможливорює визначення другого за першим. Отже, для розв'язання основної задачі томографії потрібно знайти спектри радонівських образів за змінною s для всіх значень φ і вони будуть відображати всі перерізи Фур'є-образу $f_\varphi(\omega_1, \omega_2)$ шуканої функції $f(x, y)$.

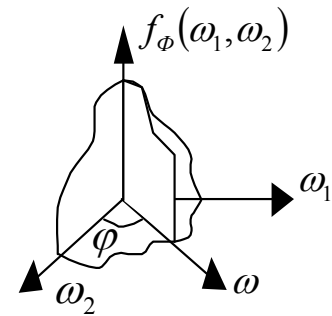


Рис. 3.3

Тобто існує можливість здійснити низку перетворень: $R(s, \varphi) \rightarrow R_\varphi(\omega, \varphi) \rightarrow f_\varphi(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) \rightarrow f(x, y)$. Фактично рівнянням (3.5) в області просторових частот замінюється рівняння (3.1) в області лінійних розмірів. Для ідеального випадку, коли відомі значення радонівського образу для всіх кутів φ теорема про центральний переріз дає можливість знайти спектр томографічного зображення для всіх значень частот (ω_1, ω_2) , тобто однозначно відновити $f(x, y)$. На рис. 3.4 наведено операторну схему теореми

теореми [6] (в квадратних дужках наведено обчислювальну складність оператора¹, де n — кількість відліків функції для оператора її перетворення; функцію розподілу густини $f(x, y)$ позначено через $G(x, y)$,

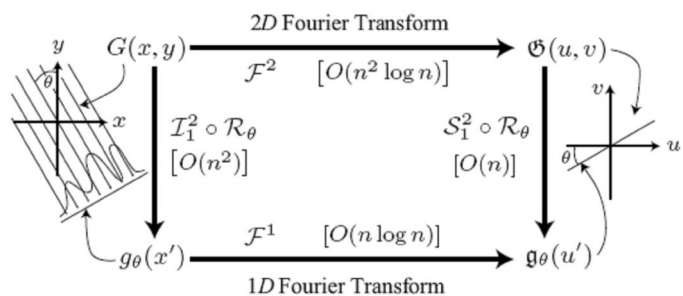


Рис. 3.4. Операторна схема теореми про центральний переріз

інші позначення відповідають контексту теореми. На практиці виникають проблеми, пов'язані з тим, що радонівський образ відомий лише для скінченної кількості дискретних кутів, а проекційні дані отримані з певною похибкою для дискретних значень параметра s . Тому методи відновлення повинні враховувати відмінності між теоретичною та практичною частинами відбору та представлення даних томографії.

Теорема про центральний переріз є частинним випадком загальнішої, проективної теореми, у якій Фур'є перетворення замінено проективним перетворенням:

¹ Про обчислювальну (часову та апаратну) складність — "A Short History of Computational Complexity", *Bulletin of the EATCS* 80: 95–133, <http://people.cs.uchicago.edu/~fortnow/papers/history.pdf>

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(s) R(s, \varphi) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) W(x \cos \varphi + y \sin \varphi) dx dy, \quad (3.6)$$

де ядро $W(s)$ проєктивного перетворення може набирати різного вигляду:

a) $W(s) = e^{-i2\pi\omega s}$ — як в теоремі про центральний переріз;

b) $W(s) = 1$, тоді для кола радіусом a маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi) ds = \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx;$$

c) $W(s) = s^m$ — результатом такого перетворення будуть моментні функції m -го порядку;

$$d) W(s) = \sum_{n=0}^m \kappa_n s^n.$$

Таким чином, при побудові алгоритмів реконструкції для конкретних томографів можуть використовуватись інші ядра (не тільки ядро Фур'є перетворення). Ядро вибирається (наприклад, простим підбором) залежно від типу многовиду ліній L . Останній визначається фізикою процесу поширення потоків частинок, хвиль тощо у томографі та методом сканування. Крім цього потрібно враховувати деякі додаткові вимоги. Зокрема, для множини паралельних ліній (наприклад, колімовані X -промені, *collimage*, *лат.*) та однорідних, ізотропних середовищ оптимальним (за критерієм мала обчислювальна складність² при заданих параметрах і точності томографічного зображення) є ядро (a).

3.2 Метод реконструкції томографічного зображення

На основі теореми про центральний переріз за формулами (3.2–3.5) можна побудувати метод відновлення зображення з проєкцій використавши пряме і зворотнє перетворення Фур'є. Тобто, з радонівського образу отримати томографічне зображення використавши ізоморфне перетворення в частотну область. Метод реконструкції складається з таких процедур:

- 1) N одновимірних перетворень проєкцій при значеннях θ_n кута φ , $n = 1, \dots, N$, за дискретним аналогом формули (3.2);
- 2) інтерполяції значень відліків на прямокутній сітці координат за значенням на полярній сітці в просторі частот (рис. 3.5), тобто перехід $(\omega, \varphi) \rightarrow (\omega_1, \omega_2)$ (дискретний варіант формули (3.5)). При інтерполяції враховується значення функції в одній або більшій кількості сусідніх

²Дивись зноску [1].

точок, при цьому, чим більша кількість точок береться до уваги, тим складніший алгоритм обчислень. Так при врахуванні значень в чотирьох найближчих точках, інтерпольоване значення знаходиться за формулою:

$$f_i = \frac{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4}{4}, \quad (3.7)$$

де f_1, f_2, f_3, f_4 — значення функції у чотирьох найближчих точках, а коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ задаються відстанню до відповідної точки; При інтерполяції точність знаходження значень в декартовій системі координат тим менша, чим далі ця точка знаходиться від початку координат.

- 3) двовимірне обернене перетворення Фур'є функції $f_\Phi(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$.

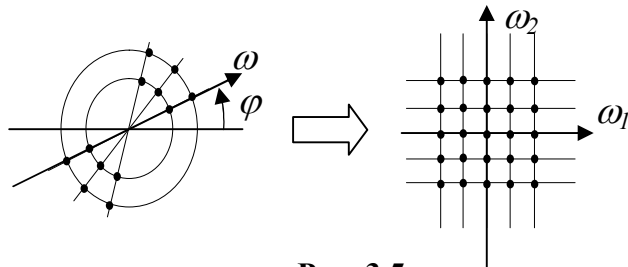


Рис. 3.5

До переваг цього алгоритму, в порівнянні з іншими алгоритмами реконструкції, відносяться використання

стандартного математичного апарату прямого і оберненого перетворення Фур'є, простота для розуміння та висока швидкість обчислень при застосуванні алгоритму швидкого перетворення Фур'є (ШПФ)³.

Основний недолік методу — складність переходу від полярної системи координат до декартової, тому в реальних томографах цей алгоритм мало застосовується.

3.3 Застосування прямого і зворотнього перетворення Фур'є для розв'язання задачі томографії

З теореми про центральний переріз випливає ще один метод реконструкції, який, на відміну від попереднього, не потребує проведення двовимірного перетворення Фур'є, простіший в реалізації і для деяких томографічних зображень дає кращу якість реконструкції [7].

Функцію $f(x, y)$ можна виразити через її двовимірний спектр $f_\Phi(\omega_1, \omega_2)$ за допомогою зворотнього двовимірного перетворення Фур'є:

³ ШПФ — скорочене позначення алгоритму швидкого перетворення Фур'є, характерною особливістю якого є менша ($N \log N$) в порівнянні з традиційними (N^2) кількість множень для масиву довжиною N елементів. Російською позначається ДПФ, англійською — FFT.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2) e^{i2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (3.8)$$

Інший варіант перетворення Фур'є можна отримати, перейшовши в частотній площині до полярної системи координат $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (\omega, \varphi)$. Зробивши заміну, виразивши просторові частоти через:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \cos \varphi, \\ \omega_2 &= \omega \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

отримаємо:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \omega f_{\Phi}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega \right] d\varphi. \quad (3.10)$$

Підставивши $f_{\Phi}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$ з формули (3.5) і врахувавши симетрію $R_{\Phi}(\omega, \varphi) = R_{\Phi}(-\omega, \varphi + \pi)$, отримаємо:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\Phi}(\omega, \varphi) e^{i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} |\omega| d\omega d\varphi. \quad (3.11)$$

Введемо заміну

$$s' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad (3.12)$$

і позначимо внутрішній інтеграл помножений на π через

$$I(s', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi |\omega| R_{\Phi}(\omega, \varphi) e^{i2\pi\omega s'} d\omega, \quad (3.13)$$

тоді (3.11) набирає вигляду:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I(s', \varphi) d\varphi. \quad (3.14)$$

За формулами (3.12-3.14) можна записати такий метод відновлення зображення:

- 1) для радонівського образу $R(s, \varphi)$ при фіксованому куті шукаємо спектр $R_\Phi(\omega, \varphi)$ за допомогою одновимірного прямого Фур'є перетворення;
- 2) множимо $R_\Phi(\omega, \varphi)$ на $\pi|\omega|$;
- 3) від результату знаходимо зворотнє перетворення Фур'є (3.13);
- 4) обчислюємо s' (3.12);
- 5) інтегруємо функцію I за кутом φ (3.14);
- 6) міняємо кут φ і повторюємо пп. (1-5).

За операціями пунктів (1-3) виконується фільтрація методом прямого-оберненого перетворення Фур'є. Даний метод реконструкції є варіантом реалізації методу зворотнього проектування. Якщо замінити фільтрацію в частотній області (див. пп. (1-3) на фільтрацію в просторовій області, то можна отримати ще один варіант реконструкції, що використовує операцію згортки функцій (аналог операції добутку функцій в ізоморфному просторі функцій-образів).

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає роль ізоморфізму в комп'ютерній томографії?
2. Значення теореми про центральний переріз для реконструкції зображення за його проекціями.
3. Методи реконструкції на основі теореми про центральний переріз.
4. Реконструкція з використанням одновимірного перетворення Фур'є.

Література до розділу 3

1. Лопата В.А. К истории рентгеновской томографии// Электроника и связь.- №5, 2010.- с. 236-242.
2. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten// Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften.— Math.—Phys. Kl. — Leipzig, 1917. — Vol. 69. — P. 262–277.
3. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — с. 16, с. 255.
4. Natterer F., Ritman E.L. Past and future directions in X-ray computed tomography (CT)// Wiley Periodicals, 2002.— vol. 12.— P. 175-187.
5. Bracewell R. N. Strip integration in radio astronomy// Aust. J. Phys. 9, 198–217 (1956).

6. Ng R. Fourier slice photography// ACM SIGGRAPH, 2005:
<http://graphics.stanford.edu/papers/fourierphoto/fourierphoto-600dpi-submitted.pdf>.

7. Р. М. Луитт Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований// ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 125–147.

РОЗДІЛ 4

РЕКОНСТРУКЦІЯ ТОМОГРАФІЧНОГО ЗОБРАЖЕННЯ
ЗВОРОТНІМ ПРОЕКТУВАННЯМ

Реконструкція томографічного зображення з його проекції. Зворотнє проектування. Сумарна проекція. Залежність між сумарною проекцією зображення і зображенням. Методи реконструкції з використанням одно- і двовимірної згортки. Застосування розкладення у скінченні ряди.

4.1 Зворотнє проектування

Оскільки первинною процедурою томографії є експериментальне визначення радонівського образу зображення перерізу об'єкту (проектування цього перерізу) то логічно поставити задачу побудови самого зображення перерізу за його проекцією, тобто — виконання зворотнього проектування. Для побудови методу зворотнього проектування проаналізуємо спочатку двовимірну функцію $\Phi(x, y)$, значення якої при переміщенні вздовж будь-якої прямої, паралельної до осі y' , не змінюються, рис.4.1 [1].

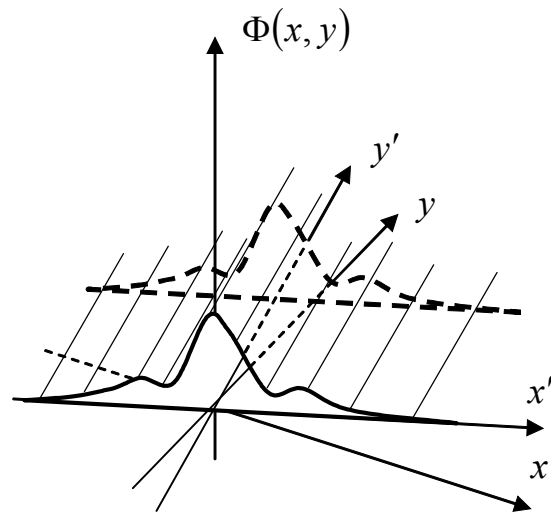


Рис. 4.1

Значення функції $\Phi(x, y)$ змінюються лише при переході вздовж осі x' від однієї з цих паралельних прямих до іншої. Тоді ці значення є деякою функцією $F(s)$ однієї змінної s (на осі x'). Якщо вісь x' складає з віссю x кут φ , то з рівності $x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ маємо:

$$\Phi(x, y) \equiv \Phi_{\varphi}(x, y) = F(x \cos \varphi + y \sin \varphi). \quad (4.1)$$

Співвідношення (4.1) є виразом правила, за яким функції однієї змінної $F(s)$ ставиться у відповідність функція двох змінних $\Phi_{\varphi}(x, y)$ для кожного кута φ , під яким ця одновимірна функція $F(s)$ „розтягується” по площині (x, y) .

Побудуємо вираз, у якому враховано те, що для кожного кута φ за правилом (4.1) “розтягується” деяка одновимірна функція. Позначмо отриману функцію $F(s, \varphi)$. Якщо підсумувати з усередненням в кожній точці (x, y) значення цих “розтягнутих” функцій, то при нескінченно малому зменшенні інтервалів між точками отримаємо нову функцію

$$\Phi_0(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi, \quad (4.2)$$

яка на відміну від функції $\Phi_\varphi(x, y)$ є сукупністю функцій $F(s, \varphi)$.

Оскільки радонівський образ $R(s, \varphi)$, отриманий під даним кутом φ , є функцією однієї змінної s , тому кожному радонівському образу, отриманому при даному куті φ , можна за правилом (4.1) поставити у відповідність деяку двовимірну функцію координат (x, y) , а саме

$$R_\varphi(x, y) = R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi). \quad (4.3)$$

Ця функція в перерізі площиною $y' = 0$ описується функцією $R(x', \varphi)$. Функцію $R_\varphi(x, y)$ називають зворотною проекцією. Така проекція містить дані лише для одного кута φ .

За аналогією з (4.2) означається сумарна зворотня проекція

$$S(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi, \quad (4.4)$$

(сумарне зображення). Сумарна проекція є функцією двох геометричних координат x та y і містить проекційні дані для всіх кутів φ , тому повинен існувати зв'язок між сумарною проекцією і відновлюваним зображенням $f(x, y)$. Для побудови залежності між $S(x, y)$ та $f(x, y)$ знайдемо значення $R(s, \varphi)$, шляхом оберненого перетворення Фур'є від залежності, заданої теоремою про центральний переріз (див. (3.5)):

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\varphi(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{i2\pi \omega s} d\omega. \quad (4.5)$$

Підставивши (4.5) в (4.4), отримаємо

$$S(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty f_\Phi(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) \exp(i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) d\omega d\varphi, \quad (4.6)$$

і, для меж інтегрування $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \omega < \infty$, отримаємо:

$$S(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f_\Phi(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) \exp(i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) d\omega d\varphi. \quad (4.7)$$

Подано сумарну проекцію через двовимірне обернене перетворення Фур'є її спектру в декартовій і полярній системі координат:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty S_\Phi(\omega_1, \omega_2) \exp(i2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |\omega| S_\Phi(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) \exp(i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) d\omega d\varphi \end{aligned} \quad (4.8)$$

Порівнявши (4.7) і (4.8), бачимо, що для $\omega \neq 0$,

$$f_\Phi(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = \pi |\omega| S_\Phi(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi), \quad (4.9)$$

або в координатах ω_1, ω_2 ,

$$f_\Phi(\omega_1, \omega_2) = \pi \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} S_\Phi(\omega_1, \omega_2). \quad (4.10)$$

Це означає, що за Фур'є образом сумарної проекції отримано Фур'є образ томографічного зображення. Вираз

$$\chi_\Phi = \pi \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (4.11)$$

є модулем характеристики передачі фільтра, а

$$\chi(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \chi_\Phi(\omega_1, \omega_2) \exp(i2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)) d\omega_1 d\omega_2 \quad (4.12)$$

є імпульсною характеристикою (обернене Фур'є-перетворення від частотної характеристики). Тоді зображення визначається за згорткою сумарної проекції з імпульсною характеристикою фільтра:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x_1, y_1) \chi(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1. \quad (4.13)$$

Формула (4.13) використовується для реконструкції методом ρ -фільтрації¹.

4.2 Метод реконструкції на основі зворотнього проектування

Тотожними перетвореннями результатів, які витікають з теореми про центральне січення, отримується вираз зворотного проектування, але одновимірною згорткою. Визначимо зображення $f(x, y)$ в просторовій області за його двовимірним спектром $f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2)$ шляхом його оберненого перетворення Фур'є:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2) e^{i2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (4.14)$$

В полярній системі координат, коли $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (\omega, \varphi)$, (4.14) набирає вигляду:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \omega f_{\Phi}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega \right] d\varphi. \quad (4.15)$$

Підставивши $f_{\Phi}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$ з формули (3.5) і врахувавши симетрію $R_{\Phi}(\omega, \varphi) = R_{\Phi}(-\omega, \varphi + \pi)$, з (4.15) отримаємо:

¹ Фільтри з характеристикою $|\omega|$ називають ρ — фільтрами (rho-filter, *англ.*). Ця назва походить від назви координати ρ у полярній системі координат (ρ, φ) . Частотним образом цієї координати є координата ω з системи координат (ω, φ) .

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty R_\Phi(\omega, \varphi) e^{i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} |\omega| d\omega d\varphi. \quad (4.16)$$

Підставмо вираз (3.2) у (4.16) і отримаємо формулу реконструкції $f(x, y)$ за проекціями $R(s, \varphi)$:

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty R(s, \varphi) e^{-i2\pi\omega s} ds \right) e^{i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} |\omega| d\omega d\varphi. \quad (4.17)$$

Звідси, зміною порядку інтегрування по s і ω , отримаємо, що

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty R(s, \varphi) h(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds d\varphi, \quad (4.18)$$

де

$$h(s) = \int_{-\infty}^\infty |\omega| e^{i2\pi\omega s} d\omega \quad (4.19)$$

є імпульсною характеристикою фільтра з модулем функції передачі (частотною характеристикою) $|\omega|$.

Формула (4.17) уможливорює реконструювання зображення за допомогою зворотнього проектування вже профільтованих проекцій, чим усувається потреба у двовимірній згортці (4.13), що зменшує кількість обчислювальних та часових ресурсів.

Згортка і зворотнє проектування виконується обчисленням за формулою (4.18) з такою послідовністю операцій:

1) виконується одновимірна згортка по s проекцій $R(s, \varphi)$ з функцією $h(s)$ для кожного з кутів φ за формулою

$$\tilde{R}(s', \varphi) = \int_{-\infty}^\infty R(s, \varphi) h(s' - s) ds; \quad (4.20)$$

2) виконується зворотнє проектування за формулою

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \tilde{R}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi. \quad (4.21)$$

Наведені методи реконструкції побудовані на основі методів, які впливають з інтегральних перетворень [2] Фур'є та Радона. Причому, задача реконструкції ставилася та розв'язувалася в неперервному випадку. На практиці отримані формули замінюються їх дискретними аналогами. Проте, отримані методи є математично коректними для ідеального випадку (коли взаємодія зондуючого випромінювання з речовиною біооб'єкта відбувається за лінійним законом, радонівський образ неперервно залежить від кута та параметра s , дані отримуються без похибки тощо) [3, 4]. В практичних задачах кожний з методів має свої недоліки та переваги з точки зору зручності реалізації, швидкодії, точності, стійкості, відсутності артефактів, можливості врахування додаткової апріорної інформації і т. д. Тому при проектуванні конкретних томографів специфіка біооб'єктів, конструкцій скануючої системи, параметрів випромінювання та, навіть, наявної елементної бази для реалізації обчислювальних пристроїв впливає на вибір того чи іншого алгоритму з низки відомих, або спричиняє необхідність удосконалення їх чи синтезу нових. Наприклад, існують методи реконструкції (з розкладом в скінченні ряди, ітераційні), в яких задача зразу формулюється у дискретній формі, і розв'язання її фактично зводиться до розв'язання систем рівнянь [5].

4.3 Застосування розкладу у скінченні ряди

Ошибка! Ошибка связи.

Рис. 4.2

В методах, які ґрунтуються на розкладі в скінченні ряди, вважається, що зображення складається з окремих квадратних елементів зображення (ЕЗ). В області зображення вводиться декартова сітка таким чином, щоб ЕЗ покрили весь переріз, у якому реконструюється зображення (рис.4.2).

ЕЗ нумеруються певним способом, наприклад від 1 (ЕЗ у верхньому лівому кутку) до n (ЕЗ у нижньому правому кутку). Вважається, що функція $f(x, y)$ поглинання Х-випромінювання визначається розподілом густини досліджуваного біооб'єкта і набирає постійного значення f_j всередині j -го ЕЗ, $j = 1, 2, \dots, n$. Довжина шляху i -го променя, вздовж якого поширюється Х-випромінювання, по j -му ЕЗ — a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Вимірювана величина сумарного поглинання i -го променя, що позначається через R_i , у граничному наближенні рівна інтегралу невідомої функції f_j поглинання вздовж цього променя. При використанні дискретної

моделі цей лінійний інтеграл апроксимується скінченним рядом. Таким чином отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^n f_j a_{ij} = R_i \quad (4.22)$$

і задача реконструкції зображення зводиться до розв'язування цієї системи рівнянь. На практиці дана система повинна мати дуже велику розмірність (n та m порядку 10^5) та надзвичайну розрідженість (біооб'єкт не є однорідним), тому буває несумісною і її розв'язок знаходиться за допомогою ітераційних алгоритмів. Розглянемо один з них — алгебраїчний алгоритм реконструкції (AAP1).

- 1) Початкове наближення $f^{(0)} \in \mathfrak{R}^n$ вибирають довільно (за апіорно відомими даними);
- 2) k -та ітерація

$$f^{(k+1)} = f^{(k)} + \frac{R_i - (a^i, x^{(k)})}{\|a^i\|^2} a^i, \quad (4.23)$$

де стовпець $a^i = (a_{ij})_{j=1}^n$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток, а $\|\cdot\|$ — евклідова норма, промені перебираються циклічно, тобто

$$i = i_k = k(\bmod m) + 1. \quad (4.24)$$

Ще один алгоритм, що за способом побудови відноситься до методів інтегральних перетворень, а за ітеративним характером і способом представлення зображення — до алгоритмів розкладу в ряд, був запропонований Герменом і Лентом [5].

Функція $f(x, y)$ задається на області W . При $i \geq 0$ на $(i+1)$ -му кроці процедури алгебраїчної реконструкції за оцінкою $f^{(i)}$ на попередньому етапі будується "зображення" $f^{(i+1)}$ за таким правилом

$$f^{(i+1)}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin \Omega, \\ f^{(i)}(x, y) + \frac{R(s', \varphi_n) - R^{(i)}(s', \varphi_n)}{L(s', \varphi_n)}, & \end{cases} \quad (4.25)$$

де $n = (i \bmod N) + 1$, $s' = x \cos \varphi_n + y \sin \varphi_n$, $R^{(i)}(s, \varphi_n)$ — проекція функції $f^{(i)}(x, y)$, а початкове наближення $f^{(0)}$ вибирають довільно, $L(s, \varphi_n)$ — довжина відрізка прямої, що знаходиться в області W .

Питання для самоперевірки

1. Проаналізуйте використання зворотнього проектування при реконструкції.
2. Яку функцію називають зворотною проекцією?
3. Яку функцію називають сумарною проекцією?
4. Проаналізуйте алгоритм реконструкції з використанням одно- та двовимірної згортки.
5. Проаналізуйте алгоритм реконструкції на основі зворотнього проектування.
6. Як отримати реконструйоване зображення за допомогою згортки?
7. Поясніть суть зворотнього проектування в поняттях функціонального аналізу.
8. Знайдіть залежність між сумарною проекцією і зображенням, що реконструюється.
9. Що є основною ознакою методів інтегральних перетворень?
10. Проаналізуйте алгоритм реконструкції з розкладом в скінченні ряди.

Література до розділу 4

1. Троицкий И. Н. Статическая теория томографии. — М.: Радио и связь, 1989.— 240 с.
2. Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований / Р. М. Луитт // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 125–147.
3. Физические проблемы реконструктивной томографии / А. Маковски // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 104–111.
4. Математические проблемы реконструктивной томографии / А.К. Луисс, Ф. Наттерер // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 111–125.
5. Методы реконструкции изображений, основанные на разложении в конечные ряды / Я. Ценсор // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71. — С. 148–160.

РОЗДІЛ 5

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТОМОГРАФІЇ

Математичний, фізичний та технічний аспекти комп'ютерної томографії. Фізичні підстави до побудови рівняння томографії. Функція розподілу енергії опромінення біооб'єкту, фізичне поле в його середовищі, оператор взаємодії променя та середовища, оператор спостереження променя та функція розподілу енергії поза об'єктом. Рівняння Больцмана та принципи його спрощення. Основне рівняння X-променевої томографії.

Реконструкція плоских зображень за їх поперечними проекціями (тобто, задача томографії) має три аспекти:

а) математичний — встановлення теоретичної можливості отримання значень функції-ядра проективного оператора за відомими значеннями проекцій деякої відомої функції (тобто, встановлення існування розв'язку основної задачі томографії) та побудова методу реконструкції (отримання проекційних даних через застосування інтегральної геометрії Радона та реконструкції зображення внутрішніх структур об'єкта);

б) фізичний — обґрунтування припущень, які уможливають побудову конструктивної математичної моделі, тобто такого математичного об'єкту, що розв'язок основної задачі томографії, сформульованої на його основі, існує;

с) технічний — побудова засобів генерування потрібних полів, засобів відбору проективних даних та реалізації алгоритмів реконструкції.

Без врахування водночас всіх трьох аспектів при проектуванні комп'ютерних томографів виконати якісну реконструкцію зображень неможливо.

Інтегральна геометрія Радона, яка є математичною основою методу реконструкції, уможливорює визначення розподілу речовини по площині за заданим набором поперечних проекцій при нескінченній кількості ракурсів цих проекцій. З математичної точки зору множина проекцій є сукупністю лінійних інтегралів, наприклад, по прямих лініях, які проходять через досліджуваний біооб'єкт під різними кутами:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) dx dy. \text{ Цю математичну абстракцію}$$

необхідно узгодити з фізичними реаліями: взаємодія енергії сигналу з речовиною носить нелінійний характер; промені не колімовані (замість променя — „смуга” певної ширини або конус), енергія поширюється не по прямій, а по кривій лінії; характеристики поля нестаціонарні в часі та неоднорідні у просторі та ін.

Для встановлення можливості врахування наведених фізичних проблем розглянемо детальніше загальну схему фізичних процесів, що відбуваються при отриманні проекційних даних.

5.1 Загальна фізична схема томографії

Позначимо через φ — функцію розподілу густин речовини всередині об'єкту (для деяких видів томографії це потік поля яке використовується для дослідження об'єкта), а ψ — функцію розподілу енергії джерела поля. Вважатимемо, що ці функції належать до нормованих просторів: $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$ [1], рис. 5.1.

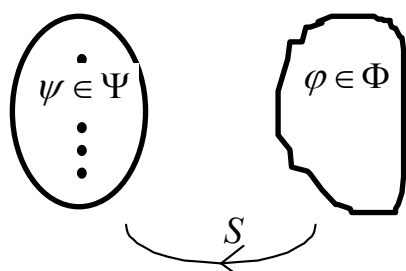


Рис. 5.1

На основі фізичних принципів, законів (закон збереження, принцип Ферма тощо) та побудованих за ними рівнянь (рівняння „переносу” енергії) можна означити оператор S взаємодії енергії джерела з речовиною об'єкта: $S\varphi = \psi$, який пов'язує значення функції розподілу поля φ в кожній точці простору з функцією розподілу енергії джерела ψ , тобто здійснює перехід (відображення) $S: \Phi \rightarrow \Psi$ (рис. 5.1).

Вираз оператора S залежить від типу фізичного поля (магнітне, електричне, електромагнітне, пружні коливання — ультразвук), від схеми експерименту, від властивостей самого біооб'єкту та характеру взаємодії фізичного поля з ним. Тому позначимо через S_f такий оператор, що враховує розподіл в просторі певної характеристики об'єкту дослідження $f \in F$.

Оскільки в технічних системах джерела сигналу, як правило, є штучно (технічно) створені і тому їх характеристики ψ можна вважати відомими, то для знаходження значення функції розподілу поля у будь-якій точці простору необхідно знайти обернений по відношенню до S_f оператор S_f^{-1} . Тоді

$$\varphi = S_f^{-1}\psi. \quad (5.1)$$

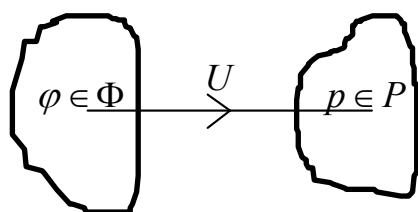


Рис. 5.2

Визначення φ в кожній точці простору при реєстрації сигналу (рис. 5.2) означимо оператором вимірювання U (або — оператором спостереження). Отримаємо вираз

$$p = U\varphi, \quad (5.2)$$

де $p \in P$ — функція вимірюного розподілу енергії поза об'єктом, підставивши у який вираз (5.1), отримаємо:

$$p = US_f^{-1}\psi. \quad (5.3)$$

Вираз (5.3) є основним, фізичним рівнянням томографії.

Залежність розподілу енергії поза об'єктом $p \in P$ від функції розподілу f речовини усередині об'єкту) означимо оператором T . Тоді

$$Tf = US_f^{-1}\psi, \quad (5.4)$$

а рівняння (5.3) набере вигляду:

$$p = Tf. \quad (5.5)$$

Розв'язавши (5.5) відносно f , якщо існує обернений оператор T^{-1} , отримаємо функцію розподілу речовини усередині об'єкта. Отже, щоби розв'язати основну задачу томографії (5.5), потрібно вибрати такий носій сигналу (фізичне поле) φ , створити таку вимірювальну схему ψ , S_f та U , щоб оператор T^{-1} можна було б реалізувати технічними засобами.

5.2 Рівняння Больцмана та його спрощення

Конкретний вираз оператора T задається в основному типом випромінювання, що використовується в томографії. В ідеальному випадку цей оператор повинен бути інтегральним оператором Радона: $R(\bullet) \equiv \int_L (\bullet) dl$,

тобто, щоб виміряні значення p були рівними значенням інтегралів від функції розподілу речовини всередині об'єкту дослідження по багатовиду (прямих). Найближче від такої ідеальної моделі лежить Х-променева томографія, бо Х- фотони (або, як їх ще називають, рентгенівські гамма-кванти), якщо знехтувати їх розсіюванням на ядрах молекул досліджуваної речовини, вторинними ефектами поширюються прямолінійно. Крім того, ступінь поглинання фотонів при проходженні через речовину є інтегральною характеристикою від лінійного коефіцієнта поглинання Х-променів. Побудувавши відповідну вимірювальну систему, можна добитись досить точної відповідності операторів T та R . Це стало однією з причин побудови історично першим Х- променевого томографа, хоч дослідження проводилися спочатку над радіоактивними випромінюваннями.

Взаємодія Х–випромінювання з речовиною найповніше описується рівнянням переносу (Больцмана) [1]:

$$S_f I \equiv \Omega \nabla I + f(r, E) I - \int_{E_1}^{E_2} dE' \int \Sigma_c(\Omega', E', \Omega, E) I(r, \Omega', E') d\Omega' = I_0(r, \Omega, E), \quad (5.6)$$

де ∇ — векторний диференціальний оператор, r — просторові координати, Ω — кутові координати, E — енергія частинок (фотонів); $I(r, \Omega, E)$ — функція розподілу фотонів по простору r , напрямках Ω та енергіях E всередині об'єкту; $I_0(r, \Omega, E)$ — функція розподілу фотонів від джерела Х-випромінювання; $f(r, E)$ — характеристика середовища; Σ_c — макросічення релеївського та комптонівського розсіювання. Потік фотонів розкладається в ряд Наймана

$$I = I_p + \sum_{n=1}^{\infty} I_n, \quad (5.7)$$

де I_p — потік первинних (нерозсіяних) фотонів, I_n — потік n -кратно розсіяних фотонів.

Для рівняння переносу оператор S_f та функції φ і ψ набувають вигляду:

$$S_f(\bullet) \equiv \Omega \nabla(\bullet) + f(r, E)(\bullet) - \int_{E_1}^{E_2} \left[\int \Sigma_c(\Omega', E', \Omega, E)(\bullet)_{r, \Omega', E'} d\Omega' \right] dE',$$

$$\varphi \equiv I(r, \Omega, E), \quad \psi \equiv I_0(r, \Omega, E).$$

Рівняння Больцмана є рівнянням у частинних похідних першого порядку, стаціонарне. Крайові і граничні умови визначаються схемою сканування, конструкцією джерел випромінювання, властивостями самого біооб'єкта та його розміщенням відносно скануючої системи.

Енергія Х-випромінювання в медичній томографії не перевищує 120 кеВ, основну частину (>99%) становлять однократно розсіяні фотони [2, 3]. Тому рівняння (5.6) спрощується:

$$S_f I \equiv \Omega \nabla I_p + f(r, E) I_p = I_0(r, \Omega, E). \quad (5.8)$$

Для томографів з паралельною схемою сканування, з пристроями (коліматорами) для зменшення ширини пучка фотонів та ослаблення ефектів розсіювання та звуження спектру Х-випромінювання і достатньо високими рівнями енергії вираз взаємодії випромінювання з речовиною описується рівнянням:

$$S_f I \equiv \Omega \nabla I_p + f(r, E) I_p = c_0 \delta(r - r_0) \delta(\Omega - \Omega_0) \delta(E - E_0), \quad (5.9)$$

де $c_0 > 0$ — потужність джерела випромінювання, r_0 — його координати, Ω — напрям колімації, E_0 — енергія Х-фотонів джерела, $\delta(0) = 1$.

Для двовимірного випадку, розв'язуючи (5.9) відносно $I_p(r, \Omega, E)$ і замінивши $r = (x, y) \rightarrow (s, \varphi)$, де $\rho = (s, \varphi)$ — нормальні координати на площині, отримаємо:

$$S_f^{-1} c_0 \equiv c_0 \exp \left\{ - \int_{\Gamma(s, \varphi)} f(x, y) d\rho \right\} = I_p(s, \varphi, E_0), \quad (5.10)$$

де $\Gamma(s, \varphi)$ — лінії поширення випромінювання. Як видно з виразу (5.10), кількість зареєстрованих на виході з біооб'єкта фотонів експоненційно залежить від інтегрального коефіцієнта ослаблення Х-випромінювання вздовж лінії проходження цього випромінювання через біооб'єкт.

Приведемо вираз (5.10) до вигляду основного рівняння томографії. Поділимо праву і ліву його частину на c_0 і прологарифмуємо його. Введемо оператор U , що „переводить” $I_p(r, \Omega, E)$ в радонівський образ $R(s, \varphi)$:

$$U I_p \equiv - \ln \frac{I_p(s, \varphi, E_0)}{c_0} \Big|_{\Gamma(s, \varphi)} = R(s, \varphi), \quad (5.11)$$

Отже, отримано лінійну залежність між інтегральним коефіцієнтом ослаблення Х-випромінювання вздовж лінії його поширення та радонівською проекцією:

$$U S_f^{-1} c_0 \equiv \int_{\Gamma(s, \varphi)} f(x, y) d\sigma = R(s, \varphi). \quad (5.12)$$

Многовид кривих $\Gamma(s, \varphi)$ задається схемою сканування. Якщо знехтувати n -кратно розсіяними фотонами, то многовид $\Gamma(s, \varphi)$ стає наборами паралельних (для випадку схеми сканування з одним детектором), або віялоподібних (для схеми сканування з лінійкою детекторів) ліній. Формула (5.12) є математичним записом перетворення Радона. Задача знаходження оберненого перетворення розв'язана [4, 5].

Формула (5.10) набирає вигляду [6]:

$$I_p(s, \varphi, E) = \int I_0(E) \exp \left\{ - \int_{\Gamma(s, \varphi)} f(x, y, E) d\sigma \right\} dE, \quad (5.13)$$

коли I залежить від E (спектр пучка фотонів не моноенергетичний).

Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні аспекти комп'ютерної томографії.
2. Математична основа побудови методів реконструкції зображення розподілу речовини по перерізу об'єкта.
3. Навести загальну фізичну схему томографії.
4. Побудуйте основне рівняння Х-променевої томографії.
5. Наведіть основні припущення для спрощення рівняння Больцмана.
6. Наведіть вираз перетворення Радона для Х-променевої томографії.

Література до розділу 5

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии. — М.: Наука, 1987. — 158 с.
2. Справочник по рентгенологии и радиологии / Составитель Л.М. Фрейдман. — М.: Медицина, 1972.
3. Михайлов А.Н. Справочник по рентгенодиагностике. — Минск: Беларусь, 1980.
4. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften.— Math.–Phys. Kl. — Leipzig, 1917. — Vol. 69. — P. 262–277.
5. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 288 с.
6. Физические проблемы реконструктивной томографии / А. Маковски // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 104–111.

РОЗДІЛ 6

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТОМОГРАФІЇ

Зворотні задачі. Задача реконструкції як зворотня задача. Поняття про некоректність задачі. Регуляризація основного рівняння томографії. Регуляризуючі множники та їх вибір. Параметр регуляризації. Оптимальний вибір параметра регуляризації. Ітераційна регуляризація. Залежність часу реконструкції та якості реконструйованого зображення від вибору алгоритму реконструкції.

6.1 Поняття про зворотні задачі математичної фізики

Представимо біооб'єкт у фізичному полі схемою „вхід-вихід” (рис. 6.1), де f — фізичне поле до об'єкту, „вхід” (його математична модель — функція, або вектор), p — поле після об'єкту, „вихід” (математична модель — функція, або вектор), T — об'єкт (математична модель — оператор, матриця).

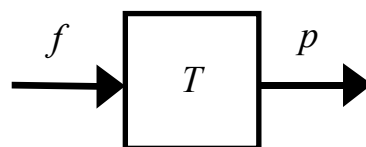


Рис. 6.1 Схема впливу біооб'єкту на фізичне поле

Такій схемі адекватною є математична модель — операторне рівняння $Tf = p$. Залежно від того, що у цьому виразі є невідомим, а що — відомим, виникають задачі:

- відомі характеристика f поля на „вході” біооб'єкту та його функціональна характеристика T , потрібно знайти характеристики p поля на „виході” біооб'єкта;
- ідентифікації, відомі „вхід” f , „вихід” p , потрібно знайти характеристику T ;
- відомо „вихід” p та характеристику T , потрібно знайти „вхід” f — обернена задача, її розв'язок знаходиться за формулою:

$$f = T^{-1}p. \quad (6.1)$$

Основна задача томографії за схемою рис. 6.1 набирає вигляду

$$Tf \equiv \int_{\Gamma(s,\varphi)} f(x,y) d\sigma = R(s,\varphi), \quad (6.2)$$

де $\Gamma(s,\varphi)$ — границя перерізу, σ — елемент перерізу. Інтегральний оператор T характеризує схему сканування, джерела випромінювання та взаємодію

випромінювання з речовиною біооб'єкта: $Tf = US_f^{-1}\psi$. Для конкретного томографа він є відомим. Основна задача томографії полягає в тому, щоб за відомим радонівським образом $R(s, \varphi)$ знайти характеристики біооб'єкта $f(x, y)$, тобто за поданою вище класифікацією, ця задача відноситься до класу обернених задач.

Для розв'язування задач даного класу потрібно знайти обернений оператор T^{-1} і тоді, за відомим радонівським образом $R(s, \varphi)$, можна отримати характеристики біооб'єкта $f(x, y)$:

$$f(x, y) = T^{-1}\{R(s, \varphi)\}. \quad (6.3)$$

З математичної точки зору, основна задача комп'ютерної томографії — реконструкція деякої функції в тривимірному просторі $\mathcal{R}^3$ за відомими значеннями її інтегралів вздовж певних прямих ліній або площин. В проблемі реконструкції функції виділяються три аспекти. По-перше, потрібно забезпечити достатню степінь представлення досліджуваного перерізу об'єкту отриманими проекційними даними. По-друге, бажано забезпечити малу чутливість процесу реконструкції до похибок проекційних даних. І, нарешті, необхідно побудувати метод реконструкції [17].

Основна задача томографії, як і більшість обернених задач, належить до класу некоректних задач, тому при її розв'язанні існує ряд математичних проблем [11]. Розглянемо гільбертові простори F та P , і T — лінійний обмежений оператор, що діє з F в P (рис. 6.2). Задача полягає в тому, щоб, знаючи $p \in P$,

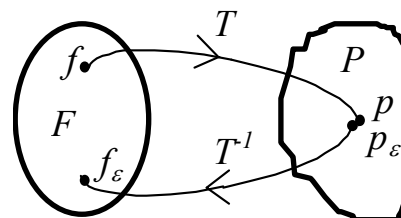


Рис. 6.2

знайти $f \in F$, для якого $Tf = p$. Така задача називається коректно поставленою за Адмаром (коротше — коректною), якщо для всякого $p \in P$ вона має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від p . В протилежному випадку задача називається некоректно поставленою, або некоректною [14, стор. 97].

Для некоректно поставленої задачі обернений оператор T^{-1} або не існує, або означений не на всьому просторі P , або не є неперервним. Складність розв'язку некоректних задач обумовлена тим, що розв'язок рівняння $Tf = p$, якщо він існує, не обов'язково є розв'язком рівняння $Tf = p_\epsilon$, де p_ϵ близьке до p . Рівняння, які описують некоректні задачі або взагалі не мають розв'язків, або мають неоднозначні чи нестійкі розв'язки. За умови наявності у проекційних даних похибок випадкового характеру, які можуть бути спричинені нестабільністю параметрів досліджуваного

біооб'єкта, квантовою природою Х-випромінювання, за допомогою якого формується зображення, похибками апаратури, розв'язок задачі реконструкції буде нестійким.

6.2 Регуляризація розв'язування зворотніх задач

Для отримання стійкого розв'язку необхідно застосувати регуляризацію процесу розв'язування. Метод регуляризації полягає в заміні оператора T^{-1} наближеним оператором T^* , який дав би можливість знаходити наближені розв'язки основного рівняння томографії, стійкі до малих змін проекційних даних [11, 15].

В томографії результати визначення радонівського образу перерізу завжди містять у собі похибку, спричинену як фізичними, так і чисто технічними причинами. Серед фізичних причин виникнення похибки слід відмітити квантову природу Х-випромінювання, ефекти розсіювання, поглинання фотонів в речовині біооб'єкта, теплові шуми апаратури. Технічні джерела похибки — дискретний характер проекційних даних, обмеження на потужність джерела випромінювання, низька ефективність детекторів Х-променів, неможливість забезпечити нескінченно вузький (колімований) пучок при скануванні та інші. Незважаючи на причину виникнення похибки, практично ми маємо виміряний радонівський образ у вигляді:

$$R_B(s, \varphi) = R(s, \varphi) + \eta(s, \varphi) \quad (6.4)$$

Якщо тепер за таким радонівським образом реконструювати зображення, то результат реконструкції буде містити не тільки корисне зображення, але і перетворення від шумової складової $\eta(s, \varphi)$, яке в певних випадках може сильно спотворити результат реконструкції. Для того, щоб стабілізувати розв'язок та зменшити вплив випадкових похибок на результат реконструкції, виконується регуляризація. При цьому для досягнення максимальної якості зображення велике значення має вибір способу регуляризації та виду регуляризаційних функцій.

Посеред алгоритмів реконструкції найбільшу стійкість до похибок у початкових даних має алгоритм згортки та зворотнього проектування. Він вносить найменше спотворень у реконструкцію та простіший у реалізації. При реконструкції з використанням зворотнього проектування проводиться просторова фільтрація фільтром з частотною характеристикою, зображеною на рис. 6.3. Фізично такий фільтр реалізувати неможливо, крім того, він не передає постійної складової, а в області високих частот підсилює шумову складову.

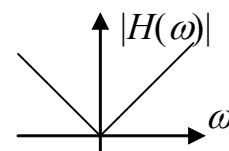


Рис. 6.3

В існуючих системах регуляризацію проводять, як правило, шляхом помноження частотної характеристики фільтра на певний регуляризаційний множник $W_\alpha(\omega)$. При цьому отримується згладжена характеристика фільтра (рис. 6.4), яку можна фізично реалізувати і яка дає кращі результати при “практичних” проекційних даних.

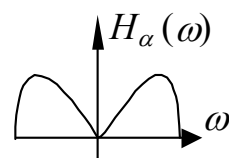


Рис. 6.4

Обчислення за алгоритмом проводяться в два етапи: згортки та зворотнього проектування, що записуються формулами

$$\tilde{R}(s', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi) h(s' - s) ds, \quad (6.5)$$

$$f(x, y) = \int_0^\pi \tilde{R}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi, \quad (6.6)$$

де $h(s) = \int_{-\frac{1}{2}\Delta s}^{\frac{1}{2}\Delta s} |\omega| W_\alpha(\omega) \exp(i2\pi\omega s) d\omega$ — імпульсна характеристика фільтра

згортки, що знаходиться як зворотнє перетворення Фур'є від його частотної характеристики; $W_\alpha(\omega)$ — регуляризаційний множник (у частотній області), який можна інтерпретувати як функцію частотного вікна; ω — просторова частота. Розглянемо реалізацію регуляризаційних множників.

6.3 Регуляризаційні множники і фільтри

Наведемо приклади можливих регуляризаційних множників, що використовуються при реконструкції томографічних зображень:

$$W_\alpha(\omega) = \exp(-\alpha|\omega|), \quad (6.7)$$

$$W_\alpha(\omega) = \exp(-\alpha^2\omega^2), \quad (6.8)$$

$$W_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 1/\alpha, \\ 0, & |\omega| > 1/\alpha, \end{cases} \quad (6.9)$$

$$W_{\alpha}(\omega) = \begin{cases} 1 - \alpha|\omega|/C, & |\omega| \leq C, \\ 0, & |\omega| > C, \end{cases} \quad (6.10)$$

де α — параметр регуляризації ($\alpha \geq 0$), якщо $\alpha = 0$, тоді регуляризація не проводиться, чим більше значення α — тим "сильніша" регуляризація.

Вибір конкретного виду регуляризаційного множника залежить від характеристик зображення та шуму і потребує детального дослідження. Регуляризаційний множник є функцією просторової частоти та параметра регуляризації α . При $\alpha=0$ регуляризація не проводиться, із збільшенням α зменшується вплив шумів, але втрачається частина інформації. Вибір конкретного значення α пов'язаний з очікуваною інтенсивністю спотворень зображення на основі апріорної інформації про досліджуваний біооб'єкт та характеристики похибок.

Вибір оптимального значення параметра регуляризації α можна здійснювати принаймні трьома шляхами:

- шляхом обчислення на основі апріорних відомостей про зображення, що реконструюється;
- з допомогою ітераційної процедури оптимізації;
- при допомозі ручного підбору параметра регуляризації.

Перший спосіб вибору параметра регуляризації може розглядатись як оптимальна фільтрація згідно певного критерію: співвідношення сигнал / шум, мінімальної середньоквадратичної похибки тощо. Проте цей спосіб не має широкого практичного застосування, бо часто ми не маємо наперед відомих об'єктивних даних про характеристики зображення досліджуваного біооб'єкта та шумів, що накладаються на проекційні дані.

У другому методі вибір оптимального значення параметра регуляризації здійснюються виконанням ітераційної процедури. Розв'язується задача оптимізації, параметром оптимізації виступає α . Питання вибору критерію оптимізації залишається відкритим. Традиційні критерії якості (відношення сигнал/ шум, середньоквадратичне відхилення) для томографічних зображень не завжди підходять. Для їх використання зображення повинно бути стаціонарним і мати закони розподілу імовірності значень випадкових величин близькі до нормального розподілу. Крім перерахованих вище недоліків, ітераційний метод потребує значних обчислювальних ресурсів та часових затрат.

Можливий ще варіант ітераційної регуляризації, що ґрунтується на використанні ітераційного методу розв'язування основного рівняння томографії:

$$f^{(i+1)} = B_i f^{(i)} + C_i g, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (6.11)$$

де B_i, C_i — неперервні лінійні оператори [15, стор. 102].

Третій спосіб дещо подібний до другого, проте оцінку якості зображення проводить інженер-оператор. "Оптимальне" зображення одержується після виконання кількох циклів реконструкції з різними значеннями параметра α . Оператор, аналізуючи отримані зображення і підбираючи значення α , може вибрати "найкраще" значення параметра регуляризації. Проте, такий метод є ефективним на етапі експериментальних досліджень.

6.4 Порівняльна характеристика алгоритмів реконструкції

Алгоритм прямого – оберненого перетворення Фур'є забезпечує найвищу швидкість реконструкції серед усіх алгоритмів, що розглядаються у цьому розділі. Приблизна кількість операцій (складність алгоритму) для реконструкції цим алгоритмом оцінюється як $O(q^2 \lg q)$, де q — кількість відліків у проекціях ($O(\bullet)$ — позначає клас алгоритмів з наростанням складності, що визначається виразом у дужках). Проте його точність дещо нижча, особливо при високому рівні шумів у вхідних даних, ніж у методі зворотнього проектування згорткою. Це пов'язано, перш за все, з похибками інтерполяції при переході з полярної сітки на прямокутну. Існуючі модифіковані алгоритми дозволяють покращити якісні характеристики, але при цьому ускладнюється процедура інтерполяції. Для реалізації алгоритму потрібні складні спеціалізовані обчислювальні засоби. Через перераховані недоліки, алгоритм прямого – оберненого перетворення Фур'є доцільно застосовувати лише тоді, коли на першому місці стоїть вимога високої швидкодії, як наприклад в універсальних томографах всього тіла з високою розмірністю даних, при проведенні динамічної реконструкції органів.

Число операцій для алгоритму оберненого проектування згорткою оцінюється як $O(q^3)$ при оптимальному співвідношенні числа проекцій та числа відліків. Отже, цей алгоритм дещо програє алгоритму Фур'є в ефективності. Проте точність реконструкції в алгоритмі згортки найвища серед методів інтегральних перетворень і поступається лише ітераційним алгоритмам, які проте мають дуже низьку ефективність. Алгоритм успішно застосовується в більшості існуючих на сьогодні томографів. Причиною такого широкого розповсюдження є те, що алгоритм допускає безпосередню реалізацію програмними та апаратними засобами і дає контрастне, неспотворене зображення при адекватності лінійної моделі взаємодії X – випромінювання з речовиною.

Недоліком алгоритму ρ -фільтрації зворотньої проекції є труднощі при його дискретній реалізації. Вони виникають з двох причин:

по-перше, при обчисленні двовимірної згортки потрібно знати зворотню проекцію на всій площині, а не тільки в області відновлення; крім того для запобігання ефектам накладання розміри спектральних складових масиву дискретних перетворень повинні бути вдвічі більші розмірів зображення, що реконструюється;

по-друге, значення спектральної характеристики в нулі для зворотної проекції невизначене, через що для відновлення постійної складової зображення потрібно виконувати додаткові обчислення.

Для апаратурної реалізації алгоритму потрібні спеціалізовані процесори двовимірної згортки великої розмірності для забезпечення достатньої швидкості обчислень.

На основі методу інтегральних перетворень, як правило, можна швидше реконструювати зображення, ніж за допомогою методів розкладу в ряди, які являють собою ітераційні алгоритми, що характеризуються низькою швидкістю збіжності. Так стандартна реалізація алгебраїчного методу реконструкції вимагає проведення $O(q^3)$ обчислювальних операцій на кожен ітерацію (стільки, скільки потрібно на повну реконструкцію методом зворотнього проектування згорткою). Проте із розвитком мікроелектроніки та обчислювальної техніки, ця різниця в ефективності стає все менш значуща. Однак є цілий ряд більш важливих переваг методів розкладу в скінченні ряди:

а) більші можливості до адаптації до зміни фізичних принципів і схем реєстрації даних, що дозволяє пристосувати алгоритм для реконструкції при високому рівні шумів у вхідних даних та поліхроматичності випромінювання;

б) реконструкція зображень висококонтрастних структур, що характерні для реконструкції таких складних топографо-анатомічних утворень як колінний та інші суглоби.

Алгоритм Германа-Лента, що записаний формулою (4.25), має низку суттєвих переваг. Якість реконструйованих з його допомогою зображень порівнянне з якістю роботи алгоритму згортки і зворотнього проектування. Суттєвими перевагами перед іншими алгоритмами є "можливість використання в процесі реконструкції додаткової інформації (про контури, границі і т.д.) і гнучкість при перебудовуванні в таких задачах, де є неповні дані або де неможливо отримати формули реконструкції у замкнутому вигляді". Ще однією перевагою є простота реалізації та можливість використання якої завгодно складної моделі фізичної взаємодії X-випромінювання з речовиною, що враховується при розв'язуванні прямої задачі знаходження проекції $R^{(i)}(s, \theta_n)$. Основним недоліком є значні затрати часових та обчислювальних ресурсів при реалізації алгоритму на універсальному комп'ютері, що властиво й іншим ітераційним методам розкладу в ряд.

Питання для самоперевірки

1. Означити поняття „обернені задачі математичної фізики”.
2. Поясніть використання регуляризації для розв’язання „некоректних” задач.
3. Обґрунтування вибору параметрів фільтрів та регуляризаційних множників.
4. Назвіть шляхи вибору оптимального значення параметра регуляризації.
5. Наведіть порівняльну характеристику алгоритмів реконструкції.
6. Порівняйте методи інтегральних перетворень та метод розкладу в ряди?
7. Проаналізуйте використання прямого і зворотнього перетворення Фур’є у томографії.
8. Назвіть причини виникнення труднощів при використанні алгоритму ρ – фільтрації зворотної проекції.
9. Назвіть переваги використання методів розкладу в скінченні ряди.
10. Назвіть переваги використання алгоритму Гермена-Лента при реконструкції зображень.

Література до розділу 6

1. Математические проблемы реконструктивной томографии / А.К. Луисс, Ф. Наттерер // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 111–125.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии. — М.: Наука, 1987. — 158 с.
3. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften.— Math.–Phys. Kl. — Leipzig, 1917. — Vol. 69. — P. 262–277.
4. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 288 с.

РОЗДІЛ 7

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є У ТОМОГРАФІЇ

Відображення фізичного простору в простір просторових частот. Одновимірне та двовимірне перетворення Фур'є. Властивості перетворення Фур'є. Дискретне перетворення Фур'є, швидкі алгоритми перетворення Фур'є. Реконструкція томографічних зображень з використанням перетворення Фур'є на основі теореми про центральний переріз. Реконструкція зворотнім проектуванням з використанням дискретного перетворення Фур'є.

7.1 Пряме та обернене перетворення Фур'є

При розв'язуванні задач обробки сигналів використовуються їх ізоморфні (взаємнооднозначні) відображення. При цьому, зміни значень сигналу у часовій моделі яких є функція дійсної змінної (або послідовність дійсних чисел), представляються за допомогою перетворення Фур'є функцією комплексної змінної (послідовністю комплексних чисел) [1]. Модуль такої функції є частотним спектром вихідної функції — амплітудами гармонічних функцій. Якщо вихідна функція періодична, то маємо ряд, членами якого є тригонометричні функції кратних частот („гармоніки”), — ряд Фур'є. Для розривних та неперіодичних функцій розклад в ряд Фур'є розвинуто через інтегральні перетворення Фур'є, Лапласа та інші.

В методах реконструкції на основі теореми про центральний переріз та на основі зворотнього проектування використовується пряме та обернене перетворення Фур'є (одно- або двовимірне). Перетворення Фур'є використовують також для побудови цифрових фільтрів в частотній області, оскільки тоді потрібна менша кількість операцій в порівнянні з фільтрами, побудованими в часовій області.

Для функцій $f(t)$ зі скінченною нормою $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ (або для сигналів зі скінченною енергією), заданих на осі $t \in (-\infty, \infty)$ (або на нескінченному інтервалі часу)¹ існує пряме $f_{\Phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ та обернене

¹ Інтерпретація дійсної змінної фізичною величиною „час” є умовною і використовується за традицією, для розуміння, замість часу може бути інша фізична величина, яка виступає аргументом сигналу, наприклад, просторова координата. Тоді говорять про сигнал, розповсюджуваний у просторі (поздовжня хвиля у стержні, для двовимірного випадку — поперечна хвиля або зображення), а замість частоти використовують поняття просторової частоти (просторових частот).

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Phi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ перетворення Фур'є. Аналогічно, для двовимірного випадку, означаються пряме та обернене перетворення Фур'є:

$$F\{f(x, y)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy = f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2), \quad (7.1)$$

$$F^{-1}\{f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2)\} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Phi}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 = f(x, y). \quad (7.2)$$

Практично корисні та інтерпретовані є властивості перетворення Фур'є:

а) Перетворення Фур'є дійсної функції $f(x)$ має властивість $f_{\Phi}(-\omega) = \overline{f_{\Phi}(\omega)}$, тобто його дійсна частина — парна функція, а уявна — непарна.

б) Результатом перетворення Фур'є парної функції є дійсна функція.

с) Перетворення Фур'є дійсної парної функції дає дійсну парну функцію.

д) Перетворення Фур'є дійсної непарної функції дає уявну непарну функцію.

е) Перетворення Фур'є функції, яка на жодному інтервалі свого аргументу не нульова, є фінітною функцією (рис. 7.1, а)

ф) Перетворення Фур'є фінітної функції є функцією, яка на жодному інтервалі свого аргументу не нульова (рис. 7.1, б).

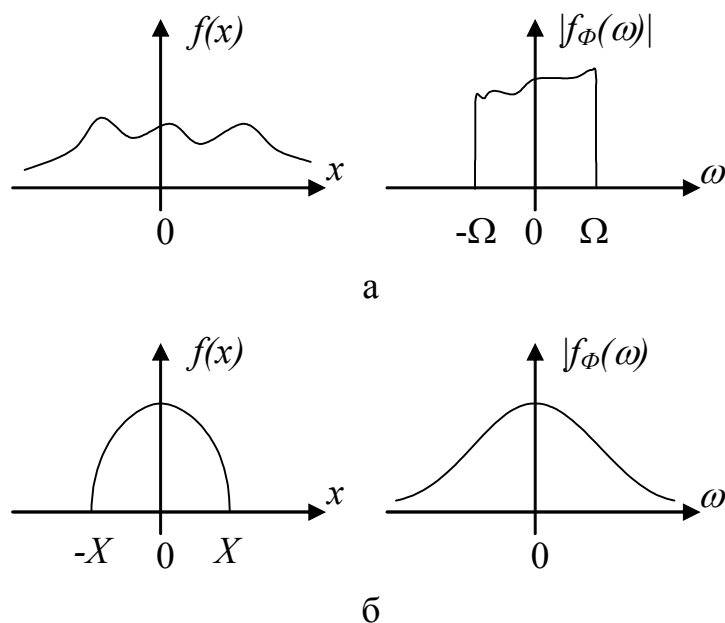


Рис. 7.1

7.2 Алгоритми дискретного швидкого перетворення Фур'є

Періодичні сигнали, або сигнали зі скінченним (фінітним) носієм, які можна періодично продовжити, можуть бути представлені за допомогою

розкладу в ряд Фур'є [2, стор. 47]. Якщо сигнал $f(x)$ має фінітний спектр $f_\Phi(\omega) \equiv 0, \omega \notin (-\Omega, \Omega)$, властивість (е), то цей спектр можна розкласти в ряд Фур'є, коефіцієнти якого будуть з точністю до відповідних масштабних множників дискретними відліками сигналу $f(x)$ (рис. 7.2). Таким чином сигнал з фінітним спектром можна представити з допомогою дискретних відліків, тобто дискретизувати. За теоремою Котельникова (в іноземній літературі — Уітекера-Найквіста-Шенона), сигнал $f(x)$ зі скінченною енергією та фінітним спектром $f_\Phi(\omega) = 0, |\omega| > \Omega$ може бути представлений у вигляді ряду (ряду Котельникова) [2], стор. 58-63; [3], стор. 121-124:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x) \frac{\sin \Omega(x - k\Delta x)}{\Omega(x - k\Delta x)}, \quad (7.3)$$

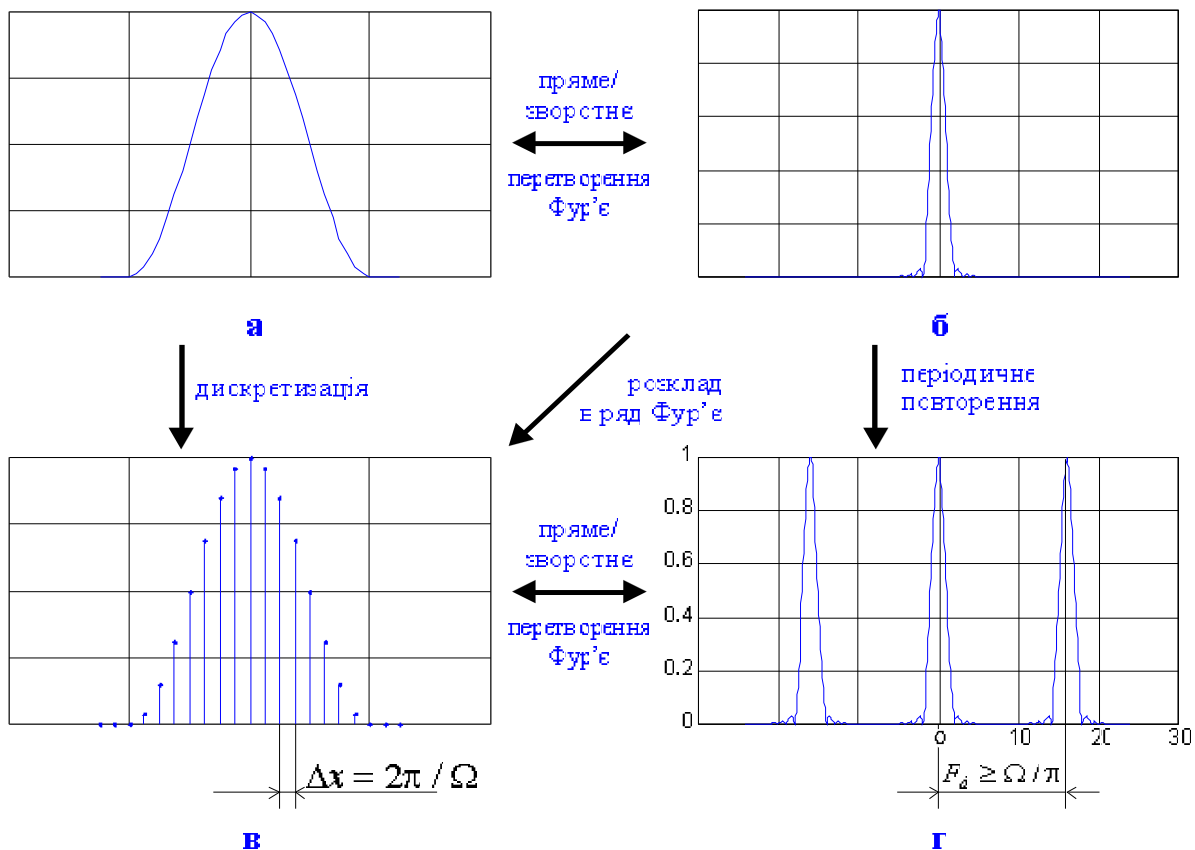


Рис. 7.2

де інтервал дискретизації визначається із співвідношення: $\Delta x \leq \frac{\pi}{\Omega}$.

Для дискретизованих (дискретних) сигналів існує перетворення Фур'є, аналогічне перетворенню Фур'є неперервних сигналів. Двовимірне

пряме і обернене дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) послідовності $[f(n_1, n_2)]$, $n_1 = \overline{1..N_1}$, $n_2 = \overline{1..N_2}$ записується такими виразами:

$$f_{\Phi}(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f(n_1, n_2) W_1^{n_1 k_1} W_2^{n_2 k_2}, \quad (7.4)$$

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} f_{\Phi}(k_1, k_2) W_1^{-n_1 k_1} W_2^{-n_2 k_2}, \quad (7.5)$$

де $W_1 = \exp(-i2\pi / N_1)$, $W_2 = \exp(-i2\pi / N_2)$.

Воно зберігає всі властивості свого неперервного аналога і водночас має нові властивості, які дозволяють будувати ефективні алгоритми числення:

а) Дійсній послідовності $[f(n_1, n_2)]$, $n_1 = \overline{1..N_1}$, $n_2 = \overline{1..N_2}$ властиві співвідношення: $\text{Re}\{f_{\Phi}(k_1, k_2)\} = \text{Re}\{f_{\Phi}((N_1 - k_1) \bmod N_1, (N_2 - k_2) \bmod N_2)\}$, $\text{Im}\{f_{\Phi}(k_1, k_2)\} = -\text{Im}\{f_{\Phi}((N_1 - k_1) \bmod N_1, (N_2 - k_2) \bmod N_2)\}$, тобто спектр дискретного сигналу періодичний з періодом, рівним частоті дискретизації (послідовність $[f_{\Phi}(k_1, k_2)]$ періодична з періодами N_1, N_2).

б) Двовимірне ДПФ матриці розмірністю N_1 на N_2 зводиться послідовного виконання N_1 одномірних ДПФ рядків матриці довжиною N_2 та виконання N_2 одномірних ДПФ стовпців матриці довжиною N_1 :

$$g(n_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f(n_1, n_2) W_2^{n_2 k_2},$$

$$f_{\Phi}(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} g(n_1, k_2) W_1^{n_1 k_1}.$$

Для обчислення двовимірного ДПФ матриці розміром N_1 на N_2 потрібно виконати $(N_1 * N_2)^2$ множень комплексних чисел. Врахування симетрій в обчисленнях для послідовностей розміром 2^m уможливорює побудову алгоритму

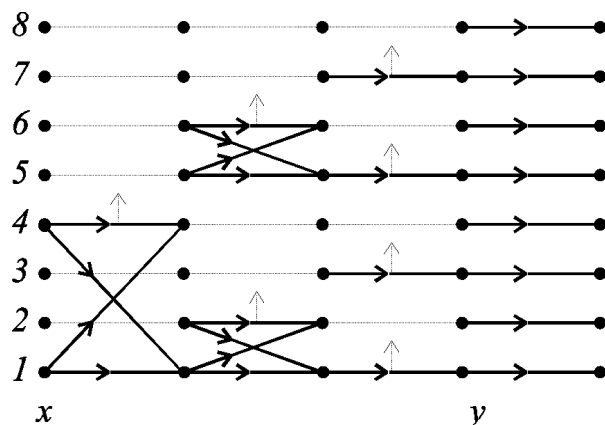


Рис. 7.3

ДПФ, у якому двовимірне дискретне перетворення Фур'є виконується лише $N_1 \log_2(N_1) N_2 \log_2(N_2)$ множеннями, що значно скорочує час обчислень, особливо при великих масивах даних. Такий алгоритм дістав назву алгоритм швидкого перетворення Фур'є (ШПФ, російською — БПФ, англійською — FFT). Для виконання одновимірного ШПФ потрібно $N \log_2(N)$ множень. Вигляд структури алгоритму ШПФ наведено на рис. 7.3 ($N = 8$ послідовних відліків сигналу, виконується $\log_2(N)$ проходів (зліва-направо)

елементарною ланкою обчислень, що носить назву „метелик” (butterfly), кроками знизу-вверх; останній прохід — сортування (перестановка) елементів відліків).

7.3 Реконструкція на основі теореми про центральний переріз з використанням двовимірного алгоритму швидкого перетворення Фур'є

В Х-променевому томографі проєкційні дані є дискретними відліками для фіксованого числа кутів p (типове значення $p=512$), тобто відбувається дискретизація радонівського образу за кутом. Крім того, значення інтенсивності Х-випромінювання записуються для фіксованого числа положень детектора q (у випадку одного детектора) або фіксованою кількістю детекторів q (у деяких томографах). В будь-якому випадку ми маємо справу з матрицею дискретних даних, яка представляє радонівський образ зображення: $R(s_i, \varphi_j)$. В алгоритмі реконструкції на основі теореми про центральне січення для кожного значення кута знаходиться одновимірне ШПФ від послідовності отриманої для даного кута. Після цього проводиться інтерполяція значень просторового спектру на прямокутній сітці з кроком за отриманими одновимірними спектрами радонівського образу для всіх кутів. І, нарешті, виконується двовимірне обернене ШПФ для отримання зображення. Використання алгоритму ШПФ приводить до того, що даний метод реконструкції є одним з найшвидших.

Точність реконструкції залежить як від методу інтерполяції з полярної сітки в прямокутну, так і від вибору параметрів дискретизації. Відомо, що чим вища частота дискретизації, тобто, чим менший інтервал дискретизації Δs , тим вища точність представлення неперервної функції її відліками. Проте, характеристики апаратури, які визначаються умовами її застосування, можуть не дозволити отримати проєкційні дані та проводити реконструкцію для кількості точок, більшої, ніж, наприклад, 2^{10} . Якщо спектр функції відомий, то вибір інтервалу дискретизації можна вибрати за

критерієм Найквіста-Котельникова-Шеннона: $\Delta x \leq \frac{\pi}{\Omega} = \frac{1}{2F_{\max}}$, де $F_{\max}$ —

частота найвищої гармоніки. Тобто, інтервал дискретизації зображення вибирають таким, щоб він був в два рази меншим від розміру мінімального елемента зображення, який необхідно розрізнити будь-де по всьому зображенні.

7.4 Реконструкція методом зворотнього проектування з використанням швидкого перетворення Фур'є

Якщо в методі реконструкції згорткою і зворотнього проектування знайти одновимірне перетворення Фур'є для фіксованого кута φ від правої і лівої частини формули $\tilde{R}(s', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi) h(s' - s) ds$, то отримаємо співвідношення:

$$\tilde{R}_{\varphi}(\omega, \varphi) = R_{\varphi}(\omega, \varphi) H(\omega), \quad (7.6)$$

яке описує фільтрацію у просторово-частотній області (одновимірної проекції). Характеристика фільтра має вигляд (рис. 7.4): $H(\omega) = |\omega|$. Таким чином можна записати ще один алгоритм реконструкції — алгоритм зворотнього проектування з використанням ШПФ (з фільтрацією у частотній області):

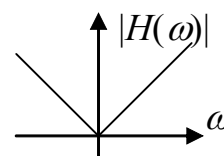


Рис. 7.4

- 1) для заданого кута φ знаходимо перетворення Фур'є від проекції $R(s, \varphi)$, знаходимо $R_{\varphi}(\omega, \varphi)$;
- 2) проводимо фільтрацію у частотній області фільтром з характеристикою $H(\omega) = |\omega|$, отримуємо $\tilde{R}_{\varphi}(\omega, \varphi)$;
- 3) знаходимо обернене перетворення Фур'є від $\tilde{R}_{\varphi}(\omega, \varphi)$, отримуємо фільтровану проекцію для кута φ ;
- 4) повторюємо пп. (1 - 3) для всіх інших кутів;
- 5) далі здійснюємо операцію зворотнього проектування за виразом (6.6).

Питання для самоперевірки

1. Дайте практичну інтерпретацію перетворенню Фур'є.
2. Дайте означення ряду Фур'є.
3. Наведіть підстави до застосування в томографії прямого і оберненого перетворень Фур'є.
4. Характеристики алгоритму зворотнього проектування з використанням швидкого перетворення Фур'є.
5. Проаналізуйте метод реконструкції томографічних зображень на основі теореми про центральний переріз з використанням двовимірного алгоритму швидкого перетворення Фур'є.
6. Проаналізуйте метод реконструкції зворотнім проектуванням з використанням дискретного перетворення Фур'є.

Література до розділу 7

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применения цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.
2. Теорія електричного зв'язку. Ч. 1. / Під ред. В. О. Омельченка. — К.: ІСДО, 1994. — 304 с.
3. Яворський Б. І. Математичні основи радіоелектроніки. Ч. 1. — Тернопіль: ТПІ, 1996. — 183 с.

РОЗДІЛ 8

ЦИФРОВА ФІЛЬТРАЦІЯ У ТОМОГРАФІЇ

Лінійна обробка зображень та сигналів. Цифрові фільтри. Синтез характеристик та методи побудови цифрових фільтрів. Цифрові фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою. Побудова алгоритму роботи цифрового фільтру. Використання цифрових фільтрів в томографії.

Основні нові терміни та позначення [1]:

h — **імпульсна вагова функція** (імпульсна характеристика, імпульсна функція) фільтра (лінійної системи) — реакція (сигнал на виході) у відповідь на δ -імпульс на вході. Відрізняється від **перехідної характеристики**, для визначення якої подається на вхід одиничний стрибок (функція Гевісайда,) а не δ -імпульс;

H — **функція передачі** фільтра (лінійної системи), **частотна характеристика** фільтра (лінійної системи) — є результатом прямого перетворення Фур'є від імпульсної характеристики h , задає властивості фільтра (лінійної системи) в частотній області: АЧХ — амплітудно-частотну (модуль функції передачі — $|H|$), та фазочастотну (ФЧХ) характеристики.

8.1 Цифрова фільтрація — лінійна обробка біомедичних зображень та сигналів

Розвиток томографії став можливим завдяки розвитку обчислювальної техніки та цифрових методів обробки сигналів (коли сигнали представлені послідовностями двійкових кодів чисел — їх значень, відібраних через еквідистантні моменти часу). Застосування цифрових методів обробки сигналів в біотехнічних системах є природнім, оскільки спектри біосигналів та зображень лежать в області таких низьких частот, що застосування аналогової їх обробки, базованої на використанні пасивних реактивних радіоелементів, через їх значні габарити, низьку температурну та часову стабільність, надійність тощо у такому діапазоні частот неможливе. Крім того, біомедичні сигнали та зображення є складними, стохастичними, нестационарними, що вимагає унікальних АЧХ та ФЧХ пристроїв їх обробки, а це в свою чергу накладає такі вимоги до параметрів радіоелементів, отримання та підтримання яких або значно ускладнює технологію їх виробництва, або унеможлиблює його.

Перевагою цифрової обчислювальної техніки у порівнянні з аналоговою є те, що за її допомогою можна забезпечити достатньо надійну, з унікальними параметрами (особливо для біомедичних застосувань), малими габаритами та енергозатратами обробку сигналів уніфікованими

засобами. Крім того, цифрова техніка є надзвичайно серійно придатною [2, 3].

Конструктивною (повно та несуперечливо формалізованою й за критерієм мінімальної складності оптимально інтерпретованою є дискретна лінійна обробка (фільтрація, рис. 8.1, $y_n, x_n, n = \overline{0, \infty}$ — вихідна та вхідна послідовності, $Y(z^{-1}), X(z^{-1})$ — z-перетвори вихідної та вхідної послідовностей, $h_n, H(z^{-1})$ —

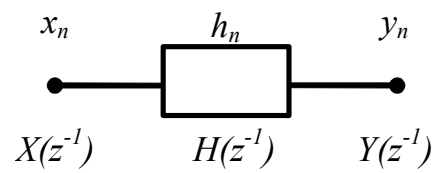


Рис. 8.1 Схема дискретної обробки сигналу

послідовність відліків імпульсної характеристики обробки та її z-перетвір). Принцип лінійності включає в себе властивості суперпозиції (відгук від суми впливів такий самий, що і сума відгуків на кожен вплив зокрема), та однорідності (відгук на інтенсивний вплив такий самий, що і помножений на масштабний коефіцієнт відгук на вплив низько інтенсивний):

$$y_n = F(\alpha x_n^1) + F(\alpha x_n^2) = \alpha F(x_n^1) + \alpha F(x_n^2) = \alpha (F(x_n^1) + F(x_n^2)) = \alpha F(x_n),$$

де $F(\bullet)$ — лінійний оператор дискретної обробки (наприклад, згортка), $n \triangleq nT_d, n = \overline{0, \infty}, T_d$ — період дискретизації, $y_n, x_n = \alpha x_n^1 + \alpha x_n^2$ — вихідна та вхідна послідовності. Тобто, характеристика лінійного дискретного фільтру не залежить від інтенсивності та складеності вхідного впливу. Лінійною обробкою є інтегрування, диференціювання, фільтрація (низькочастотна, смугова, високочастотна, оптимальна) та „віконна” обробка (windowing — зважування сигналу у часовій чи частотній областях значеннями деяких функцій (вікон) для, наприклад, зменшення проявлення ефекту від скінченності інтервалу спостереження сигналу — ефекту Гіббса). Якщо характеристики фільтрів змінюються (рис. 8.2) залежно від характеристик вхідного сигналу, то їх називають адаптивними, а якщо наперед узгоджуються з ними, то — оптимальними (адаптація чи оптимізація виконується, відповідно, в процесі самої фільтрації — автоматично, або закладається при розрахунку фільтра, причому, в обох випадках, за критерієм, вибраним з практичних міркувань).

За призначенням фільтри у томографії можуть бути: селективними, коректуючими, відновлювальними, згладжуючими, регуляризаційними. Для дотримання експлуатаційних та технічних вимог (габаритів, споживаної енергії, чутливості, точності тощо) застосовують різноманітні схемні рішення (заєднання елементів —

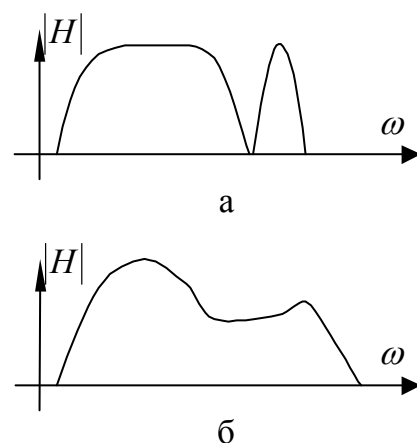


Рис. 8.2

схеми). Тоді фільтри можуть носити назву автора схеми (фільтр Рауха, фільтр Лінквіца-Райлі тощо).

Зауважимо, що різні схеми можуть мати однакову функціональну характеристику і навпаки (однакові схеми – різні характеристики, залежно від значень параметрів їх елементів, або коефіцієнтів їх характеристик — функції передачі, імпульсної вагової функції).

Досить часто характеристику фільтра апроксимують (наближають, наприклад, за значенням в її окремих точок). Тоді фільтр може носити назву автора чи методу апроксимації (фільтр Батерворта, Шепа-Логана тощо). Методи синтезу характеристик фільтра базуються на оптимізації їх з метою забезпечення оптимального значення наперед вибраного критерію, наприклад, відношення потужності відфільтрованого сигналу (зі суміші сигналу зі шумом) до потужності шуму, середньоквадратичного відхилення відфільтрованого зі суміші сигналу від заданого (тестового) сигналу тощо.

Регуляризаційний фільтр повинен забезпечити допустиме значення похибки розв'язку задачі реконструкції.

В томографії застосовують цифрові фільтри для:

а) додаткового, після „грубої” аналогової фільтрації, зменшення ефекту „накладання” при дискретизації (aliasing, *англ.*) — антиалайзинговий фільтр (низькочастотний фільтр з характеристикою, зображеною на рис. 8.3, де $\omega_0 = 0, \Delta\omega \leq \pi/T_d$ з апроксимацією її, наприклад, поліномами Батерворта);

б) фільтрації при реконструкції методом зворотнього проектування (filter back projection method, FBP method, *англ.*) — фільтр з характеристикою, зображеною на рис. 6.3, апроксимованою функцією, наприклад, Шепа-Логана — $|\omega|(\sin(\omega)/\omega)$, (Shepp-Logan);

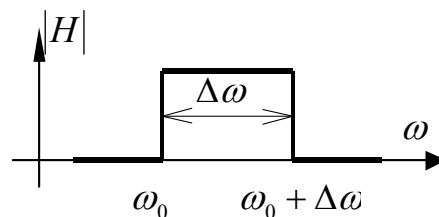


Рис. 8.3

с) підвищення контрастності при реконструкції об'єкту, що містить, тканини досить різної густини (наприклад, кісткову та м'яку) — характеристика такого фільтра будується за (узгоджується з) апріорно відомим просторовим спектром перерізу об'єкту (або тестового зображення для цього перерізу), отриманим, наприклад, Фур'є перетворенням;

д) зменшення впливу рухів пацієнта (артефактів), наприклад, випадкових чи фізіологічних, тоді характеристика фільтра синтезується з використанням відомих спектрів артефактів та зображення перерізу об'єкту, фільтри виконуються за адаптивною схемою;

е) зменшення рівня випадкових шумів, тоді фільтри синтезуються методами Вінера-Колмогорова.

Базовою структурою цифрового фільтра при представленні входу у власній області (domain) можна взяти „згортку” — виконати фільтрацію за допомогою обчислень за формулою дискретної згортки вхідних відліків з імпульсною функцією [4-6]:

$$y_n = \sum_{k=1}^M x_{n-k} h_k, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

де значення M вибирається залежно від значимості відліків імпульсної функції h . Наприклад, значення M може бути рівним номеру k відліку h_k , починаючи з якого значення цифрового коду h_k стають меншими ваги одного-двох молодших біт цього коду. Тоді синтез фільтру полягає у визначенні коефіцієнтів h_k — відліків імпульсної вагової функції. Це можна зробити застосувавши обернене перетворення Фур'є від отриманих за наведеними пп. (а-с) спектрами, або отримати такі коефіцієнти безпосередньо, використавши інші методи синтезу фільтрів, наприклад, наведених у пп. (d, e).

Обмеженням для застосування цифрових фільтрів є їх швидкодія (можливість обробляти сигнали зі спектрами у діапазоні високих частот). Проте, розвиток напівпровідникової технології постійно збільшує верхню граничну частоту, з якою можуть працювати цифрові фільтри.

8.2 Методи цифрової фільтрації

На основі виразу згортки реалізуються цифрові фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою (СІХ-фільтри, в англomовній літературі FIR — finite impulse response, КИХ — *рос.*):

$$y_n = \sum_{k=0}^M x_{n-k} h_k, \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (8.1)$$

Довжину імпульсної характеристики СІХ фільтрів можна зменшити у порівнянні з наведеною вже величиною M , вибираючи відповідне її значення таким, що забезпечується потрібна точність фільтрації.

Інший метод цифрової фільтрації базується на використанні прямого і оберненого перетворення Фур'є. Оскільки в частотній області $Y = HX$, то, маючи відліки сигналу x_n , беремо від нього дискретне перетворення Фур'є, множимо результат цього перетворення на функцію передачі фільтра H і отримуємо Y , від якого беремо обернене перетворення Фур'є й отримуємо y_n . На вхід цифрового фільтру подається і з виходу відбирається послідовності закодованих (двійковим кодом) значень відліків сигналу. Для того, щоб можна було використовувати такий алгоритм цифрової фільтрації, до сигналів повинні ставитись певні вимоги. Наприклад, тривалість сигналу має бути обмеженою, тоді легко виконувати перетворення Фур'є. Інакше потрібно використовувати вікна, для вирізання

з "довгої" реалізації сигналу окремих його вибірок. Це у свою чергу ставить вимогу до стаціонарності сигналу та його детермінованості.

Ще один метод цифрової фільтрації — рекурсивний обчислювальний метод розв'язування диференційного (difference — різниця, *англ.*) рівняння. Такі цифрові фільтри мають нескінченну імпульсну характеристику (НІХ, IIR — infinite impulse response, БІХ — *рос.*):

$$y_n = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k}; \quad n = \overline{0, \infty}. \quad (8.2)$$

Коли виконаємо z – перетворення від рівняння (8.2), то отримаємо вираз функції передачі фільтра:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}\right)}. \quad (8.3)$$

Згортка отримується для представлення фільтра як системи типу вхід-вихід з міркувань, що система лінійна, отже має імпульсну характеристику і сума зсунутих відгуків на кожен вхідний відлік буде вихідним сигналом. Тоді h — імпульсна характеристика системи, а обчислення згортки — метод побудови фільтра. У рекурсивному фільтрі застосовано метод розв'язування диференційного (різницевого) рівняння, дискретного варіанту неперервного, диференціального (differential) рівняння. Вираз нагадує дві згортки. Але a_k , b_k є параметри (коефіцієнти) різницевого рівняння, а не відліки імпульсної характеристики.

Описані методи цифрової фільтрації та методи, побудовані на ще інших представленнях лінійних систем (вхід-вихід, у просторі змінних стану, диференціальними рівняннями, хвиловими рівняннями тощо) є еквівалентними математично. Проте їх застосування при побудові алгоритмів цифрової обробки сигналів чи зображень з врахуванням можливостей представлення даних та виконання операцій у процесорі приводить до різних практичних результатів. Різні алгоритми забезпечують різну точність, різну кількість необхідних операцій (складність), і відповідно різну швидкодію, різну розрядність даних та кількість коефіцієнтів, що виливається в обсяг пам'яті. Зрештою, реалізація певних видів обробки деякими методами є просто неможливою (внаслідок фізичних, енергетичних чи інших обмежень), тоді як іншими — здійснюється з мінімальними затратами. Особливий випадок є

використання фільтрації при розв'язанні некоректних задач, де в залежності від варіанту реалізації та параметрів фільтра розв'язок може "збігатися" або бути "розбіжним", нестійким.

8.3 Алгоритми цифрової фільтрації при реконструкції томографічних зображень

Алгоритмами цифрової фільтрації є наперед відомі, скінченні, послідовності окремих команд на виконання дій над вхідними послідовностями для розв'язування задачі фільтрації одним з методів. Таким чином, алгоритм можна побудувати, якщо відомі (обґрунтовано вибрані) метод цифрової фільтрації та засоби цифрової обчислювальної техніки для його реалізації. Тоді побудова алгоритму не викликає ніяких труднощів для інженера. Проте, вибір методу та засобів не є тривіальним при заданих техніко-економічних та медико-технічних умовах (які є обмеженнями при виборі оптимального поєднання метод-засіб за заданими кількома критеріями). Тому, поряд з існуванням спеціалізованих мікропроцесорів цифрової обробки сигналів (digital signal processing, DSP) для цифрової фільтрації, інтенсивно проводяться наукові дослідження у напрямі удосконалення та розроблення нових методів та засобів її для томографії. При цьому чинниками виступають суперечливі вимоги: з одного боку, підвищення портательності томографів, їх неінвазивності (зменшення інтенсивності Х-променів), а з другого боку — підвищення якості реконструкції та функціональних можливостей їх. Одним з компромісних рішень цієї суперечливості виступило застосування реконструкції методом зворотнього проектування з ρ —фільтрацією.

При побудові алгоритму зворотнього проектування використовується одновимірна фільтрація проєкцій в просторовій області (з використанням згортки) або фільтрація в частотній області з використанням прямого і оберненого перетворення Фур'є. Можливе використання й інших методів цифрової фільтрації, зокрема — рекурсивного методу.

Метод інтегральних перетворень є поєднанням інтегрування та лінійної фільтрації. Звідси випливають вимоги до вибору засобів для виконання цих операцій, виконання якого уможливорює побудову алгоритмів. В залежності від того, яка операція виконується першою, отримуємо два класи методів реконструкції зображення перерізу за його проєкціями: а) інтегрування проєкцій, отриманих для різних кутів та двовимірна фільтрація; б) одновимірна фільтрація окремих проєкцій, отриманих для різних кутів та інтегрування фільтрованих проєкцій. В залежності від області побудови фільтрів (просторової чи просторових частот) для кожного з класів отримаємо варіанти методів реконструкції: для двовимірної фільтрації у частотній області (прямим-зворотнім перетворенням Фур'є) — на основі теореми про центральне січення; для

двовимірної фільтрації у просторовій області — ρ —фільтрацією; для одновимірної фільтрації у частотній області (прямим-зворотнім перетворенням Фур'є) — зворотнього проектування; для одновимірної фільтрації у просторовій області — зворотнього проектування згорткою (табл. 8.1) [4, 5].

Таблиця 8.1

Методи реконструкції томографічного зображення

Область Фільтрація	Просторових частот	Просторова
Одновимірна	Зворотнє проектування (ПЗПФ)	Зворотнє проектування (згортка)
Двовимірна	ρ — фільтрація	Теорема про центральный переріз

Регуляризація є різновидом цифрової фільтрації, при цьому імпульсну чи частотну характеристики фільтру можна отримувати як шляхом розв'язування задачі оптимізації регуляризаційного параметра (наприклад, методом його підбору).

Питання для самоперевірки

1. Поясніть суть цифрової фільтрації.
2. Наведіть приклади методів цифрової фільтрації.
3. Дайте означення алгоритму цифрової фільтрації сигналу.
4. У чому полягає побудова алгоритму цифрової обробки сигналу?
5. Наведіть приклади використання цифрової фільтрації при реконструкції томографічних зображень.
6. Поясніть застосування згортки цифрової фільтрації в часовій та просторовій областях.
7. Чим відрізняється дискретна згортка в одновимірному випадку від дискретної згортки у двовимірному випадку?
8. Які фільтри кращі для томографії — зі скінченною чи з нескінченною імпульсною характеристикою?
9. Яка фільтрація краща для реконструкції томографічного зображення — одно- чи двовимірна?

Література до розділу 8

1. Яворський Б. І. Математичні основи радіоелектроніки. Ч. 1. — Тернопіль: ТПІ, 1996. — 183 с.
2. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. — М.: Сов. радио, 1973.

3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применения цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.

4. Рафа Т.М. Процесор "згортки" для реконструкції томографічних зображень // Природничі і гуманітарні науки. Актуальні питання. Тези доповіді студентської наукової конференції, присвяченої 150-річчю з дня народження Івана Пулюя. — Тернопіль, 1995, с. 101.

5. Рафа Т.М. Спецпроцесор згортки для комп'ютерної томографії колінного суглоба // Збірник тез кращих студентських робіт за підсумками I обласного конкурсу студентських науково-дослідних, творчих, пошукових робіт 1994 — 1995 років. — Тернопіль, 1995, с. 50-51.

6. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 488 с.

РОЗДІЛ 9

ВИКОРИСТАННЯ ЗГОРТКИ ДЛЯ ЦИФРОВОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ ТОМОГРАФІЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Цифрові фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою. Цифрова згортка. Двовимірна цифрова згортка. Методи та схема обчислення згортки. Двовимірна ρ -фільтрація згорткою. Цифрове зворотнє проектування згорткою. Швидкість реконструкції з використанням цифрової згортки.

9.1 Цифрова фільтрація в часовій та просторовій областях

Відомо, що для аналогового лінійного фільтру (рис. 9.1), за умови обмеженості енергій сигналу на його вході та його відгуку на дельта-сигнал (що в термінах математичних моделей їх означає інтегрованість з квадратом функцій, якими сигнал та відгук адекватно моделюються) існує таке співвідношення між лапласівськими образами вихідного і вхідного сигналів:

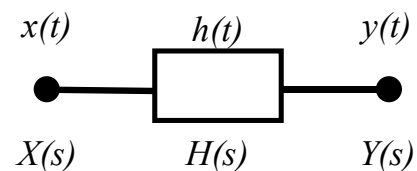


Рис. 9.1

Модель аналогового фільтру типу „вхід-вихід”

$$Y(s) = H(s)X(s), \quad (9.1)$$

де $H(s)$, — функція передачі фільтру, $s = j\Omega$, $j = \sqrt{-1}$. З властивості добутку лапласівських образів [1, табл. 2.2] випливає, що

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t)x(t-\tau)d\tau, \quad (9.2)$$

де $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ — обернене перетворення Лапласа від функції передачі фільтру, або (у фізичній інтерпретації) відгук фільтру на δ - подібний сигнал (рис. 9.2). У виразі (9.2) інтеграл $\int_0^{\infty} h(t)x(t-\tau)d\tau$ за означенням є оператором згортки; інше його позначення — $x(t)*h(t)$.

У виразах (9.1, 9.2) величини Ω і t є дійсними числами. Їх назви, відповідно, частота і час (одиниці вимірювання — Гц та сек.). Проте, в

томографії, вони можуть бути величинами просторовими — наприклад, просторовою частотою та віддаллю (одиниці вимірювання $1/m$ та m).

Одним з прикладів застосування згортки є математичне моделювання процесу обробки зображення деяким оптичним пристроєм, залежність чутливості якого від кута падіння променів має вигляд, зображений на рис. 9.3 (тоді відповідні одиниці вимірювання аргументів у виразах (9.1, 9.2) будуть, наприклад, $1/\text{радіан}$ та радіан). Якщо таким пристроєм сканувати зображення, то вихідне зображення буде результатом згортки вхідного зображення з функцією чутливості оптичного пристрою (тоді згортка є оптичною низькочастотною фільтрацією зображення, наприклад, перед його дискретизацією). В комп'ютерному томографі також застосовується подібна обробка, наприклад, при „оцифровуванні” проєкційних даних перед їх аналогово-цифровим перетворенням — АЦП, (analog-digital conversion — ADC, *англ.*).

Для цифрової обробки значення дискретних сигналів кодують двійковим кодом, наприклад, з фіксованою точкою, типу знак-модуль або доповнюючим (комплементарним). Якщо сигнали цифрові, то вираз згортки аналогічно до виразу (9.2) набуває вигляду:

$$\hat{y}_n = \sum_{k=0}^M \hat{x}_{n-k} \hat{h}_k, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (9.3)$$

де значком $\hat{}$ позначено факти кодування дискретних значень вхідного сигналу x , імпульсної функції h , та результату обчислень за формулою (9.3) над цими кодами при скінченній кількості M значень імпульсної характеристики. При цьому виникає похибка цифрової обробки внаслідок кодування:

$$\xi_n = \left| y(t) \Big|_{t=nT_d} - \hat{y}_n \right|,$$

де T_d — період дискретизації. Імпульсна характеристика завжди скінченна, оскільки, починаючи з деякого n всі значення її представляються бітом

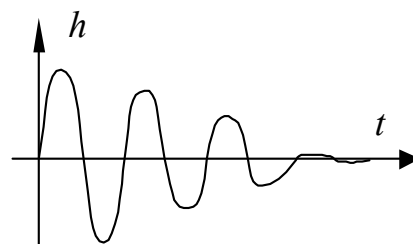


Рис. 9.2

Відгук фільтра на δ -подібний сигнал

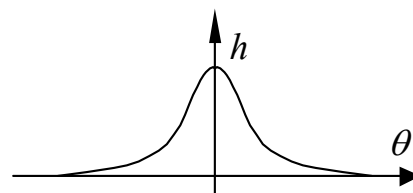


Рис. 9.3

Залежність чутливості h оптичного пристрою від кута падіння променів θ

молодшого розряду її двійкового коду. Крім того, обмежений об'єм пам'яті та потрібна швидкодія обчислень згортки також впливають на величину M .

Аналогічно до виразу (9.2) одновимірної згортки можна записати формулу згортки і для двовимірних зображень:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, y_1) \chi(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 \quad (9.4)$$

та її цифровий варіант

$$\hat{f}(x_k, y_l) = \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} \hat{g}_{i,j} \hat{\chi}_{k-i, l-j}, \quad (9.5)$$

де $k, l = \overline{0, \infty}$.

9.2 Обчислення згортки

Блок-схема обчислень одновимірної згортки показана на рис. 9.4, де знаком $\times$ позначено помножувач, Σ — позначено суматор з нагромадженням результату підсумовувань (акумулятор), а z^{-1} означає затримку відліку на час періоду T_d дискретизації. Для обчислення одного вихідного значення потрібно:

- обнулити суматор-акумулятор Σ ;
- виконати M множень $x_{n-i} h_i$, $i = \overline{0, M-1}$ та M додавань (з нагромадженням суми) в суматорі Σ ;
- відібрати результат кроку (b) — відлік y_n вихідного сигналу;
- зсунути по лінійці комірок z^{-1} пам'яті її вміст $x_n \dots x_{n-M}$ (виконання затримки);
- відібрати відлік x_n вхідного сигналу;
- перейти на крок (a).

Виконання обчислень за блок-схемою рис. 9.4 вимагає великих апаратних затрат (пам'яті) та часу (або M паралельних помножувачів та M — входовий суматор, або послідовне використання одного помножувача, обмін між комірками зовнішньої пам'яті тощо). Тому застосовується спеціалізований процесор для цифрової обробки згорткою (наприклад, з командою перемноження-сумування з нагромадженням, що виконується процесором за один такт.

Найпростішою в апаратній реалізації та водночас найменш швидкодіючою є варіант структури з використанням лінійки багаторозрядних регістрів (для виконання затримки), одного помножувача та акумулюючого (нагромаджуючого) суматора. При цьому, потрібна пам'ять для зберігання коефіцієнтів фільтра (M значень імпульсної характеристики) та комутатор, який послідовно перемикав би помножувач до регістрів та комірок пам'яті. Після кожного циклу обчислення значення вихідної послідовності повинен відбуватись зсув кодів по лінійці регістрів на один регістр. Крім того, на початку обчислень при довільному стані регістрів з лінійки регістрів на виході будуть коди перехідного процесу, тривалість якого визначається параметрами АЧХ фільтра, при цьому $k = \overline{0, K-1}$, $l = \overline{0, L-1}$, і для забезпечення достатньої точності K та L повинні вибиратися набагато більшими за M_1 та M_2 .

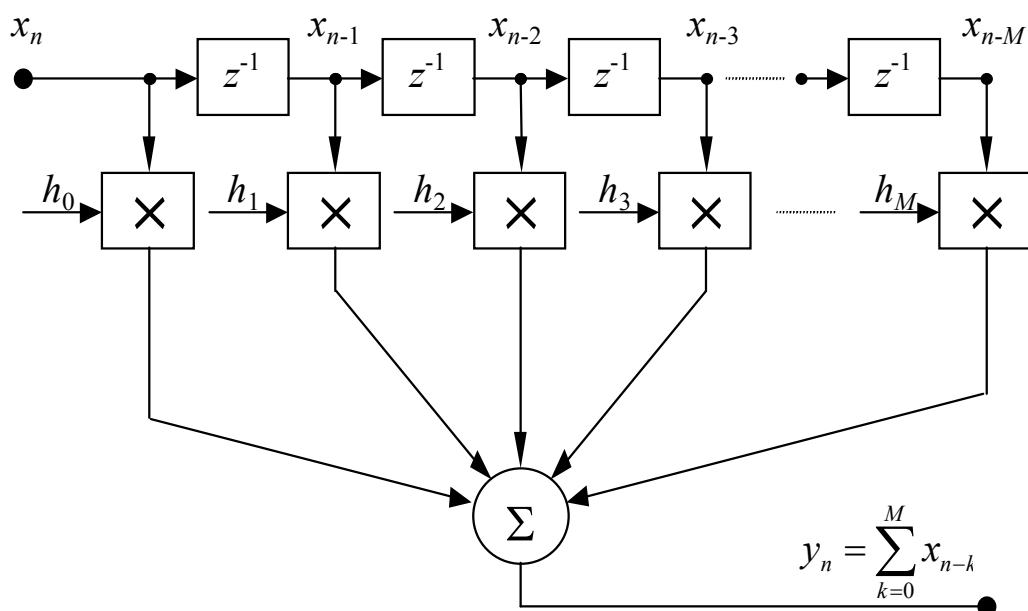


Рис. 9.4

Блок-схема обчислення згортки, z^{-1} — затримка на один такт

На рис. 9.5 наведено схему з підвищеною швидкістю зсуву.

Коди чисел x_n , $n = \overline{n, n-M}$ не переписуються з комірки в комірку (крок (d)), а лише змінюється на +1 чи -1 через кожних M множень-додавань з нагромадженням початкова адреса масиву пам'яті, який містить ці коди (змінюється базовий адрес пам'яті RAM — пам'яті з довільним доступом, random access memory, *англ.*; mod_M — лічильник за модулем M ; $n = \overline{0, \infty}$ — номери відліків вхідного сигналу).

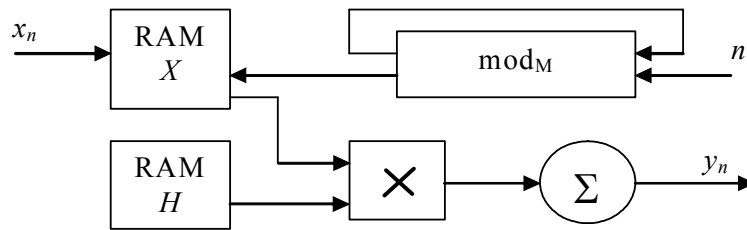


Рис. 9.5

Блок-схема організації зсуву у пам'яті масиву кодів чисел

Використання паралельних, спеціалізованих процесорів забезпечує виконання одно- і двовимірної згортки масивів даних достатньої розмірності та в реальному для застосувань томографії масштабі часу [2, 3].

9.3 Використання згортки для реконструкції.

Метод ρ -фільтрації базується на теоремі про центральний переріз (див. розділи 3 та 4), як і метод зворотнього проектування згорткою, але відрізняється від останнього тим, що операції згортки і зворотнього проектування проводяться в іншому порядку — спочатку обчислюється зворотня проекція за формулою

$$S(x, y) = \int_0^{\pi} R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi, \quad (9.6)$$

а потім виконується двовимірна просторова згортка

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x_1, y_1) \chi(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1, \quad (9.7)$$

де

$$\chi(x, y) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} e^{i2\pi(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (9.8)$$

є ядром ρ — фільтра.

Фільтрація двовимірною згорткою (9.7) в просторовій області вимагає значних затрат пам'яті та часу обчислень. Якщо перейти в просторово-частотну область шляхом двовимірного перетворення Фур'є, то ефективність алгоритму фільтрації значно зростає, проте дещо знижується точність реконструкції.

Основним недоліком алгоритму ρ – фільтрації двовимірною згорткою є те, що для отримання зображення розміром $N \times N$ для уникнення крайових ефектів (коливань Гібса), розмір сумарної зворотньої проекції $S(x, y)$ повинен бути принаймні $(N+M) \times (N+M)$, для імпульсної характеристики фільтра згортки розміром $M \times M$ [4].

Для реалізації двовимірної згортки в просторовій області необхідно використовувати спеціалізовані процесори, оскільки при використанні стандартних обчислювальних засобів час обчислення настільки великий, що це перевищує допустимі для портатбельного (portability — пересувний), клінічного томографа значення. Сумарна кількість операцій множення для отримання зображення одного січення тоді пропорційна N^4 . Так для зображення розміром 512×512 елементів при використанні комп'ютера з процесором з тактовою частотою всього 500 МГц час обчислень для одного перерізу буде становити від 15 хв. до однієї години, тоді як використання спеціалізованого процесора ШПФ, уможливило виконання реконструкції за (1-5) с.

За методом реконструкції „згортка і зворотне проектування” спочатку виконується фільтрація радонівського образу і лише потім — зворотне проектування. Тому згортка в цьому алгоритмі одновимірна:

$$\tilde{R}(s', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi) \eta(s' - s) ds, \quad (9.9)$$

і кількість операцій для одного січення пропорційна N^3 (N згорток довжиною N відліків). Це дозволяє отримувати зображення навіть при програмній реалізації на стандартних комп'ютерах за доли секунди. Крім того, досягається значна економія пам'яті, оскільки для згортки використовуються лише одновимірні масиви довжиною N відліків, а не двовимірні, $(N \times N)$ відліків, як в алгоритмі ρ – фільтрації.

9.4 Метод зворотнього проектування на основі одновимірної згортки

Для реалізації реконструкції на основі зворотнього проектування попередньо профільтованих за допомогою згортки одновимірних проекцій, потрібно знайти дискретні аналоги формул (4.19 - 4.21). Оскільки фізично неможливо реалізувати імпульсну характеристику (ядро) згортки нескінченної довжини (через кодування її значень двійковими кодами скінченної розрядності) і з врахуванням вимог до спектру імпульсної характеристики, які впливають з теореми Котельникова, будемо вважати, що спектральна енергія будь-якої проекції близька до нуля при частотах,

вищих деякої частоти $\omega_{\max}$. Тоді імпульсна характеристика фільтра — зворотне перетворення Фур'є від $|\omega|$ в частотній області на смузі частот від $\omega_{\max}$ до $\omega_{\max}$, набирає вигляду

$$h(s) = \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} |\omega| e^{i2\pi\omega s} d\omega. \quad (9.10)$$

Якщо кожна проекція дискретизована з відстанню між сусідніми відліками τ см, то щоби дискретизовані проекції не мали спотворень, пов'язаних з ефектом накладання просторових частот [5, 6], необхідно, щоб $\omega_{\max} = \frac{1}{2\tau}$ [7]. Підставляючи це значення $\omega_{\max}$ в (9.10), отримаємо таку імпульсну характеристику

$$h(s) = \frac{1}{2\tau} \frac{\sin(2\pi s/2\tau)}{2\pi s/2\tau} - \frac{1}{4\tau^2} \left(\frac{\sin(\pi s/2\tau)}{\pi s/2\tau} \right)^2. \quad (9.11)$$

Оскільки проекційні дані відбираються через інтервал дискретизації τ і тому їх спектр перед цим відбором обмежується (антиалайзинговою фільтрацією), для цифрової обробки необхідно знати її імпульсну характеристику тільки в межах смуги частот. З (9.11) отримаємо

$$h(n\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4\tau^2}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ непарне} \\ -\frac{1}{n^2\pi^2\tau^2}, & n \text{ непарне,} \end{cases} \quad (9.12)$$

де n приймає цілі значення (додатні і від'ємні). В точках дискретизації $n\tau$ фільтровані проекції можуть бути отримані за допомогою дискретної згортки. Для дискретного випадку із співвідношення (4.20) впливає

$$\tilde{R}_{\varphi}(n\tau) = \tau \sum_m R_{\varphi}(m\tau) h((n-m)\tau). \quad (9.13)$$

Для обмежених в смузі частот функцій, що задовольняють умову $\omega_{\max} = \frac{1}{2\tau}$, сумування в (9.13) дає точне значення $\tilde{R}_{\varphi}(s')$ при $s' = n\tau$.

Дискретну згортку за формулою (9.13) можна реалізувати безпосередньо, однак вона буде обчислюватись значно довше, ніж при виконанні фільтрації в частотній області з використанням швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Проте, використовуючи спеціалізовані апаратні засоби (спецпроцесори), можна добитись того, що безпосереднє обчислення за формулою (9.13) буде здійснюватись швидше, ніж розрахунок в частотній області. При цьому якість реконструкції буде вищою, оскільки пряме-обернене перетворення Фур'є вносить додаткові похибки та артефакти. Крім того, для покращення якості реконструкції можна використати згладжування проекційних даних перед їх фільтруванням.

Після фільтрування проекцій необхідно виконати другий крок алгоритму реконструкції — обчислити сумарну зворотню проекцію. Для цього потрібно знайти апроксимацію інтегралу (4.21) числовими методами. Якщо число проекцій M_{proj} досить велике і проекції рівномірно розподілені в секторі 180° , то рівняння (4.21) можна апроксимувати виразом

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\pi}{M_{proj}} \sum_{i=1}^{M_{proj}} \tilde{R}_{\varphi_i}(x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i). \quad (9.14)$$

Функція $\hat{f}(x, y)$ являє собою відновлену апроксимацію функції $f(x, y)$. Зрозуміло, що внесок фільтрованої проекції з кутом φ_i в точку (x, y) відновлюваного зображення рівний $\tilde{R}_{\varphi_i}(x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i)$. Як вже згадувалось в попередніх розділах, обчислення таких внесків одного $\tilde{R}_{\varphi_i}$ у всі елементи зображення називається зворотнім проектуванням, а відповідні значення — зворотніми проекціями. Сума всіх зворотніх проекцій рівна $\hat{f}(x, y)$. Щоб знайти зворотню проекцію $\tilde{R}_{\varphi_i}(t)$ в точку (x, y) , потрібно знати цю величину для $s = x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i$. Значення s , однак, може не співпадати ні з одним із дискретних значень, для яких відомо $\tilde{R}_{\varphi_i}(t)$ (за 9.13). В таких випадках використовується інтерполяція, причому, навіть лінійна інтерполяція є задовільною. Часто для скорочення часу обчислень, пов'язаних з інтерполяцією, використовується попередня інтерполяція й функції $\tilde{R}_{\varphi_i}(t)$. В цьому випадку до зворотнього проектування функція $\tilde{R}_{\varphi_i}(t)$ інтерполюється на точки, число яких в 10-100 раз більше від числа заданих її значень. З цієї щільної множини точок для отримання значення $\tilde{R}_{\varphi_i}$ в

точці $x \cos \varphi_i + y \sin \varphi_i$ достатньо взяти значення з найближчої сусідньої точки. При цьому, зворотнє проектування виконується з використанням малої кількості операцій множення.

Питання для самоперевірки

1. Які властивості повинна мати проекція Радона двовимірної функції для існування її лапласівського образу?
2. Чим відрізняються неперервна згортка від дискретної згортки?
3. Визначити імпульсну характеристику проективного перетворення.
4. Наведіть приклад обчислення згортки.
5. Які фільтри можна виконати за допомогою згортки?
6. Поясніть алгоритм ρ – фільтрації.
7. Назвіть переваги і недоліки алгоритму ρ –фільтрації.
8. У чому полягає метод зворотнього проектування згорткою?
9. Наведіть метод визначення дискретних значень ядра згортки.
10. Як перетворити у двійкові коди дискретні значення ядра згортки?

Література до розділу 9

1. Яворський Б. І. Математичні основи радіоелектроніки. Ч. 1. — Тернопіль: ТПІ, 1996. — 183 с.
2. Рафа Т.М. Процесор "згортки" для реконструкції томографічних зображень // Природничі і гуманітарні науки. Актуальні питання. Тези доповіді студентської наукової конференції, присвяченої 150-річчю з дня народження Івана Пулюя. — Тернопіль, 1995. — с. 101.
3. Рафа Т.М. Спецпроцесор згортки для комп'ютерної томографії колінного суглоба // Збірник тез кращих студентських робіт за підсумками 1 обласного конкурсу студентських науково-дослідних, творчих, пошукових робіт 1994 — 1995 років. — Тернопіль, 1995. — с. 50-51.
4. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 488 с.
5. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. — М.: Сов. радио, 1973.
6. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978. — 848 с.
7. Кэк А. С. Машинная томография с использованием рентгеновского излучения, радиоактивных изотопов и ультразвука // ТИИЭР, т. 67, № 9, 1979. — С. 79-107.

РОЗДІЛ 10

ЗАСОБИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ТА ОСНОВНІ КОНСТРУКТОРСЬКО-ТЕХНОЛОГІЧНІ РІШЕННЯ ПРИ ПОБУДОВІ ЦИФРОВИХ ТОМОГРАФІВ

Загальна структурна схема апаратури та схеми відбору даних в X-променевих комп'ютерних томографах. Покоління томографів, їх характеристики та класи складності. Апаратні та програмні засоби реалізації алгоритмів реконструкції. Схема обробки даних та засоби виведення і зберігання зображень. Основні конструкторсько-технологічні проблеми при виробництві томографів та їх вирішення.

10.1 Схеми відбору даних в X-променевих обчислювальних томографах

Загальна схема розміщення обладнання томографа наведена на рис. 10.1 [1]. Блок відбору даних (2) (гантрі) має вирішальне значення для отримання якісних зображень об'єкту обстеження в комп'ютерному томографі, та, як зазначалось у першому розділі, відіграє значну роль для неінвазивності обстеження. Оскільки в процесі обробки кількість інформації, яку несуть проекційні дані, може тільки зменшитись (один з принципів теорії інформації), то від організації схеми відбору проекційних даних залежить можливість виділення в процесі обробки цих даних потрібну лікареві інформацію.

Внаслідок вдосконалення технічних засобів, що використовуються для побудови томографів, з розвитком відповідних методів реконструкції, характеристики томографів покращуються, а їх можливості розширюються. Рушієм цього процесу є зростання соціальних, а звідси і галузевих (медичних) вимог. Так перший томограф (1972 р.) реконструював зображення розмірністю 80 на 80 елементів впродовж 5 хвилин. Роздільна

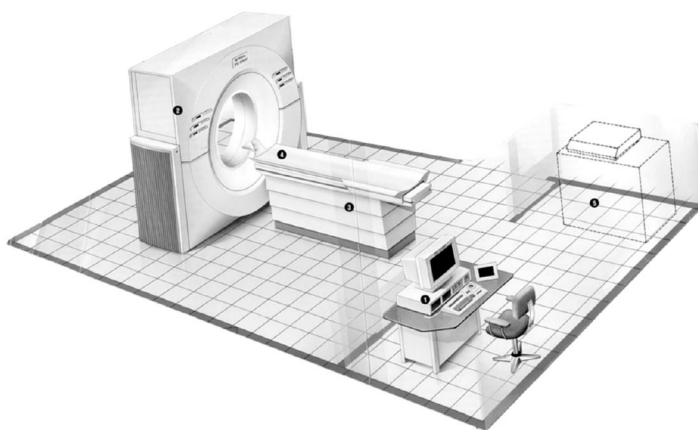


Рис. 10.1

Загальна схема розміщення томографа:

- 1 — консоль керування, 2 — гантрі,
3 — стіл пацієнта, 4 — підставка для
голови, 5 — лазерний принтер

здатність його була до 3 ліній/см. Сучасні томографи виконують реконструкцію зображень, наприклад, 1024 на 1024 елементів за час менший 2 секунд при роздільній здатності 15 ліній/см, товщині сканованого шару 1 мм, роздільній здатності за густиною менше 1%. Вони мають можливість реконструювати зображення в динаміці (рухомих), проводити спіральну реконструкцію для чергового відображення внутрішніх структур органу чи частини тіла пацієнта в тривимірному вигляді чи в перерізах під різними кутами.

Залежно від методу сканування об'єкту при відборі проекційних даних виділяють п'ять поколінь Х-променевих томографів [1]. Кожне чергове покоління томографів має вищу швидкість сканування, при цьому зростає складність алгоритмів реконструкції та корекції.

Томографи першого покоління (рис. 10.2) містили одне джерело і один детектор Х-випромінювання (або 2 детектори для сканування двох сусідніх шарів — дуальний детектор) [1, 2]. Виконується поступальний рух системи випромінювач–детектор і отримується проекція для одного кута. Далі — поворот системи сканування на 1° і повторюється поступальний рух. Такі томографи характеризувались простим алгоритмом реконструкції, відсутністю впливу на проекційні дані розсіювання Х-променя. Їх призначення — діагностування нерухомих (статичних) біооб'єктів (час відбору проекційних даних — до 5 хв.). Розмір проекційних даних — 180 на 160 точок, розходження променя після коліматора — $(0,35-0,4)^\circ$.

Для другого покоління томографів кількість детекторів зростає до 15 (при скануванні двох сусідніх шарів їх 30). Характерною відмінністю від томографів 1-го покоління є використання віялоподібного пучка (пучок розходить). За рахунок одночасного сканування багатьма детекторами час сканування скорочується до (20-40) сек. Відбувається поступальний рух системи випромінювач-детектори, після чого скануюча система повертається на (10-

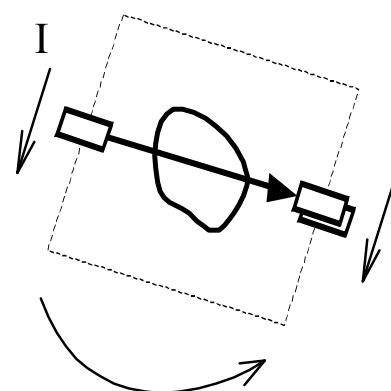


Рис. 10.2

Схема сканування об'єкту в томографах 1-го покоління

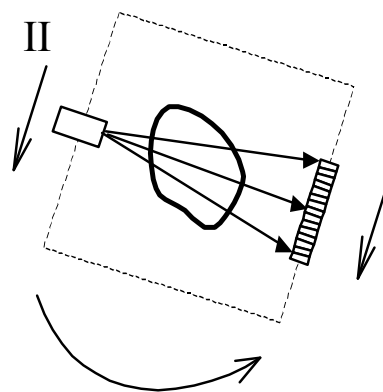


Рис. 10.3

Схема сканування у томографах 2-го покоління

15)°, рис. 10.3. Об'єм проєкційних даних — 250000 чисел. Алгоритм реконструкції повинен враховувати часткове розсіювання та геометрію проходження променів.

В томографах 3-го покоління використовується широкий пучок віялоподібної форми, що повністю охоплює біооб'єкт, тому не потрібний поперечний поступальний рух (рис. 10.4). Здійснюється лише неперервне обертання системи випромінювач-детектори на 360°. Випромінювач працює в імпульсному режимі. Детектори малоінерційні, їх (250-500) штук. Тривалість імпульсів — 1.5 мсек., час сканування — 5 сек. Об'єм проєкційних даних — (10^5-10^6) чисел. Малий час сканування дозволяє отримувати зображення органів, що повільно рухаються.

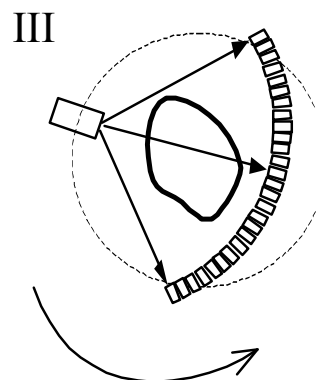


Рис. 10.4

Схема сканування у томографах 3-го покоління

Четверте покоління томографів характеризується тим, що в них детектори нерухомі, розміщені по колу, їх кількість рівна числу ракурсів — (500-1000) штук, обертається тільки джерело випромінювання.

Випромінювання відбувається неперервно (рис. 10.5). Час сканування 2,5 сек. і менше. Об'єм проєкційних даних, чисел — $1,5 \cdot 10^6$.

Сканування здійснюється електронним шляхом, дані відбираються лише з тих детекторів, що знаходяться в полі дії джерела випромінювання. В алгоритмах мають враховуватись значний вплив розсіювання та складна геометрія проходження променів. Потужність джерела — близько 1 кВт, тому необхідна додаткова система його охолодження.

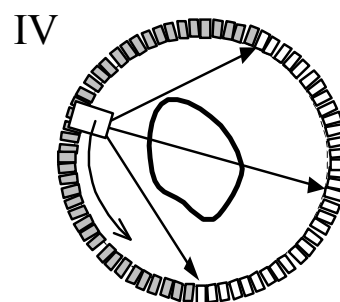


Рис. 10.5

Схема сканування у томографах 4-го покоління

Томографи 5-го покоління мають можливість неперервного об'ємного сканування (спіральне сканування), що дозволяє будувати перерізи, розміщені під будь-яким кутом до площини сканування, відображати об'ємні зображення органів тощо. Сканування окрім навколо осі здійснюється ще й вздовж тіла пацієнта. В алгоритмах реконструкції враховується поздовжнє сканування системи під час спірального режиму роботи. На рис. 10.6 наведено схему томографа 5-го покоління в якому потужний віялоподібний пучок електронів переміщується відхиляючою котушкою, попадає на вольфрамові анодні кільця, чим спричиняє

виникнення Х-променів, які поширюються у напрямі до детекторів [1]. Проекційні дані у такому томографі отримуються за 50 мсек, що уможлиблює спостереження перерізів рухомих органів (наприклад, серця) без видимих артефактів.

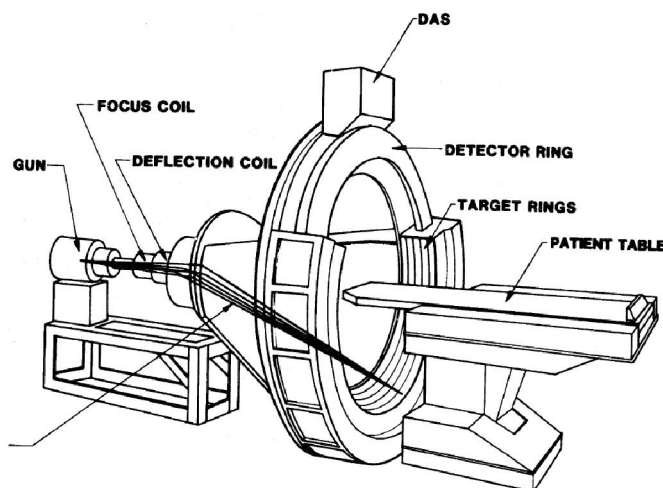


Рис. 10.6 Схема томографа п'ятого покоління (GUN — електронна пушка, FOCUS COIL — фокусуюча котушка, DEFLECTION COIL — відхиляюча котушка, DAS (detector array stationary) — стаціонарний набір детекторів, DETECTOR RING — детекторний обруч, TARGET RINGS — анодні кільця, PATIENT TABLE — стіл пацієнта)

Сучасні томографи умовно поділяють на три класи складності:

1) економ-клас — характеризується низькою вартістю, зниженими вимогами до обслуговування, енергетичного забезпечення та експлуатаційними затратами, малою площею розміщення; деякі томографи даного класу мають можливість автономної роботи;

2) високий клас — покращені якісні характеристики, висока роздільна здатність, розширені можливості обробки, вибір режимів роботи та варіантів алгоритму реконструкції, різні сервісні функції пов'язанні з зберіганням та обробкою зображень;

3) екстра-клас — досягається максимально можлива якість реконструкції, найвища роздільна здатність як за густиною, так і лінійна, можливість об'ємного (спірального) сканування, безперервний режим експлуатації, можливість обладнання паралельних робочих місць для опрацювання результатів реконструкції, можливість змінювання діаметра робочої області, кута нахилу скануючої системи, величини дози опромінення.

10.2 Алгоритми та засоби виконання реконструкції та візуалізації зображень

В комп'ютерних томографах використовуються такі обчислювальні алгоритми: зворотнього проектування, інтерполяції, цифрової фільтрації (згортка одновимірна і двовимірна, пряме і обернене одно- і двовимірне ШПФ), відображення дво- і тривимірних структур. Для реалізації цих алгоритмів використовуються такі апаратні засоби (спецпроцесори): згортки, ШПФ, зворотнього проектування та графічні процесори з можливістю відображення напівтонових тривимірних сцен, масштабування та швидкого панорамування (скролінгу) зображення й інші.

Схема отримання проекційних даних та їх обробки в томографі показана на рис. 10.7 [1].

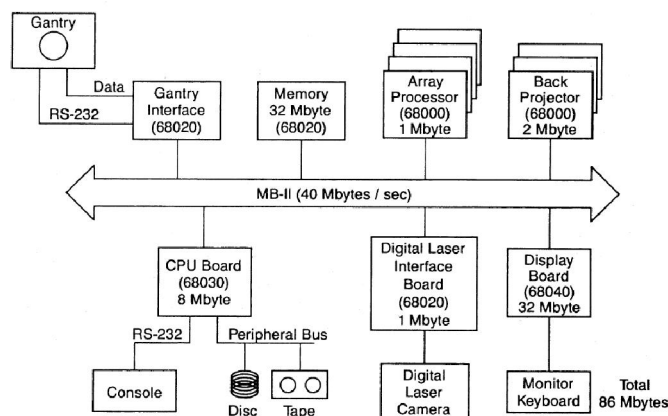


Рис. 10.7 Схема структури томографа (Gantry — гантрі, Memory — пам'ять, Array Processor — матричний процесор, CPU Board — плата центрального процесора, Digital Laser Interface Board — плата цифрового лазерного інтерфейсу, Display Board — плата дисплею, Console — пульт, Peripheral Bus — шина периферії, Digital Laser Camera — цифрова лазерна камера).

Дискретизацію даних разом з їх попередньою фільтрацією здійснюється в процесі відбору даних скануючою системою. Параметри дискретизації реалізуються кількістю детекторів, швидкістю обертання джерела Х-випромінювання та електронною схемою відбору і комутації для томографів 4-го та 5-го поколінь. Передфільтрація, потрібна для уникнення явища накладання (aliasing — *англ.*) шляхом обмеження спектру сигналу при дискретизації ($F_d \geq 2F_{\max}$), здійснюється апаратно за рахунок апертури самого детектора.

Спочатку виконується попередня фільтрація та дискретизація даних з детектора випромінювання. Дискретизація відбувається або механічно (переміщенням детектора), або електронним шляхом (комутуванням

детекторів). В Х-променевих томографах виконується нелінійне (експоненціальне) перетворення вимірних даних, перетворені дані записуються в оперативну пам'ять (ОЗУ). Реконструкція методом зворотнього проектування згорткою передбачає послідовне проведення одновимірної згортки отриманих проекцій та зворотнього проектування. Після відображення реконструйованого зображення на екрані дисплея лікар може змінити параметри алгоритму реконструкції (наприклад, параметр регуляризації α) з консолі (пульта). При цьому змінюється характеристика фільтра W_α , що використовується для згортки. Просторова характеристика фільтра згортки є результатом зворотнього перетворення Фур'є (алгоритм ШПФ) від регуляризованої частотної характеристики фільтра.

Завдяки використанню паралельних та конвеєрних алгоритмів обчислень, спеціалізованих процесорів згортки, ШПФ, графічних спецпроцесорів, спеціально розроблених для виконання операцій, необхідних при реконструкції, досягається така швидкість реконструкції, що реконструкція зображення розміром 1024 на 1024 елементи відбувається менш ніж за 1 сек.

10.3 Засоби виводу та зберігання зображень

Для відображення реконструйованих зображень використовуються напівтонові, монохромні або кольорові графічні дисплеї великого формату. Важливими параметрами для таких дисплеїв є відповідність ергономічним стандартам та вимогам безпеки для зменшення втомлюваності лікаря-оператора при аналізі зображень, стабільність параметрів для точної постановки діагнозу.

Програмне забезпечення графічного терміналу повинно давати можливість:

- а) вибору та відображення амплітудного вікна;
- б) масштабування та панорамування (збільшення частини зображення на весь екран, зменшення, швидкого переміщення області, що відображається на екрані);
- с) організації графічного курсору для вибору частини зображення, зняття точних числових характеристик вибраної ділянки зображення, повороту тривимірних сцен;
- д) уточненої реконструкції з вибраними параметрами;
- е) вводу, зберігання та відображення додаткової інформації про пацієнта;
- ф) порівняння отриманих зображень з відомими зображеннями норми та патологій;
- г) формування на екрані вікон зі службовою інформацією.

Для формування тривимірних сцен можуть використовуватись такі спеціальні апаратні засоби, як півтонові стереоскопічні дисплеї, електромеханічні дзеркала зі змінною фокусною віддаллю, стереоскопічні окуляри тощо. При цьому програмне забезпечення повинно виконувати повороти, масштабування тривимірних структур, виділення вибраної поверхні, формування перерізів, розрізів, розміщення джерел освітлення [1].

Для зручності робоче місце обладнується графічними маніпуляторами, планшетами, додатковою спеціалізованою клавіатурою.

Для тривалого зберігання (архівування) зображень використовують накопичувачі на магнітних дисках великої ємності, накопичувачі на оптичних дисках (CD-R, CD-RW), магнітооптичні накопичувачі. Обсяг інформації, що записується становить від 1 до 100 МБайт на одного пацієнта. Для можливості обміну інформацією з іншими лікувальними установами організовується підключення до спеціалізованих або універсальних глобальних комп'ютерних мереж (Internet).

Використовуються такі засоби виводу на “тверді” носії: лазерні та струменеві принтери (в т. ч. кольорові), фотопринтери та фотовивідні пристрої для виводу на слайдові плівки та фоточутливий папір.

10.4 Основні конструкторські рішення та особливості технологій томографів

Одна з основних технічних проблем томографів — забезпечення високої миттєвої потужності джерела випромінювача для зменшення часу сканування. Струм анода X-променевої трубки (рис. 10.7) в томографах (4-5)-го покоління становить в середньому 300 мА при напрузі 130 кВт, тобто,



Рис. 10.7
Джерело X-променів (х-променева трубка)

потужність, що виділяється на ньому, досягає 40 кВт. Вимагається додаткове повітряне або водяне охолодження анода, його роблять масивним, з графіту, щоб покращити тепловідведення. Але, незважаючи на

всі ці заходи, час експлуатації анода становить кілька місяців (тривалість неперервної роботи 60 000...150 000 скан-секунд). Х – променеві трубки виготовляють також металокерамічними. Така конструкція, значно підвищує їх надійність, тривалість експлуатації.

Місце на аноді, звідки потік електронів продукує Х- промінь, носить назву „фокальна пляма” (focal spot). Її розміри можуть бути (0.5-2.5) мм. Коліматором товщину Х- променя регулюють (від 1 до 10 міліметрів).

Додаткові складності викликає забезпечення обертання променя з високою швидкістю (3000 об/хв), що приводить до необхідності спеціальної струмовідвідної чи напруговідбирної конструкції (рис. 10.8, [1]).



Рис. 10.8 Фотографія ковзних, самозмащувальних кільцевих контактів в гантрі для передачі потужних і сигнальних електричних напруг і струмів

Х-променеві детектори виготовляють у вигляді компактних твердотільних систем з сцинтиляційними кристалами, які виготовлені в суцільному блоці з фотодіодами (рис. 10.9), або статичного кільця, наприклад, з кількох сотень ксенонових іонізаційних камер, розміщених одна біля одної (рис. 10.10) [1].

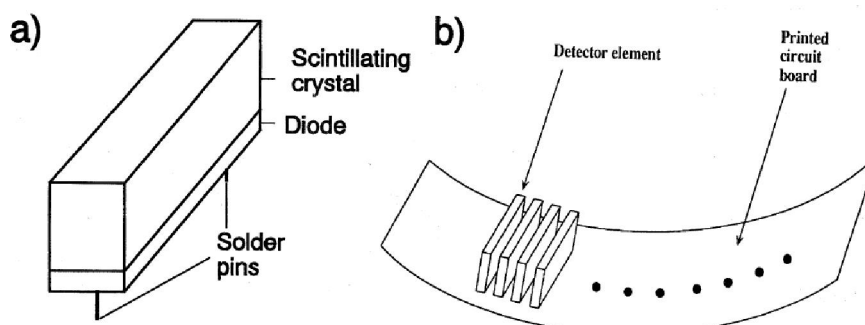


Рис. 10.9 Система твердо тільних детекторів (Solder pins — виводи для паяння, Printed circuit board — плата друкованого монтажу)

Традиційний сцинтиляційний матеріал — йодид натрію активований талієм, сучасніший — йодид цезію активований талієм, має вищий коефіцієнт корисної дії (ККД), динамічний діапазон лінійної ділянки перетворення до 10^5 - 10^7 .

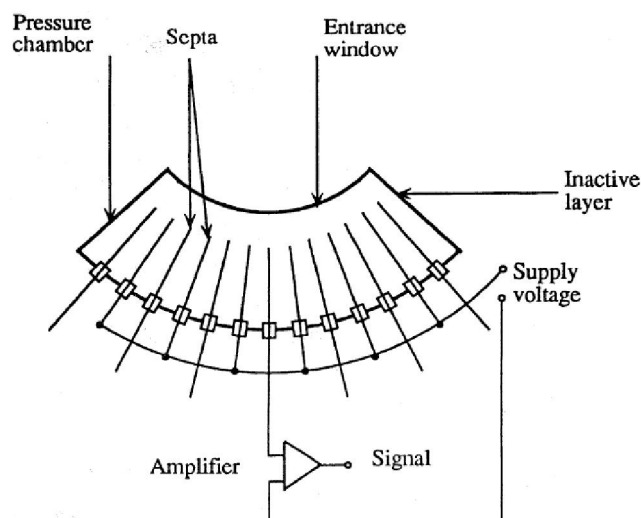


Рис. 10.10 Схема вакуумного детектора (Pressure chamber — камера високого (30 атм, ксенон) тиску, Septa — перегородка, Entrance window — вхідне вікно, Inactive layer — інертний шар, Supply voltage — напруга живлення, Amplifier — підсилювач

Типову схему відбору сигналу від детектора наведено на рис. 10.11, [1].

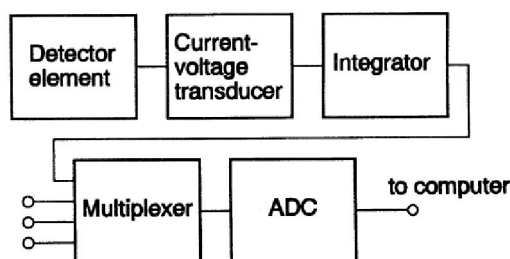


Рис. 10. Блок-схема перетворення струму детектора в цифровий код (Current-voltage transducer — перетворювач струм-напруга, ADC (Analog to digital converter) — аналого-цифровий перетворювач)

За рахунок використання сучасних теоретичних досліджень (в області математики, фізики, матеріалознавства) значно удосконалюються алгоритми реконструкції, зменшуються інтенсивність X- випромінювання, тепловиділення, підвищується ефективність детектування, зменшується вартість сканування, енергоємність, підвищується надійність, термін служби елементів та вузлів томографів.

Питання для самоперевірки

1. Наведіть загальну схему розміщення апаратури томографа.
2. Охарактеризуйте системи відбору даних в Х-променевих комп'ютерних томографах.
3. Дайте порівняльну характеристику томографів за їх поколіннями.
4. Назвіть та охарактеризуйте класи складності томографів.
5. Назвіть апаратні засоби реалізації алгоритмів реконструкції та охарактеризуйте їх.
6. Назвіть програмні засоби реалізації алгоритмів реконструкції та охарактеризуйте їх.
7. Поясніть схему обробки даних в комп'ютерному томографі.
8. Які засоби виводу та зберігання зображень Ви знаєте?
9. Назвіть основні конструкторсько-технологічні проблеми при виробництві томографів та їх вирішення.

Література до розділу 10

1. Cunningham I.A., Judi P.F. Computed Tomography. In: The Biomedical Engineering Handbook. Second Edition.- Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
2. Марусина М.Я., Казначеева А.О. Современные виды томографии. Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 132 с.

РОЗДІЛ 12

ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ КОМП'ЮТЕРНОЇ РЕКОНСТРУКТИВНОЇ ТОМОГРАФІЇ

Х-променеві комп'ютерні томографи різних класів та виробників. Характеристики типових томографів. Характеристики та параметри томографів Philips / TomoScan EG, Siemens / Somatom AR Star, Elscint / HeliCAT та Philips / Tomoscan AV P1. Фізичні поля, що використовуються для побудови томографів. Характеристика основних видів томографії та перспектив їх розвитку. Сфери застосування комп'ютерної томографії. Перспективи використання томографії в медицині. Напрями розвитку медичної томографії. Проблема зниження дози опромінення при обстеженні. Локальна томографія.

12.1 Технічні характеристики та можливості томографічних систем (фірм Siemens, Elscint, Philips, Toshiba та ін.)

Основними виробниками комп'ютерних томографів, як Х-променевих, так і магніторезонансних є такі країни: ФРН, США, Японія, Франція, Ізраїль, Голландія. У 80-х роках ХХ століття томографи вироблялись і в Радянському Союзі, багато з вузлів до них вироблялось на Україні. На даний час робляться спроби налагодити виробництво вітчизняних томографів, проте поки що Україна не входить до країн-виробників серійних томографів. Хоча досить багато фірм у світі займаються виробництвом складної медичної техніки, число основних виробників комп'ютерних томографів не більше десятка, це Siemens (ФРН), Toshiba, Mitsubishi, Shimadzu, Hitachi (Японія), Elscint (Ізраїль), Philips (Голландія), Picker, General Electric (США).

Більшість фірм випускають томографи різних класів та модифікацій, універсальні та спеціалізовані. Найбільш розповсюджені такі моделі томографів:

- економ клас:

Siemens — Somatom AR, Somatom TX, Somatom AR Star 40;
Elscint — SeleCT *¹, SeleCT SP *;
General Electric — Sytec, Synergy, Sytec SRI;
Philips — TomoScan EG*, TomoScan SR 4000;
Picker — Premier*, PQS*;
Toshiba — Xspeed, Xvision/LX

- високий клас:

Siemens — Somatom Plus 4 V. C.;
Elscint — HeliCAT*;
General Electric — ProSpeed SX;
Philips — TomoScan SR 6000;

¹ зірочкою відзначені ті моделі томографів, де використано твердотільні детектори.

Picker — PQ 5000*;
Toshiba — Xvision/EX

• екстра клас:

Siemens — Somatom Plus 4 V. A.*;
Elscint — CT Twin*;
General Electric — HiSpeed*;
Philips — TomoScan AV*;
Picker — PQ 6000V*;
Toshiba — Xpress/GX*, ASpire CI*

Основні можливості та характеристики типових томографів кожного з класів, наведені в табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Характеристики томографів

ФІРМА / МОДЕЛЬ	Philips/ TomoScan EG	Siemens/ Somatom AR Star	Elscint/ HeliCAT	Philips/ Tomoscan AV P1
1	2	3	4	5
Просторова роздільна здатність, лін/см	—	—	18	8/13
Товщина зрізу, мм	2/10	1/10	2,5	1/10
Час сканування, с	2..6	1/1,5	1	1
Теплоємність аноду, МТО	0,6(1,5) ²	1,75	2(3,5)	3,5
Кількість детекторів	384+8	1024	526+1	768+8
Кількість проєкцій на 360°	—	704	—	—
Розмір отвору гентрі, мм	600	600	700	700
Максимальна зона дослідження, мм	460	450	500	480
Максимальний струм, мА	10/50	50/155	150	200/300
Час реконструкції, с	5	2,5	—	¼
Роздільна здатність мм	—	0,45 ³	0,27	2
Роздільна здатність за густиною, %	—	0,55 ⁴	0,25	0,5
Розмір матриці (сторона квадрата)	512	512	512	512
Вартість, млн. DM	0,936 ⁵	1,674	1,290	1,7 ⁶

² корпус

³ для об'єкту діаметром 3 мм і дозі опромінення 27 мГр

⁴ високонтрастна

⁵ +0,214

⁶ +0,25

Продовження таблиці 12.1

1	2	3	4	5
Споживана потужність, кВт	6,5	5/21	30	42
Напруга аноду, кВ	120/130	130/110	120/140	100/130
Ресурс трубки, скан-секунд×1000	—	130 ⁷	—	80

Томограф виробництва голландського концерну Philips **TomoScan EG** належить до економ-класу. У рекламному проспекті фірма позиціює виріб як економічний X-променевий томограф "plug&scan", тобто максимально простий у наладці, запуску та експлуатації. Томограф вмикається у звичайну стандартну розетку живлення. Енергонезалежний: може виконати до 25 сканувань сусідніх шарів без зовнішнього електропостачання, тоді автоматично вимикається, зберігши всі дані. Збалансовані показники якості, точне позиціонування, "оптимальна" фільтрація, технологія "pre- and post patient scatter rejection array" зменшує артефакти і підвищує якість сканування при мінімальній споживаній енергії. Низька вага, мала вартість, мінімальна споживана потужність. Томограф оснащений легкою X-трубкою з пониженою дозою опромінення пацієнта та легкою гентрі. Решітка з 384 твердотільних детекторів, антирозсіююча решітка. Процесор обробки на 200 MFlops.

Томограф **Somatom AR Star** німецької фірми Siemens також позиціюється у економ-класі. Містить блок X-променевої трубки (на основі графітового композитного аноду) з детекторами, що постійно обертається. Технологія миттєвого сканування з "плаваючою фокусною плямою". Оптимальна геометрія сканера забезпечує мінімальне променеве навантаження на пацієнта і забезпечує низькоконтрастну роздільну здатність 2,5 мм (вимірювання проводились на AST-фантомі при роздільній здатності за густиною 4,5 одиниці Гаунсфілда, товщині шару 10 мм, напрузі анода 130 кВ, часі сканування 1,5 с. Гарантія на трубку, що дається фірмою, — 130000 скан-секунд при середньому напруженні на відмову 240000 скан-секунд. Система підтримує інтерфейс обміну даними DICOM 3.0. Розмір фокусної плями — 0,9×1,1 мм. Числова шкала густин -1024..+3071 одиниць Гаунсфілда. Динамічний діапазон — 1:10⁶. Для реконструкції в томографах фірми Philips використовується процесор зворотніх проекцій паралельного типу, об'єм ОЗП від 128 МБ.

Томограф високого класу **HeliCAT II** ізраїльської фірми Elscint має чотири режими роботи: надвисокої роздільної здатності, високої роздільної здатності, стандартний та мінімального шуму. Характеристики цих режимів наведені в табл. 12.2.

⁷ комплектується запасною трубкою

Таблиця 12.2

Режими роботи томографа за роздільною здатністю

Режим Параметри	надвисокої р. зд.	високої р. зд.	Стандарт- ної р. зд.	мін. шуму
Роздільна здатність, лін/см	18	14	11	—
Напруга трубки, кВ	120	120	120	120
Струм трубки, мА	150	150	150	105
Час реконструкції, с	2	2	2	—
Товщина шару, мм	2,5	2,5	10	10
FOV ⁸	25	43	43	25
Масштаб	2	2,5	1,8	—
Тип фільтра	Деталізую- чий	Деталізую- чий	Деталізую- чий	Стандарт- ний
Пікова доза, мГр	—	—	—	27

Динамічний діапазон — -1024..+3095 одиниць Гаунсфілда. Динамічна фокусуюча система фактично подвоює кількість детекторів від 512 до 1024. Швидкість збору даних — до 1100 проекцій за секунду. Можна задавати різні діаметри області сканування: 180, 250, 430, 500 мм та різні товщини шару сканування: 1; 2,5; 5; 10 мм. Технології: неперервний (не імпульсний) режим роботи під час сканування, динамічна фокусуюча система, графітовий композиційний анод, що обертається з частотою 3000 об/хв. Фокусна пляма 1,5×1,4 мм або 0,75×1,4 мм. Струм трубки 50, 100, 150, 200, 250 мА при напрузі 120 кВ. Можна вибирати одне з п'яти ядер реконструкції. Паралельний комп'ютер Elscint забезпечує 53 млн. інструкцій за секунду. Тепловиділення 0,4 кВт, система охолодження 10 кВт.

Томограф екстра-класу TOMOSCAN AV P1 виробництва Philips використовує трубку Eimac MRC-160 Maximum ROTALIX-Ro T 3001/CU 3200 з анодом діаметром 160..140 мм частота обертів 7800 об/хв. Швидкість охолодження аноду 730000 теплових одиниць/хв. -2000..4000 одиниць Гаунсфілда — динамічний діапазон. Процесор ШПФ та процесор зворотної проекції. 14 фільтрів реконструкції. Блок процесора містить багатопроцесорну систему, блок центрального процесора складається з двох 32-розрядних процесорів Motorola 68030 та Motorola 68000. Пам'ять: внутрішня на 40 МБ,

⁸ FOV — довжина поля огляду при спіральному сканування

центрального процесора на 16 МБ, буфер необроблених даних 64 МБ, відеопам'ять 4 МБ. Процесор зображень типу Rapid View з 11 цифровими сигнальними процесорами та 14 спеціалізованими логічними матрицями для алгоритму зворотнього проектування.

12.2 Проблеми та перспективи розвитку комп'ютерної томографії

Хоча комп'ютерна томографія є відносно не новим методом досліджень (перший діючий томограф був створений на початку 70-х), проте вона стрімко розвивається та впроваджується в різні галузі науки і техніки, де потрібний неруйнівний контроль внутрішніх структур об'єктів. На сьогоднішній день комп'ютерна томографія використовується в техніці, радіоастрономії, електронній мікроскопії, фізиці Землі, океану, космосу, біохімії, промисловості, та найбільшого поширення вона набула в області медичної діагностики. Зокрема, для задач медичної діагностики, найширше застосування має Х-променева томографія. Вона поки що значно випереджає за ефективністю всі інші розроблені методи, особливо в області „м'яких” Х-променів.

Значний розвиток відбувається також для методів томографії, що ґрунтуються на явищі ядерного магнітного резонансу, які мають велику потенційну перевагу — можливість одночасного вимірювання декількох різних характеристик тканин. Особливо привабливою є перспектива того, що з допомогою належним чином організованих ЯМР-вимірювань можна було б оцінювати хід процесів метаболізму. Проте швидкість формування високоякісних зображень в ЯМР-томографії ще значно нижча, ніж в Х-променевій. В медицині магніторезонансні томографи мають широкую сферу застосування за рахунок нижчої інвазивності у порівнянні з Х-променевими та можливості формування якісних зображень м'яких тканин, що погано діагностуються Х-променевими томографами. Кісткові тканини навпаки краще передаються Х-променевими томографами, тому часто ці два методи діагностики використовують спільно, доповнюючи інформацію отриману з Х-променевих та магніторезонансних томографічних зображень.

В ультразвуковій комп'ютерній томографії принципова задача залишається тою ж, що і в Х-променевій, — отримати зображення поперечних січень, що містять детальні кількісні характеристики організму. Однак на відміну від Х-променевої томографії, отримання зображень з допомогою ультразвуку ускладнюється тим, що промені звукової енергії не обов'язково розповсюджуються по прямим лініях. Вони можуть значно заломлюватись на границі розділу твердих і м'яких тканин. Тому ультразвукова томографія в найближчому майбутньому буде використовуватись виключно для дослідження тих частин організму, що не містять кісткових тканин. Зокрема, основною областю використання ультразвукової томографії стало діагностування пухлин молочної залози.

Систематизацій різноманітних фізичних принципів, на основі яких вже здійснюється, або може здійснюватися в майбутньому комп'ютерна реконструктивна томографія, вони зведені в табл. 12.3 [1].

Таблиця 12.3

Фізичні поля, які використовуються, або могли б знайти успішне використання в томографічних системах різного призначення

Фізичне поле	Фізична величина	Перетворювачі	Область використання
1	2	3	4
Х-промені	Коефіцієнти ослаблення Х-променів	Джерела Х-променів; сцинтиляційні детектори	Медична діагностика (МД), неруйнівний контроль (НРК), огляд поштових відправлень і багажу
Гамма-промені від помічених радіоактивною міткою речовин, що вводяться в організм з їжею або шляхом ін'єкції	Концентрація речовини з ізотопною міткою	Сцинтиляційні детектори	МД, ядерна медицина
Х- і гамма-випромінювання, що пройшло комптонівське розсіювання	Електронна густина або розподіл атомного номера	Джерела Х-променів; сцинтиляційні детектори	МД, НРК, Х-променева кристалографія
Важкі частинки: піни, альфа-частинки, протони і т. д.	Січення розсіювання/поглинання	Лінійні прискорювачі, блоки детекторів	МД, НРК
Електронні (хвильові пучки)	Розподіл потенціалу Шредінгера	Електронні пучки; плівки; фотопомножувач	Мікроскопія “слабких” зразків

Продовження таблиці 12.3

1	2	3	4
Ультразвук; сейсмічні і акустичні хвилі	Ослаблення; показник заломлення; зміна акустичного імпедансу	Будь-який електромеханічни й перетворювач	МД, НРК, сейсмо- розвідка
Низькочастотні електричні струми	Розподіл електропровід- ності	Електроди	Візуалізація крово- носних судин, геологорозвідка, НРК
Магнітні поля	Розподіл ядерних спінів, потік крові	(Електро)магніти; високочастотні катушки; рамкові, дипольні, рупорні та ін. антени	ЯМР, магнітогідродина- міка
Високочастотні (ВЧ) і НВЧ-поля	Електронні спіни; розподіл діелектричної проникності і провідності	Конденсатори; катушки; рамкові, дипольні, рупорні та ін. антени	ЯМР, картування розподілу ді- електричної про- никності і провід- ності (на ВЧ і НВЧ)
Просторово- ненкогерентне електромагнітне випромінюванн я від НВЧ до м'якого Х-ви- промінювання	Об'ємний розподіл температури; розподіл яскравості космічних джерел	Рупорні та ін. антени; радіо-, інфрачервоні, оптичні, ультра- фіолетові і Х- променеві телескопи	Картування роз- поділу температу- ри всередині тіла людини і інших об'єктів; синтез зо- бражень в астрономії

Розвиток комп'ютерної техніки не міг не відбитись на розвитку такого її практичного застосування, як комп'ютерна томографія. При цьому із появою нових поколінь процесорів, зростанням швидкодії, об'ємів пам'яті комп'ютерів, з'являються нові покоління промислових томографів, що реалізують ефективні алгоритми реконструкції і розширюють область застосувань томографії на нові клінічні використання. Це дозволяє діагностувати все ширше коло патологій, проводити масові обстеження для їх ранньої діагностики [2].

Розширення сфери використання комп'ютерної томографії на нові області медичної діагностики неможливе без нових технічних рішень, спрямованих на подолання недоліків існуючих томографічних систем. Розглянемо докладніше основні з цих недоліків та способи їх подолання.

Сучасні медичні томографи випускаються багатьма фірмами світу, найвідоміші з яких: Siemens (Німеччина), Picker, General Electric (США), Elscint

(Ізраїль), Philips (Нідерланди), Toshiba, Sanyo, Shimadzu, Hitachi (Японія). Як правило, усі вони мають універсальне призначення (для діагностики всього тіла). Технічні характеристики у всіх таких томографів є приблизно аналогічними: зменшення часу сканування досягається за рахунок збільшення потужності випромінювання, що значно збільшує дозу опромінення пацієнта при проведенні діагностичної процедури.

Основні технічні рішення, що використовуються в універсальних томографах, спрямовані на розширення сфери медичних застосувань такого томографа, включення додаткових сервісних функцій, можливостей архівування та документування отриманих діагностичних зображень тощо. Все це приводить до значної вартості універсального томографа (близько 1 млн. доларів США), тому використання таких універсальних томографів є економічно вигідним лише у великих клініках. Враховуючи високу завантаженість, велику кількість пацієнтів, використання таких томографів для масової діагностики, наприклад, для діагностування стану опорно-рухового апарату на початкових стадіях патології чи травми, є проблемним, оскільки такий випадок досить специфічним (локальним).

В універсальній томографії проблему локалізації частково вирішують „локалізуючою” обробкою проєкційних даних (наприклад, за алгоритмами 3D-rendering, див табл. 11.1). Проте вирішити її можна, розділивши томографи за клініками шляхом побудови спеціалізованих, локальних томографів, призначених для діагностування окремого органу, чи навіть окремої патології. Вузька спеціалізація такого томографа, значне врахування апіорної інформації про характеристики досліджуваного біооб'єкта уможливить, підібравши оптимальні по відношенню до нього варіанти алгоритму, функції та параметри регуляризації тощо, отримати якісні зображення при мінімальних дозах опромінення.

На прикладі томографії голови, де використовуються спеціалізовані томографи, точність реконструкції в таких томографах в 2–2,5 рази вища, ніж в томографах універсальних, призначених для томографії всього тіла [3]. Крім того, що спеціалізовані локальні томографи забезпечують вищу точність, вони мають ще ряд інших переваг над універсальними томографами всього тіла, основні з яких зведені у табл. 12.4.

З точки зору потреби зниження інвазивності при проведенні діагностування, яка відбиває основний принцип медицини "не нашкодь", основною перевагою спеціалізованих локальних томографів є нижча доза опромінення пацієнта. Отже, основною задачею при проектуванні локальних томографів, розробці методів та алгоритмів реконструкції слід приділити питанню зниження інтенсивності енергії Х-випромінювання, що використовується при отриманні проєкційних даних.

Важливою проблемою в Х-променевої томографії поряд із зменшенням дози опромінення залишається енергетична: значна електрична споживана потужність томографа та відповідно проблема відведення великої кількості

тепла від анода. Разом із потребою переміщувати масивне джерело випромінювання при скануванні проблема тепловідведення від цього джерела приводить до того, що час служби джерела Х-променів становить кілька місяців, тобто основний внесок у вартість експлуатації робить заміна джерела випромінювання.

Таблиця 12.4

Переваги при використанні локальних томографів

Універсальний томограф (недоліки)	Локальний, спеціалізований томограф (переваги)
Висока вартість (близько \$1 000 000 US)	Вартість менша мінімум на порядок
Високі експлуатаційні затрати (навчання персоналу, технічне обслуговування, заміна деталей).	Простіший та дешевший в експлуатації
Стаціонарність	Портабельність
Великі габарити	Компактний
Значне тепловиділення	Зменшене тепловиділення
Висока доза опромінення персоналу та пацієнта (27 мГр)	Зменшення дози опромінення за рахунок врахування апіорної інформації про об'єкт діагностики
Фіксована точність реконструкції	Точність підвищена за рахунок корекції проекційних даних та використання оптимізмційних процедур реконструкції
Може використовуватись лише у великих медичних центрах	Можлива експлуатація медперсоналом, лікарем—спеціалістом

Для збільшення часу роботи джерела використовується додаткове повітряне або водяне охолодження, збільшення теплоємності анода, робота випромінювача в імпульсному режимі, обмеження часу неперервного сканування тощо. Проте кардинальним рішенням є використання нових матеріалів, перш за все — підвищення ефективності детекторів Х-випромінювання. Так, якщо замість газонаповнених іонізаційних камер використовуються компактні твердотільні детектори зі сцинтиляційними кристалами, зчепленими з фотодіодами, то за рахунок вищої ефективності таких давачів (вищий ККД), термін служби Х-трубки збільшується приблизно вдвічі. При цьому можна майже вдвічі зменшити теплоємність анода, значно знижується споживана потужність томографа в цілому, і, що найважливіше, зменшується доза опромінення пацієнта при аналогічних параметрах якості зображення. Твердотільні детектори використовуються у томографах SeleCT, SeleCT SP, HeliCAT, ST Twin фірми Elscint; Premier, PQS, PQ 6000 V фірми Picker та томографах екстра-класу деяких інших фірм.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть переваги локальної томографії.
2. Наведіть приклади фізичних полів, які можна використати для побудови томографа.
3. Назвіть приклади фізичних полів, які знайшли застосування при побудові томографів.
4. Охарактеризуйте тенденції розвитку томографії.
5. Наведіть небезпечні для пацієнта властивості томографів.

Література до розділу 12

1. Реконструктивная томография: Современные достижения и перспективы развития / Р. Х. Т. Бейтс, К. Л. Гарден, Т. М. Петерс // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 84–104.
2. Применение реконструктивной вычислительной томографии в рентгенодиагностике / Л. Аксел, П. Х. Аджер, Р. А. Зиммерман // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 8–13.
3. Технические средства рентгенодиагностики / Под ред. Переелегина. — М.: Медицина, 1980

ЛІТЕРАТУРА

1. Яворський Б. І. Введення в спеціальність. — Тернопіль: ТДТУ, 1999.— 32 с.
2. Основы ЯМР- визуализации: от уравнения Блоха к уравнению визуализации / У. С. Хиншо, А. Х. Лент // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 63–78.
3. Однофотонная эмиссионная реконструктивная вычислительная томография / Г. Ф. Нолл // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 43–53.
4. Каган М. Томография костей и суставов. — М.: Медицина, 1964, — 253 С.
5. Реконструктивная вычислительная томография (тематический выпуск): обзор номера / Г. К. Хермен // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 5–7.
6. Троицкий И. Н. Статическая теория томографии. — М.: Радио и связь, 1989.— 240 с.
7. Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения.— М.: Госатомиздат, 1963.
8. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 231 с.
9. Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований / Р. М. Луитт // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 125–147.
10. Методы реконструкции изображений, основанные на разложении в конечные ряды / Я. Ценсор // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71. — С. 148–160.
11. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии. — М.: Наука, 1987. — 158 с.
12. Справочник по рентгенологии и радиологии / Составитель Л. М. Фрейдман. — М.: Медицина, 1972.
13. Михайлов А. Н. Справочник по рентгенодиагностике. — Минск: Беларусь, 1980.
14. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften.— Math.–Phys. Kl. — Leipzig, 1917. — Vol. 69. — P. 262–277.
15. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 288 с.
16. Физические проблемы реконструктивной томографии / А. Маковски // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 104–111.
17. Математические проблемы реконструктивной томографии / А. К. Луисс, Ф. Наттерер // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 111–125.
18. Теорія електричного зв'язку. Ч. 1. / Під ред. В. О. Омельченка. — К.: ІСДО, 1994. — 304 с.

- 19.Яворський Б.І. Математичні основи радіоелектроніки. Ч. 1. — Тернопіль: ТПІ, 1996. — 183 с.
- 20.Рафа Т.М. Процесор "згортки" для реконструкції томографічних зображень // Природничі і гуманітарні науки. Актуальні питання. Тези доповіді студентської наукової конференції, присвяченої 150-річчю з дня народження Івана Пулюя. — Тернопіль, 1995, с. 101.
- 21.Рафа Т.М. Спецпроцесор згортки для комп'ютерної томографії колінного суглоба // Збірник тез кращих студентських робіт за підсумками 1 обласного конкурсу студентських науково-дослідних, творчих, пошукових робіт 1994 — 1995 років. — Тернопіль, 1995, с. 50-51.
- 22.Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 488 с.
- 23.Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. — М.: Сов. радио, 1973.
- 24.Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применения цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.
- 25.Кэк А. С. Машинная томография с использованием рентгеновского излучения, радиоактивных изотопов и ультразвука // ТИИЭР, т. 67, № 9, 1979. — С. 79-107.
- 26.Рентгентехника: Справочник: В 2 кн. / Под редакцией В.В. Ключева. — М.: Машиностроение, 1980. — Кн. 2. — 383 с.
- 27.Отображение информации о трехмерных дискретных сценах, полученной методом реконструктивной вычислительной томографии / Дж. К. Удупа // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 160–171.
- 28.Новейшие технологии в лучевой диагностике. — Режим доступа: http://www.rpcmr.org.ru/momr/momr_newtech_rct.htm .- Заголовок з екрану.
- 29.Ультразвуковая реконструктивная томография / Дж. Ф. Гринлиф // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 54–63.
- 30.Реконструктивная томография: Современные достижения и перспективы развития / Р. Х. Т. Бейтс, К. Л. Гарден, Т. М. Петерс // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 84–104.
- 31.Применение реконструктивной вычислительной томографии в рентгенодиагностике / Л. Аксел, П. Х. Аджер, Р. А. Зиммерман // ТИИЭР: Пер. с англ. — 1983. — Т. 71, №3. — С. 8–13.
- 32.Технические средства рентгенодиагностики / Под ред. Переелегина. — М.: Медицина, 1980