Пелех Р., Лучко Й. Двосторонні методи розв'язування задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 2. — С. 136-142. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 519.62

Р. Пелех[1] ; Й. Лучко[2], докт.техн.наук

[1]Проектно-конструкторське технологічне бюро АСУ залізничного транспорту, м. Львів
[2]Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна

ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА

Запропоновано двосторонні формули розв'язання задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра. Ці формули дозволяють в кожній вузловій точці отримувати не тільки верхні та нижні наближення до точного розв'язку, але й давати інформацію про величину головного члена похибки без додаткових звертань до правої частини інтегро-диференціального рівняння Вольтерра.

***Ключові слова:** двосторонні методи, задача Коші, інтегро-диференціальне рівняння Вольтера.*

R. Pelekh, J. Luchko

TWO-SIDE METHODS FOR THE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The two-side formulas for the solving of nonlinear Volterra integro-diffefential equations are constructed. The formulas give an opportunity to reseive upper and lover approximation at eath point to the exact solution and define the value to the main error without referring to the right part of Volterra integro-differential equation.

***Key worlds:** two-side methods, Cauchy problem, Volterra integro-differential equation.*

Актуальність проблеми. Багато прикладних задач, зокрема розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (стержнів, пластин, оболонок) у загальному випадку зводяться до розв'язання нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

При розв'язуванні таких задач важливо, щоб основні властивості розв'язку добре відображались наближеними методами. В прикладній математиці широкого застосування набули дробово-раціональні наближення, які при відповідних умовах дають високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, мають слабку чутливість до похибок заокруглень, вірно відображають основні властивості розв'язків досліджуваних задач [1-3].

Постановка задачі. Розглянемо на відрізку $I_L:[x_0, x_0+L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)ds]\right], \qquad (1)$$

$$u(x_0) = u_0,\ x \in [x_0, x_0+L]. \qquad (2)$$

Припустимо, що розв'язок (1), (2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю. Зауважимо, що рівняння (1) можна перетворити в еквівалентну систему

$$u'(x) = F[x, u(x), z(x)],$$

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]ds. \tag{3}$$

Пропонуються обчислювальні схеми, які дають можливість на кожному кроці інтегрування отримувати двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)-(2).

Ці двосторонні формули будуються так, щоб локальні похибки схеми в кожній вузловій точці мали вигляд:

$$|u(x_{n+1}) - u_{n+1}| = \omega h^p K\Phi_n(F) + O(h^{p+1}),$$

де $u(x_{n+1})$ і u_{n+1} - відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1)-(2), h- крок інтегрування, $\Phi_n(F)$ – деякий диференціальний оператор, обчислений в точці (x_n, y_n), K – константа, p – порядок точності, ω - параметр двосторонності.

За допомогою параметрів ω і h досягається двосторонність і необхідна точність на всьому інтервалі інтегрування.

Побудова двосторонніх алгоритмів. На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів та теорію побудови методів Рунге-Кутта [4], наближений розв'язок задачі (1), (2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді неперервного дробу [5,6]:

$$u_1 = \frac{P_{[k,l]}}{Q_{[k,l]}} = \cfrac{c_0}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + d_{k,l}}}}. \tag{4}$$

При $k + l = 2$ $(k = 1,2; l = 0,1)$

$$c_0 = u_0,\ d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0},\ d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0},\ d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2}, \tag{5}$$

$$\delta_1 = a_{11}hk_1,\ \delta_2 = h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2),\ k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h_1, u_0, 0],$$

$$k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{21}hk_1, \gamma_{21}K_1],\ K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma hk_1],$$

де a_{11}, a_{21}, a_{22}, α, α_1, α_2, β, β_{21}, γ – невідомі поки що параметри.

Розвинення розв'язку задачі (1)-(2) в ряд Тейлора в околі точки x_0 має вигляд:

$$\begin{aligned} u(x_0 + h) &= u(x_0) + h(F)_0 + \frac{1}{2}h^2\{(F_x)_0 + (F_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g)_0\} + \\ &+ \frac{h^3}{6}\{(F_{xx})_0 + 2(F_{xu})_0(F)_0 + (F_{uu})_0(F^2)_0 + (F_x)_0 \times \\ &\times (F_u)_0 + (F_{zz})_0(g^2)_0 + 2(F_{xz})_0(g)_0 + \\ &+ 2(F_{uz})_0(F)_0(g)_0 + 2(F_z)_0(g_x)_0 + (F_z)_0(g_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g_s)_0 + \\ &+ (F_u^2)_0(F)_0 + (F_u)_0(F_z)_0(g)_0\} + O(h^4). \end{aligned} \tag{6}$$

Розглянемо формули (4) і (5) при $k = 1$, $l = 1$:

$$u_1^{[1,1]} = \frac{u_0}{1 - \dfrac{h\dfrac{a_{11}k_1}{u_0}}{1 + \dfrac{ha_{11}^2k_1^2 - u_0(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)}{u_0 a_{11} k_1}}}, \tag{7}$$

$$k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h, u_0, 0], \qquad k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, u_0 + \beta_{21} h k_1, \gamma_{21} K_1],$$
$$K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma h k_1]. \tag{8}$$

Невідомі параметри a_{ij}, α_j $(i = 1,2; j = 1,2)$, β_{21}, γ_{21}, α, β, γ виберемо з умови, щоб

$$R_{[1,1]} = |u(x_0 + h) - u_1| = \omega h^2 \Phi_0(F) + O(h^3).$$

Для цього спочатку перетворимо формулу (7) до вигляду

$$u_1^{[1,1]} = u_0 + \frac{ha_{11}^2 k_1^2}{(a_{11} - a_{21})k_1 - a_{22}k_2} = u_0 + \frac{P_{[1,1]}}{Q_{[1,1]}}, \tag{9}$$

де

$$P_{[1,1]} = a_{11}^2 \Big\{ h(F^2)_0 + 2\alpha_1 h^2 (F)_0 (F_x)_0 + \\ + h^3\left(\alpha_1^2 (F_x)_0 + \alpha_1^2 (F)_0 (F_{xx})_0\right) + O(h^4)\Big\}. \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
Q_{[1,1]} &= (a_{11} - a_{21})k_1 - a_{22}k_2 = (a_{11} - a_{21} - a_{22})(F)_0 + \\
&+ h\{[(a_{11} - a_{21})\alpha_1 - a_{22}\alpha_2](F_x)_0 - a_{22}\beta_{21}(F_u)_0(F)_0 - \\
&- a_{22}\gamma_{21}(F_z)_0(g)_0\} + h^2\left\{\left[(a_{11} - a_{21})\frac{\alpha_1^2}{2} - a_{22}\frac{\alpha_2^2}{2}\right](F_{xx})_0 - \right.\\
&- \frac{1}{2}a_{22}\beta_{21}^2(F_{uu})_0(F)_0^2 - \frac{1}{2}a_{22}\gamma_{21}^2(F_{zz})_0(g^2)_0 - \frac{1}{2}a_{22}\alpha_2\beta_{21}(F_{xu})_0(F)_0 - \\
&- \frac{1}{2}a_{22}\alpha_2\gamma_{21}(F_{xz})_0(g)_0 - a_{22}\beta_{21}\gamma_{21}(F_{uz})_0(g)_0 - a_{22}\beta_{21}\alpha_1(F_x)_0(F_u)_0 - \\
&- a_{22}\gamma_{21}\alpha(F_z)_0(g_x)_0 - a_{22}\gamma_{21}\gamma(F_z)_0(g_u)_0(F)_0 - \\
&\left. - a_{22}\gamma_{21}\beta(F_z)_0(g_s)_0 \right\} + O(h^3).
\end{aligned} \tag{11}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} &= \frac{1}{Q_{[1,1]}}\Big(h(F)_0^2\left[a_{11} - a_{21} - a_{22} - a_{11}^2\right] + h^2\big[(a_{11} - a_{21})\alpha_1 - a_{22}\alpha_2 + \\
&+ \frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} - a_{22}) - 2\alpha_1 a_{11}^2\big](F)_0(F_x)_0 + h^2\left[\frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} - a_{22}) - a_{22}\beta_{21}\right]\times \\
&\times (F)_0(F_u)_0 + h^2\left[\frac{1}{2}(a_{11} - a_{21} - a_{22}) - a_{22}\gamma_{21}\right](F)_0(F_z)_0(g)_0 + \\
&+ h^3\left\{\left[\frac{1}{6} + (a_{11} - a_{21})\frac{\alpha_1^2}{2} - a_{22}\frac{\alpha_2^2}{2}\right](F_{xx})_0 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}a_{22}\beta_{21}^2\right)(F_{uu})_0(F)_0 + \right.\\
&+ \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}a_{22}\gamma_{21}^2\right)(F_{zz})_0(g)_0 + \left(\frac{1}{3} - a_{22}\alpha_2\beta_{21}\right)(F_{xu})_0(F)_0 + \\
&+ \left(\frac{1}{3} - a_{22}\alpha_2\gamma_{21}\right)(F_{xz})_0(g)_0 + \left(\frac{1}{3} - a_{22}\beta_{21}\gamma_{21}\right)(F_{uz})_0(F)_0(g)_0 +
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{6}-a_{22}\alpha_1\beta_{21}\right)(F_x)_0(F_u)_0+\left(\frac{1}{3}-a_{22}\alpha\gamma_{21}\right)(F_z)_0(g_x)_0+$$
$$+\left(\frac{1}{6}-a_{22}\gamma_{21}\gamma\right)(F_z)_0(F)_0(g_u)+\left(\frac{1}{6}-a_{22}\gamma_{21}\beta\right)(F_z)_0(g_s)_0+$$
$$+\frac{1}{6}(F_u^2)_0(F)_0+\frac{1}{6}(F_u)_0(F_z)_0(g)_0+\frac{1}{2}u''(x_0)([(a_{11}-a_{21})\alpha_1-a_{22}\alpha_2](F_x)_0-$$
$$-a_{22}\beta_{21}(F)_0(F_u)_0-a_{22}\gamma_{21}(F_z)_0(g)_0)-a_{11}^2\alpha_1^2[(F_x)_0+(F)_0(F_{xx})_0]\}+O(h^4)).$$

Випишемо вирази для коефіцієнтів чисельника при степенях h і h^2:

$h(F)_0^2$: $\quad a_{11}-a_{21}-a_{22}-a_{11}^2$

$h^2(F)_0(F_x)_0$: $\quad (a_{11}-a_{21})\alpha_1-a_{22}\alpha_2+\frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-2a_{11}^2\alpha_1$

$h^2(F)_0(F_u)_0$: $\quad \frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-a_{22}\beta_{21}$

$h^2(F)_0(F_z)_0(g)_0$: $\quad \frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-a_{22}\gamma_{21}$.

Якщо прирівняти коефіцієнт при $h(F)_0^2$ до нуля, а вирази при $h^2(F)_0(F_x)_0$, $h^2(F)_0(F_u)_0$, $h^2(F)_0(F_z)_0(g)_0$ відповідно до ω_1,ω_2 і ω_3, то отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}-a_{21}-a_{22}-a_{11}^2=0 \\ (a_{11}-a_{21})\alpha_1-a_{22}\alpha_2+\frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-2a_{11}^2\alpha_1=\omega_1 \\ \frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-a_{22}\beta_{21}=\omega_2 \\ \frac{1}{2}(a_{11}-a_{21}-a_{22})-a_{22}\gamma_{21}=\omega_3. \end{cases} \tag{12}$$

При цьому локальна похибка матиме вигляд:

$$R_{[1,1]}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=u(x_0+h)-u_1^{[1,1]}=$$
$$\{\omega_1h^2(F)_0(F)_x+\omega_2h^2(F)_0(F_u)_0+\omega_3h^2(F)_0(F_z)(g)_0+O(h^3)\}/Q_{[1,1]}.$$

Оскільки α, β, γ не входить в систему (12), то їх можна вибрати довільними, наприклад, покласти $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Система рівнянь (12) значно спроститься, якщо покласти $a_{11}=1$, і набуде наступного вигляду:

$$\begin{cases} a_{21}+a_{22}=0 \\ (1-a_{21})\alpha_1-a_{22}\alpha_2+\frac{1}{2}-2\alpha_1=\omega_1 \\ \frac{1}{2}-a_{22}\beta_{21}=\omega_2 \\ \frac{1}{2}-a_{22}\gamma_{21}=\omega_3. \end{cases} \tag{13}$$

Розглянемо конкретні випадки розв'язків системи (13):

1. Якщо покласти $\omega_1=\omega$, а $\omega_2=\omega_3=0$, то отримаємо два сімейства розв'язків:

1а). $a_{11}=1$, $a_{21}=-a_{22}$, $a_{22}=\dfrac{1}{2\beta_{21}}$, $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{(1-2\omega)}{2}$, $\gamma_{21}=\beta_{21}$, де β_{21} - відмінний від нуля параметр.

1б). $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\beta_{21}}$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_{21}(1 - 2\alpha_1 - 2\omega)$, $\gamma_{21} = \beta_{21}$,

де β_{21} $(\beta_{21} \neq 0)$- параметр. Локальна похибка тоді має вигляд:

$$R_{[1,1]}(\omega_1 = \omega) = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \{\omega h^2 (F)_0 (F)_x + O(h^3)\} / Q_{[1,1]}.$$

2. У випадку, якщо $\omega_2 = \omega$, а $\omega_1 = \omega_3 = 0$, то отримаємо такі розв'язки:

2а). $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\gamma_{21}}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, $\beta_{21} = (1 - 2\omega)\gamma_{21}$,

де γ_{21} - відмінний від нуля параметр.

2б). $a_{11} = 1$ $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\gamma_{21}}$, $\alpha_2 = \alpha_1 + (1 - 2\alpha_1)\gamma_{21}$, $\beta_{21} = (1 - 2\omega)\gamma_{21}$,

де $\alpha_1, \gamma_{21}(\gamma_{21} \neq 0)$ - параметри. Тоді

$$R_{[1,1]}(\omega_2 = \omega) = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \{\omega h^2 (F)_0 (F_u)_0 + O(h^3)\} / Q_{[1,1]}.$$

3. Якщо $\omega_3 = \omega$, а $\omega_2 = \omega_3 = 0$, то маємо наступну множину розв'язків:

3а). $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\beta_{21}}$, $\gamma_{21} = (1 - 2\omega)\beta_{21}$,

де β_{21} - відмінний від нуля параметр.

3б). $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\beta_{21}}$, $\gamma_{21} = (1 - 2\omega)\beta_{21}$,

де $\alpha_1, \beta_{21}(\beta_{21} \neq 0)$ - параметри. При цих параметрах

$$R_{[1,1]}(\omega_3 = \omega) = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \{\omega h^2 (F)_0 (F_z)(g)_0 + O(h^3)\} / Q_{[1,1]}.$$

4. При $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ і $\omega_3 = 0$, отримаємо таке сімейство розв'язків:

4а). $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1 - 2\omega}{2}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\gamma_{21}}$, $\beta_{21} = (1 - 2\omega)\gamma_{21}$,

де β_{21} - відмінний від нуля параметр.

4б). $\alpha_2 = \alpha_1 + (1 - 2\alpha_1 - 2\omega)\gamma_{21}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\gamma_{21}}$, $\beta_{21} = (1 - 2\omega)\gamma_{21}$,

де $\alpha_1, \gamma_{21}(\gamma_{21} \neq 0)$ - параметри. Локальна похибка має вигляд:

$$R_{[1,1]}(\omega_1 = \omega_2 = \omega) = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = \{\omega h^2 [(F)_0 (F)_x + (F)_0 (F_u)_0] + O(h^3)\} / Q_{[1,1]}.$$

5. Якщо ж $\omega_1 = \omega_3 = \omega$ і $\omega_2 = 0$, то матимемо таку множину розв'язків:

5а). $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1 - 2\omega}{2}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\beta_{21}}$, $\gamma_{21} = (1 - 2\omega)\beta_{21}$,

де β_{21} - відмінний від нуля параметр.

5б). $\alpha_2 = \alpha_1 + (1 - 2\alpha_1 - 2\omega)\beta_{21}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1}{2\beta_{21}}$, $\gamma_{21} = (1 - 2\omega)\beta_{21}$,

де $\alpha_1, \beta_{21}(\beta_{21} \neq 0)$ - параметри. У цьому випадку

$$R_{[1,1]}(\omega_1 = \omega_3 = \omega) = \{\omega h^2 [(F)_0 (F)_x + (F)_0 (F_z)(g)_0] + O(h^3)\} / Q_{[1,1]}.$$

6. Поклавши $\omega_2 = \omega_3 = \omega$ і $\omega_1 = 0$, отримаємо наступні розв'язки:

6а). $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{22} = \dfrac{1 - 2\omega}{2\beta_{21}}$, $\gamma_{21} = \beta_{21}$,

де β_{21} - відмінний від нуля параметр.

6б). $\alpha_2 = \alpha_1 + \dfrac{(1-\alpha_1)}{(1-2\omega)}\beta_{21}, \quad a_{11} = 1, \quad a_{21} = -a_{22}, \quad a_{22} = \dfrac{1-2\omega}{2\beta_{21}}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21},$

де $\alpha_1, \beta_{21}(\beta_{21} \neq 0)$ - параметри. При цих значеннях параметрів

$$R_{[1,1]}(\omega_2 = \omega_3 = \omega) = \{\omega h^2[(F)_0(F_u)_0 + (F)_0(F_z)(g)_0] + O(h^3)\}/Q_{[1,1]}.$$

Зауваження 1. У формулах із 6а) параметри $\alpha_1, \alpha_2, \beta_{21}, \gamma_{21}$ не містять ω. А це означає, що розрахункові формули (7)-(8) при цих параметрах дозволяють отримувати верхні та нижні наближення до точного розв'язку задачі (1)-(2) без додаткових звертань до правої частини рівняння (1).

7. У випадку, якщо $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$, то маємо наступні дві множини розв'язків:

7а). $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1-2\omega}{2}, \ a_{11} = 1, \quad a_{21} = -a_{22}, \quad a_{22} = \dfrac{1-2\omega}{2\beta_{21}}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21},$

де β_{21} - відмінний від нуля параметр.

7б). $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_{21} - \dfrac{2\alpha_1\beta_{21}}{1-2\omega}, \ a_{11} = 1, \quad a_{21} = -a_{22}, \quad a_{22} = \dfrac{1-2\omega}{2\beta_{21}}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21},$

де $\alpha_1, \beta_{21}(\beta_{21} \neq 0)$ - параметри. При цьому

$$R_{[1,1]}(\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega) =$$
$$\{\omega h^2[(F)_0(F)_x + (F)_0(F_u)_0 + (F)_0(F_z)(g)_0] + O(h^3)\}/Q_{[1,1]} \cong \omega h^2 u''(x_0) + 0(h^3).$$

Зауваження 2. Якщо у формулах 7б) покласти $\alpha_1 = 0$, то отримаємо наступний набір параметрів:

$$\alpha_2 = \beta_{21}, \quad a_{11} = 1, \quad a_{21} = -a_{22}, \quad a_{22} = \frac{1-2\omega}{2\beta_{21}}, \quad \gamma_{21} = \beta_{21}, \ (\beta_{21} \neq 0),$$

тобто можна отримувати двосторонні наближення без додаткових звертань до правої частини вихідного рівняння. Більше того, оцінку похибки можна знайти, використовуючи вже пораховані значення k_1, k_2, K_1.

Отже, запропоновано розрахункові формули, які дозволяють знаходити наближене значення задачі (1)-(2) в точці x_1. Для знаходження наближень у наступних точках $x_n(n \geq 2)$ користуємося способом рухомого початку. Представивши рівняння (1) у вигляді

$$u'(x) = F[x, u(x), w_n(x) + W(x)],$$

де

$$w_n(x) = \int_{x_0}^{x_n} g(x, s, u(s))ds, \ W(x) = \int_{x_n}^{x} g(x, s, u(s))ds,$$

отримаємо задачу з новим початком інтегрування (x_n), для розв'язування якої використовуються формули виду (7)-(8), причому наближення до $w_n(x)$ знаходимо за допомогою двосторонніх квадратурних формул.

Пари формул, що відповідають двом значенням ω, які відрізняються лише знаком, складають формули двостороннього методу, оскільки одна з них дає верхнє, а друга – нижнє наближення до точного розв'язку задачі (1). За найближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень.

Модульний характер запропонованих методів дає можливість в кожній точці інтегрування отримати кілька наближень до точного розв'язку.

Висновки. Виведено двосторонні розрахункові формули розв'язання задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь, що базуються на неперервних дробах. При відповідних значеннях параметрів можна отримувати верхні та нижні наближення до точного розв'язку рівняння (1) без додаткових звертань до правої частини цього рівняння.

Література

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. Обобщения и приложения. - М. : Мир, 1986. – 502 с.
2. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. - М.: Мир, 1985. – 416 с.
3. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике, - М.: Наука, 1983. – 312 с.
4. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений - М.: Мир, 1979. – 312 с.
5. Лучко Й.Й., Пелех Р.Я .Числові методи розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. - 2007. - Випуск 9. - С. 108-114.
6. Лучко Й.Й.,Пелех Р.Я. Двосторонні методи розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь // Вісник Тернопільського державного технічного університету. - 2007. - Т. 12, № 3. - С. 165-175.

Одержано 10.04.2009 р.