

УДК 519.217

М. Приймак, докт.техн.наук; С. Прошин

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

## ЕЛЕМЕНТИ ОДНОРІДНОСТІ ДЛЯ ПЕРІОДИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

Наведено означення періодичного ланцюга Маркова та висвітлено, що цей клас немає нічого спільного із ланцюгами, які хоча і мають таку ж назву – періодичні, але є лише підкласом однорідних ланцюгів. Вперше із періодичного ланцюга виділено однорідні послідовності пар випадкових величин та встановлено їх певні властивості. Виділено також вкладені по відношенню до періодичного ланцюга однорідні ланцюги, для кожного з них записано його матрицю переходів. Отримані результати мають не тільки теоретичне, але і прикладне застосування, оскільки на їх основі можуть бути розроблені методи оцінювання матриць переходів періодичних ланцюгів, методи їх прогнозу.

**Ключові слова:** періодичний ланцюг Маркова, матриця переходу, однорідність, періодичність, оцінка матриць.

M. Pryimak, S. Proshyn

## ELEMENTS OF HOMOGENEITY FOR PERIODIC MARKOV'S CHAINS AS A BASIS OF THEIR STATISTICAL ANALYSIS

In this article is presented the definition of the periodic Markov's chain and is demonstrated, that this class has nothing similar with the analogical concept of periodic chains, extracted from the set of homogeneous chains. At the first time the sequences of pair of random variables are extracted from the periodic chains, and each of them has the certain characteristics of homogeneity, that is why they can be used for the estimation of the corresponding matrix of transitions. The homogeneous chains, embedded toward to a periodic chain are selected, the matrix of transitions is determined for each of them. Received results have not only theoretical but, practical application, because on their basis the method of estimation of transitional matrices of periodic chain and the method of estimation of transitional matrix of each of the embedded homogeneous chains can be developed.

**Key words:** Markov's chain, matrix of transitions, homogeneity, periodicity.

### Умовні позначення:

$\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  – ланцюг Маркова;

$X = (1, 2, \dots, h, \dots, i, \dots)$  – множина станів ланцюга;

$p_{ij}(n)$  – умовна ймовірність переходу із стану  $i$  в стан  $j$ ;

$\Pi(n) = \|p_{ij}(n)\|$  – матриця ймовірностей переходів;

$L$  – період періодичного ланцюга;

$\varphi = \{0, \dots, k, \dots, L-1\}$  –  $\varphi$ -множина фаз періодичного ланцюга;

$\{\Pi(0), \dots, \Pi(k), \dots, \Pi(L-1)\}$  –  $\Pi_{(\varphi)}$ -множина матриць переходів періодичного ланцюга;

$\varphi^{(k)} = \{k + sL, \dots\}, s = 0, 1, 2, \dots$  –  $\varphi^{(k)}$ -решітка із координатами (вузлами)  $k + sL$ ;

$t_s^{(k)} = k + sL, s = 0, 1, 2, \dots$  – скорочене позначення виразу  $k + sL$ ;

$\xi_s^{(k)} = \xi(k + sL)$  – скорочене позначення випадкової величини  $\xi(k + sL)$

$\hat{\xi}_s^{(k)} = (\xi_s^{(k)}, \xi_{s+1}^{(k)})$  – пара випадкових величин;

$\Pi_s^{(k)} = \Pi(k + sL)$  – матриця переходів для пари  $\hat{\xi}_s^{(k)}$ ;

$\{\hat{\xi}_s^{(k)}\}, s = 0, 1, 2, \dots$  – однорідна послідовність пар випадкових величин;

$\{\xi_s^{(k)}\}, s = 0, 1, \dots$ , де  $\xi_s^{(k)} = \xi(t_s^{(k)}) = \xi(k + sL)$  –  $\varphi^{(k)}$ -ланцюг: однорідний ланцюг Маркова, вкладений по відношенню до періодичного ланцюга.

**Вступ.** У прикладних задачах енергетики, медицини, економіки, інтернет-технологій, метеорології тощо часто виникає потреба дослідження ритмічних (іноді говорять циклічних, стохастично періодичних) сигналів. При цьому, як правило, використовують підхід, суть якого зводиться до тріади «модель-алгоритм-програма». Згідно з цим підходом, на першому кроці обґрунтовується модель сигналу, в якій враховуються його основні властивості і, в першу чергу, ті, що цікавлять дослідника. Після цього на базі моделі розробляються методи, алгоритми і відповідна програма забезпечення обробки сигналів.

Щодо першої ланки тріади – моделі, то в найпростіших випадках за модель ритмічних сигналів приймають суму періодичної функції і стаціонарного процесу. Тривалий час для опису та дослідження ритмічних сигналів успішно використовують періодично корельовані випадкові процеси [1] (для дискретного випадку – періодично корельовано послідовності) та процеси, періодичними за Слуцьким [2]. Періодичні білі шуми з неперервним аргументом [3] мають як самостійне наукове значення, а також дають змогу проводити обґрунтування моделей ритмічних сигналів типу дробового ефекту у вигляді лінійних періодичних випадкових процесів [4,5]. При дослідженні дискретних ритмічних шумових сигналів за їх модель можуть бути використані дискретні періодичні білі шуми [5,6], а отримані на їх основі періодичні послідовності ковзного середнього та авторегресії [5,6] є вдалими моделями ритмічних сигналів із дискретним аргументом. В останній час появилася можливість вивчати ритмічні сигнали із змінним періодом, вибираючи за їх модель періодичні функції із змінним періодом або відповідно випадкові процеси із змінним періодом [7].

Крім сигналів, при дослідженні яких основна увага звертається на їх ритмічність, існує широкий клас сигналів та стохастичних систем, для яких одночасно із ритмічністю характерною особливістю є марковість. До таких, наприклад, можна віднести ритмічні вхідні потоки багатьох систем масового обслуговування, ритмічні режими функціонування енергосистем, газотранспортних систем, потоки інформації в мережі Інтернет, ритмічні кризові явища в економіці та багато інших.

Для обґрунтування моделей ритмічних сигналів марківського типу можуть бути використані періодичні марківські процеси [8] або періодичні ланцюги Маркова [9].

Щодо наступного кроку – методів та алгоритмів їх статистичного аналізу, то на даний час такі можливості практично відсутні. Подібна до цієї в свій час була ситуація із періодичними випадковими послідовностями, коли актуальною була задача розробки методів їх статистичного аналізу. Але тут виявилось, що хоча періодична послідовність є нестационарною, її відліки, взяті через період (відомі як  $\varphi_i$ -серії [5]), вже утворюють стаціонарну послідовність, що дозволяє для її статистичного аналізу використовувати відомі методи обробки стаціонарних послідовностей. На основі  $\varphi_i$ -серій для періодичних випадкових послідовностей розроблено ряд методів їх статистичного аналізу, що включають в себе: оцінки їх періодичних ймовірнісних характеристик; гістограмний аналіз; інтерполяція густин розподілів кривими Персона; розрахунок прогнозних значень тощо.

Повертаючись до ланцюгів Маркова, відзначимо, що певні методи статистичного аналізу розроблені тільки для однорідних ланцюгів. Тому виникає природне запитання: чи можлива розробка методів статистичного аналізу періодичних ланцюгів з використанням лише однієї реалізації. У випадку позитивної відповіді постає ще одне питання: які і яким чином при цьому можуть бути використані елементи статистичного аналізу однорідних ланцюгів.

**Метою роботи** є виявлення в періодичних ланцюгах Маркова елементів однорідності, дослідження можливості їх використання для розробки методів статистичного аналізу періодичних ланцюгів і, в першу чергу, методів оцінки їх матриць переходів, використовуючи для цього лише одну реалізацію.

**Визначення і термінологія.** Щоб безпосередньо перейти до основних питань цієї роботи, спочатку зупинимось на означенні ланцюгів Маркова, їх класифікації. Зумовлено це тим, що поняття ланцюга Маркова є більш глибоким в порівнянні з іншими класами послідовностей, наприклад, стаціонарними чи періодичними послідовностями. В цьому,

очевидно, і полягає основна причина, що використання в прикладних дослідженнях ланцюгів Маркова та особливо їх підкласу – періодичних ланцюгів, порівняно обмежене, не в тій мірі, на яку вони заслуговують.

Розглядаючи поняття ланцюга Маркова, переважно використовують підхід, згідно з яким розглядається деяка функціонуюча система (технічна, економічна біологічна), яку позначимо через  $S(t)$ . Система характеризується певними параметрами, які визначають її поведінку. Параметри можуть мати довільну природу: бути числовими, описовими (наприклад, характеризувати працездатність чи непрацездатність системи в цілому чи окремих її складових), класифікаційними тощо. Зауважимо, що вибір тих чи інших параметрів системи часто є складною задачею, але в нашому випадку будемо вважати, що такий вибір вже здійснено. Самих параметрів може бути один або декілька, утворюючи в сукупності вектор параметрів. Для зручності будемо вважати, що система характеризується одним параметром.

Фіксоване значення параметра системи називають станом системи, а сукупність всіх можливих станів – фазовим простором системи. Фазовий простір позначимо через  $X$ , окремі фазові стани із  $X$  – малими буквами з індексами або без них:  $x, x_h, x_i, x_j, \dots$ .

При побудові математичної моделі системи та розробці методів її дослідження враховуються певні особливості системи, характер її еволюції, закономірності зміни станів системи, режими спостереження за системою тощо. Тут можливі різні ситуації, і ми виділимо основні з них:

- а) система може вважатися детермінованою (зміна станів системи відбувається згідно з певною функціональною залежністю) або стохастичною (зміна станів системи має випадковий характер);
- б) множина станів системи може бути неперервною або дискретною;
- в) зміна станів системи відбувається неперервно або дискретно (стрибкоподібно);
- г) спостереження за системою (в якому із станів вона перебуває) відбувається неперервно або в дискретні моменти часу.

У цій роботі ми зупинимось на варіанті, коли:

- система  $S(t)$  є стохастичною, тобто під дією випадкових факторів переходи із стану в стан відбуваються випадково;
- множина її станів є дискретною:  $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots)$ ;
- переходи із стану в стан відбуваються стрибкоподібно і миттєво;
- спостереження за системою (її станами) здійснюється в дискретні моменти часу  $t_n, n = 0, 1, 2, \dots$ ;
- в кожний момент часу  $t_n$  система знаходиться в одному із станів  $x_i$ :

$$S(t_n) = x_i, n = 0, 1, 2, \dots, x_i \in X.$$

При цих зауваженнях еволюцію системи можна зобразити схематично у вигляді послідовності (ланцюга) переходів:

$$S(t_0) \rightarrow S(t_1) \rightarrow \dots \rightarrow S(t_{n-2}) \rightarrow S(t_{n-1}) \rightarrow S(t_n) \rightarrow S(t_{n+1}) \rightarrow \dots$$

Нехай в моменти часу  $t_0, \dots, t_{n-1}$  система  $S(t)$  перебувала відповідно в станах  $x_h, \dots, x_k$ . В момент  $t_n$ , який будемо вважати теперішнім часом, система перебуває в стані  $x_i$ . В наступний момент часу  $t_{n+1}$  система може виявитися в одному із станів фазового простору  $X$ , наприклад, в стані  $x_j$ , перейшовши в нього із стану  $x_i$ . Будемо вважати, що переходи із одного стану в інший здійснюються у відповідності із певними ймовірнісними закономірностями, що задовольняють марківській властивості: умовна ймовірність того, що в момент часу  $t_{n+1}$  система перейде в деякий стан  $x_j, j = 1, 2, \dots$ , залежить тільки від стану  $x_i$ , в якому система знаходиться в момент  $t_n$ , і не залежить від того, в яких саме станах перебувала система в попередні моменти часу  $t_0, \dots, t_{n-1}$ . Припускається також, що в початковий момент часу  $t_0$  система може знаходитись в одному із станів  $x_i$  із початковим

розподілом ймовірностей  $P(S(t_0) = x_i) \stackrel{df}{=} p_i(t_0)$ , причому  $\sum p_i(t_0) = 1$ . Наведена властивість марковості системи може бути записана у вигляді рівняння

$$\begin{aligned} P\{S(t_{n+1}) = x_j | S(t_0) = x_h, \dots, S(t_{n-1}) = x_k, S(t_n) = x_i\} = \\ = P\{S(t_{n+1}) = x_j | S(t_n) = x_i\}, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Стохастична система  $S(t)$ , для якої виконується умова марковості (1), називається стохастичною системою марківського типу. Для таких систем умовні ймовірності переходів  $P\{S(t_{n+1}) = x_j | S(t_n) = x_i\} \geq 0$ , а їх сума

$$\sum_j P\{S(t_{n+1}) = x_j | S(t_n) = x_i\} = 1.$$

Остання властивість є наслідком того, що із стану  $x_i$  система обов'язково перейде в один із станів  $x_1, \dots, x_h, \dots, x_i, \dots$  фазового простору  $X$ , тобто така подія є достовірною, а тому її ймовірність рівна 1.

Зауважимо, що суть поняття марковості іноді формулюють наступним чином: «при фіксованому теперішньому  $x_i$  майбутнє  $x_j$  не залежить від минулого  $x_h, \dots, x_k$ » або «при фіксованому теперішньому  $x_i$  майбутнє  $x_j$  і минуле  $x_h, \dots, x_k$  є незалежними». Зустрічаються також різні позначення щодо моментів часу. В [2] минулими вважають моменти часу  $t_0, \dots, t_{n-2}$ , теперішній момент –  $t_{n-1}$ , майбутні моменти –  $t_n, t_{n+1}, \dots$ . Позначення, якого дотримуємося в цій роботі, використовується також в [10], і для нас воно є найбільш зручним. Зустрічаються випадки [11], коли в різних місцях роботи зустрічаються різні позначення, що створює певні незручності.

Щоб обґрунтувати математичну модель стохастичної системи марківського типу, спершу проведемо своєрідне «кодування» станів її фазового простору  $X$ , поставивши у відповідність кожному з них деяке число. Для зручності за такі числа візьмемо індекси станів, в нашому випадку – їх номери, тобто стану  $x_i$  відповідатиме число  $i$ :

стани	$x_1$	...	$x_h$	...	$x_i$	...	$x_j$	...	$x_k$	...
коди станів	1	...	$h$	...	$i$	...	$j$	...	$k$	...

Будемо тепер замість системи  $S(t_n), n = 0, 1, 2, \dots$ , із множиною станів  $X = (x_1, \dots, x_h, \dots, x_i, \dots)$  розглядати послідовність випадкових величин

$$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots \quad (2)$$

де  $\xi_n = \xi(t_n)$ , причому коли в момент часу  $t_n$  система перебуває в стані  $x_i$ , тобто  $S(t_n) = x_i$ , випадкова величина  $\xi_n$  приймає певне числове значення, в нашому випадку, як було домовлено – номер стану  $x_i$ , тобто  $\xi_n = i$ . Враховуючи тепер рівняння (1) та зроблені зауваження щодо послідовності (2), подамо деякі означення та поняття, пов'язані із ланцюгами Маркова.

### Ланцюги Маркова та їх основні класи.

**Означення 1.** Послідовність цілочисельних випадкових величин  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , що приймають значення із фазового простору  $X = (1, 2, \dots, h, \dots, i, \dots)$ , називається ланцюгом Маркова, якщо для всіх  $n \geq 0$

$$P\{\xi_{n+1} = j | \xi_0 = h, \dots, \xi_{n-1} = k, \xi_n = i\} = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\} \stackrel{df}{=} p_{ij}(n), \quad (3)$$

тобто **умовна ймовірність** того, що випадкова величина  $\xi_{n+1}$  прийме значення  $j$ , залежить тільки від того, яке значення прийняла випадкова величина  $\xi_n$  і не залежить від попередніх значень  $h, \dots, k$ , які прийняли випадкові величини  $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$ . Для  $n = 0$  початковий розподіл ймовірностей  $P(\xi_0 = i) \stackrel{df}{=} p_i(0)$  вважається заданим, причому  $\sum_{i \in X} p_i(0) = 1$ .

Умовні ймовірності  $p_{ij}(n)$  в сукупності утворюють матрицю

$$\Pi(n) = \|p_{ij}(n)\|, i, j \in X, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

яку називають матрицею переходів (перехідних ймовірностей, ймовірностей переходів) ланцюга. Для матриці переходів (4) умовні ймовірності  $p_{ij}(n) \geq 0$ , а сума

$$\sum_{j \in X} p_{ij}(n) = 1.$$

Матриця  $\|p_{ij}(n)\|$ , що задовольняє останній умові, називається стохастичною матрицею.

Відзначимо, що замість терміну «умовна ймовірність» іноді використовують назви «умовна ймовірність переходу», «ймовірність переходу», «перехідна ймовірність», якщо не виникає непорозумінь, просто «ймовірність». Ми будемо дотримуватися термінів «ймовірність переходу» та «умовна ймовірність».

Факт, що при визначенні ланцюга Маркова суттєво використовується поняття деякої стохастичної системи  $S(t)$ , проявляється в тому, що множину  $X = (1, 2, \dots, h, \dots, i, \dots)$ , яка фігурує в означенні ланцюга, часто називають фазовим простором чи простором станів ланцюга  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , набір ймовірностей  $p_i(0) = P(\xi_0 = i), i = 1, 2, \dots, h, \dots$ , – початковим розподілом станів, а умовні ймовірності  $p_{ij}(n) = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\}$  – ймовірностями переходів із стану  $i$  в стан  $j$ . Із ланцюгів Маркова виділено декілька класів ланцюгів. Найголовніші з них – це однорідні ланцюги [11-13] та періодичні ланцюги [9].

**Означення 2.** Ланцюг Маркова  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  називається **однорідним**, якщо перехідні ймовірності  $p_{ij}(n)$  не залежать від  $n$ :  $p_{ij}(n) = p_{ij}, i, j \in X$ .

З означення видно, що однорідний ланцюг визначається лише однією матрицею переходів  $\Pi = \|p_{ij}\|$ .

Наведемо поняття періодичного ланцюга, вперше введеного в [9].

**Означення 3.** Ланцюг Маркова

$$\{\xi_n\}, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

називається **періодичним**, якщо періодичними є його ймовірності переходів, тобто існує ціле  $L > 1$ , що

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(n + L), i, j \in X, \quad (6)$$

де  $i, j$  – стани,  $i, j \in X$ .

Очевидно, що для періодичного ланцюга Маркова його матриці переходів  $\Pi(n) = \|p_{ij}(n)\|$  теж змінюються періодично з цим же періодом  $L$ :

$$\Pi(n) = \Pi(n + L), n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Стосовного останнього означення, то таку ж назву «періодичні ланцюги» має один із підкласів однорідних ланцюгів Маркова [13,14]. Щоб побачити повну відмінність між цим підкласом і періодичними ланцюгами, що розглядаються в цій роботі (означення 3), спочатку нагадаємо деякі поняття, пов'язані із однорідними ланцюгами, дотримуючись, в основному, [2,10-13].

Через  $p_{ij}^{(r)}$  позначимо ймовірність переходу із стану  $i$  в стан  $j$  за  $r \geq 1$  кроків. Стан  $j$  називається досяжним із стану  $i$ , якщо існує таке число  $r \geq 1$ , що  $p_{ij}^{(r)} > 0$ . Стан  $i$  називається **періодичним** з періодом  $\tau > 1$ , якщо  $p_{ij}^{(r)} = 0$  для будь-якого  $r$ , не кратного  $\tau$ , і  $\tau$  – найменше із чисел, для якого  $p_{ij}^{(\tau)} > 0$  (тобто із стану  $i$  можна повернутися в цей же стан лише за  $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$  кроків).

**Однорідний ланцюг Маркова** називають **періодичним** [14], якщо всі його стани є періодичними з одним і тим же періодом  $\tau > 1$ .

Як видно, наведене поняття періодичності однорідного ланцюга не має нічого спільного ні із класичним визначенням періодичної випадкової послідовності (для якої періодичними є її багатовимірні функції розподілу [2]), ні із визначенням періодичного ланцюга, для якого (згідно з означенням 3) періодичними є його матриці переходів.

Розглянемо деякі властивості періодичних ланцюгів Маркова з метою виявлення в них ознак однорідності та можливості розробки на цій основі методів статистичного аналізу періодичних ланцюгів. Для цього попередньо введемо деякі зручні для нас позначення і поняття, які будуть використані пізніше.

Через  $\varphi$  позначимо множину чисел  $0, \dots, k, \dots, L-1$ , де  $L$  – період ланцюга:

$$\varphi = \{0, \dots, k, \dots, L-1\},$$

і будемо називати її  $\varphi$ -множиною фаз, окремі числа  $k$  цієї множини – фазами. Присутність в назві слова «фаза» викликано тим, що для періодичних з періодом  $T$  функцій, зокрема тригонометричних функцій, широко використовується поняття початкової фази – числа, розміщеного на відрізку, довжиною  $T$ :  $\varphi \in [0, T]$  або  $\varphi \in [-T/2, T/2]$ . Крім цього, над числами, пов'язаними із фазами, часто здійснюють арифметичні дії додавання чи віднімання за модулем, рівним періодові  $T$ , що в міру необхідності буде використано і в цій роботі.

Для кожного фіксованого  $k$  із  $\varphi$ -множини фаз сукупність чисел

$$\varphi^{(k)} = \{k + sL, \dots\}, s = 0, 1, \dots,$$

утворює решітку із кроком  $L$ , яку будемо називати  $\varphi^{(k)}$ -решіткою. Якщо позначити

$$k + sL \stackrel{df}{=} t_s^{(k)}, s = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

де  $k = 0, 1, \dots, L-1$ , тобто належить  $\varphi$ -множині фаз, то числа  $t_s^{(k)}$  утворюють послідовність  $\{t_s^{(k)}\}, s = 0, 1, \dots$ , значення елементів якої є координатами вузлів  $\varphi^{(k)}$ -решітки. Об'єднання  $\varphi^{(k)}$ -решіток

$$\bar{\varphi} = \bigcup_{k=0}^{L-1} \varphi^{(k)}$$

назвемо  $\bar{\varphi}$ -решіткою. Очевидно, вузли  $\bar{\varphi}$ -решітки в сукупності є множиною цілих невід'ємних чисел  $Z_0$ , тобто співпадають із областю визначення ланцюга Маркова. Як приклад, на рисунку 1 зверху осі  $t$  точками помічені вузли (координати)  $\bar{\varphi}$ -решітки, вузли одної із  $\varphi^{(k)}$ -решіток позначені кружечками. Знизу осі для цих же точок використано позначення згідно з (8).

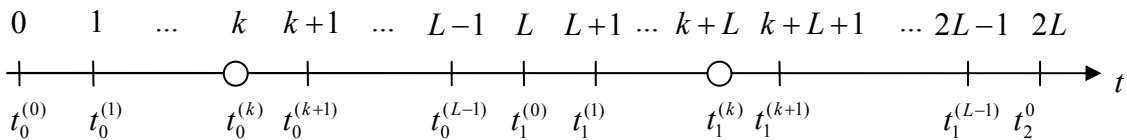


Рисунок 1 – Вузли  $\bar{\varphi}$ -решітки, позначені вертикальними рисочками, вузли  $\varphi^{(k)}$ -решітки, позначені кружечками, та координати цих вузлів

Відповідно до  $\varphi$ -множини фаз множину матриць переходів

$$\{\Pi(0), \dots, \Pi(k), \dots, \Pi(L-1)\} \stackrel{df}{=} \Pi_{(\varphi)} \quad (9)$$

назвемо **множиною матриць переходів або  $\Pi_{(\varphi)}$ -множиною**, а окремі матриці  $\Pi(k)$  цієї множини – фазовими матрицями.

Оскільки матриці переходів періодичного ланцюга згідно з (7) змінюються періодично, то, очевидно, що для будь-якого  $n \geq L$  виконується рівність

$$\Pi(n) = \Pi(n \pmod{L}),$$