УДК 539.3

Богдан Слободян
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Україна

КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ З ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОЮ СТИСЛИВОЮ РІДИНО ЕЛІПТИЧНОЮ В ПЛАНІ ВИЇМКОЮ

Bogdan Slobodian

CONTACT OF ELASTIC SOLIDS WITH ELLIPTICAL IN PLANS GROOVE PARTIALLY FILLED BY COMPRESSIBLE LIQUID

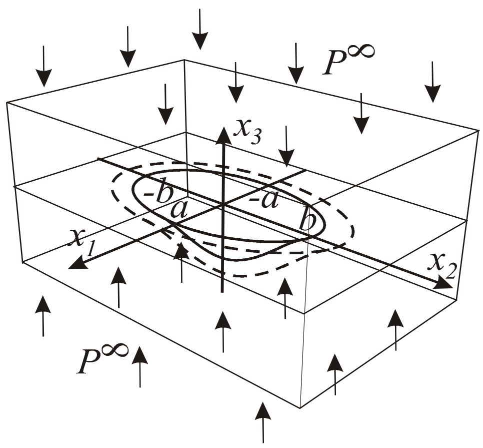

Рис. 1.

У даній роботі розв'язано просторову контактну задачу для півпросторів, один із яких має виїмку з еліптичною основою, з урахуванням часткового заповнення зазору між ними стисливою рідиною.

Розглянемо два пружні півпростори D_1 і D_2 (рис. 1), які контактують без тертя під дією рівномірно розподілених стискальних зусиль P^∞, прикладених на безмежності. Межею верхнього півпростору є площина Ω, з якою сумістимо координатну площину Ox_1x_2 декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$. Межа нижнього півпростору плоска скрізь, за винятком еліптичної ділянки S_0 з півосями a_0 і b_0 ($a_0 \le b_0$), де вона має плитку пологу виїмку, глибина якої описується функцією $r(x) = -r_0\left(1 - x_1^2/a_0^2 - x_2^2/b_0^2\right)^{3/2}$, $x \in S_0$. Тут $r_0 = r(0)$ — максимальна глибина виїмки $\left(r_0 << a_0, r_0 << b_0\right)$, x — точка з координатами $\left(x_1, x_2, x_3\right)$. На контурі області S_0 виїмка плавно переходить у площину: $r(x) = 0,\quad \partial r(x)/\partial x_1 = 0,\quad \partial r(x)/\partial x_2 = 0,\quad x \in L_0$. На рис. 1 виїмку зображено штрихованою лінією.

Вважаємо, що виїмку частково заповнено стисливою рідиною, тобто об'єм рідини V_{f0} і об'єм виїмки V_0 зв'язані між собою залежністю $V_{f0} = k_l V_0$, де k_l — коефіцієнт об'ємного заповнення виїмки рідиною, $0 < k_l < 1$.

За дії навантаження P^∞ поверхня контакту зростає, а ділянка локальної відсутності контакту зменшується до *S*, уздовж якої між тілами буде міжконтактний зазор заввишки $h(x)$, зображений на рис. 1 суцільною лінією. Контактна поведінка такої системи відрізняється для двох етапів навантаження. На початковому етапі ($P^\infty < P_{cr}$) об'єм зазору *V* більший за об'єм рідини V_{f0} і вона не чинить опору зближенню поверхонь зазору та його закриттю. У цьому разі тиск у рідині не виникає ($P_f = 0$) і поверхні зазору вільні від напружень, а розв'язок задачі збігається з наведеним у праці [1] розв'язком контактної задачі для тіл, одне з яких має виїмку, що не містить заповнювача. Згідно з ним зазор займатиме еліптичну ділянку *S*, ексцентриситет *e* якої дорівнює ексцентриситету e_0 ділянки S_0 $\left(e = e_0 = \sqrt{1 - a_0/b_0}\right)$, а висота зазору $h(x)$ описується функцією $h(x) = \beta\left(1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2\right)^{3/2}$, $x \in S$. Тут $a = a_0\sqrt{N}$, $b = b_0\sqrt{N}$ — півосі еліпса *S*, $\beta = r_0 N^{3/2}$ — максимальна висота зазору; $N = 1 - 4MP^\infty b_0\sqrt{1 - e_0^2}\Big/3r_0 E\left(e_0\right)$; $M = \left(1 - \nu_1\right)/G_1 + \left(1 - \nu_2\right)/G_2$; ν_k, G_k — коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву матеріалу півпростору D_k, $k=1,2$; $E(e_0)$ — повний еліптичний інтеграл другого роду.

Другий етап починається після досягнення навантаженням P^∞ критичного значення $P_{cr}=3r_0E(e_0)\left(1-k_l^{2/5}\right)\Big/4Mb_0\sqrt{1-e_0^2}$, за якого об'єм зазору V дорівнює початковому об'єму рідини V_{f0}. У цьому разі в рідині виникає тиск P_f, який чинить опір зближенню поверхонь зазору та його закриттю. Об'єм рідини V_f, що перебуває під тиском P_f, і початковий об'єм рідини (за відсутності тиску в ній) пов'язані рівнянням стану стисливої баротропної рідини

$$V_f=V_{f0}\exp\left(-P_f/B\right), \tag{1}$$

де B — модуль об'ємної пружності рідини.

Згідно з методом функцій міжконтактних зазорів розв'язок сформульованої задачі подамо через функцію $h(x)$ [2], для визначення якої отримуємо інтегро-диференціальне рівняння

$$\Delta_x\iint\limits_S\frac{h(\xi)\,d_\xi S}{|x-\xi|}=\Delta_x\iint\limits_S\frac{r(\xi)\,d_\xi S}{|x-\xi|}+4\pi M\left(P^\infty-P_f\right),\quad x\in S. \tag{2}$$

Внаслідок плавного змикання берегів зазору на контурі L області S повинна виконуватись умова $\partial h(x)/\partial x_1=\partial h(x)/\partial x_2=0$, $x\in L$.

З рівнянь (2), використовуючи розвинуту в праці [1] методику, знайдемо півосі та максимальну висоту зазору $h(x)$

$$a=a_0\sqrt{N_1},\ b=b_0\sqrt{N_1},\ \beta=\beta_0\left[N_1\right]^{3/2},\ N_1=1-4M\left(P^\infty-P_f\right)b_0\sqrt{1-e_0^2}\Big/3\beta_0E(e_0). \tag{3}$$

Вирази (3) містять невідому величину — тиск рідини P_f. Задовольнивши рівняння стану стисливої рідини (1), для його визначення отримано рівняння $\left[N_1\right]^{5/2}=k_l\exp\left(-P_f/B\right)$, розв'язок якого побудовано числово.

Проаналізовано контактну поведінку системи та трансформацію зазору між тілами за збільшення прикладеного до них навантаження. З'ясовано, що ця поведінка якісно відрізняється для двох етапів навантаження. На першому етапі, допоки об'єм зазору залишатиметься більшим за початковий об'єм рідини, геометричні параметри зазору різко зменшуються з ростом навантаження. Це зменшення значно сповільнюється на другому етапі — після того, як навантаження перевищать критичну величину, за якої об'єм зазору стає рівним об'єму рідини. Зі збільшенням модуля об'ємної пружності рідини тиск у ній спадає.

Робота виконана за підтримки гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених на 2012 рік (договір № Ф36/413-2012 ГП384)

Література

1. Мартиняк, Р. М. Механотермодифузійна взаємодія тіл з контактно-поверхневими неоднорідностями і дефектами: автореферат дис. ... д. ф.-м. н.: 01.02.04 - Львів, 2000. - 356 с. - Рукопис.

2. Мартиняк, Р. М., Слободян Б. С. Контакт пружних півпросторів за наявності між ними еліптичного зазору з рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 2009. - Т.45, № 1. - С. 62-66.