УДК 539.3

Мирон Николишин[1], Віктор Опанасович[2], Леся Куротчин[1]
[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З НЕНАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ЇЇ ВЕРШИН

Miron Nikolishin[1], Victor Opanasovych[2], Lesya Kurotchyn[1]

BIAXIAL TENSION OF ISOTROPIC PLATE WITH A NON-THROUGH CRACK, TAKING INTO ACCOUNT THE PLASTIC ZONE AT ITS EDGES

Розглянемо нескінченну однорідну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності P і q. Вважаємо, що у ній знаходиться ненаскрізна тріщина завглибшки $h+h_1$ і завдовжки $2l$, береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Виберемо, в серединній площині пластини, декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$, з початком в центрі тріщини, направивши вісь Ox по ній. Вважаємо, що під дією зовнішнього навантаження у вершинах тріщини виникають пластичні зони завдовжки a, крім того матеріал у перемичці ($h_1 \le \tilde{z} \le h$, $-l \le x \le l$) переходить у пластичний стан. В серединній площині пластини пластичні зони позначимо через L_1' і L_1'', лінію, де розміщена тріщина, – через L, $\tilde{L} = L \cup L_1$, $L_1 = L_1' \cup L_1''$ (див. рис. 1). Граничне значення відповідних величин на дійсній осі при $y \to \pm 0$ будемо позначати знаками “+” і “–”. За рахунок ненаскрізної тріщини розв’язок задачі подано у вигляді розв’язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини, де використана класична теорія.

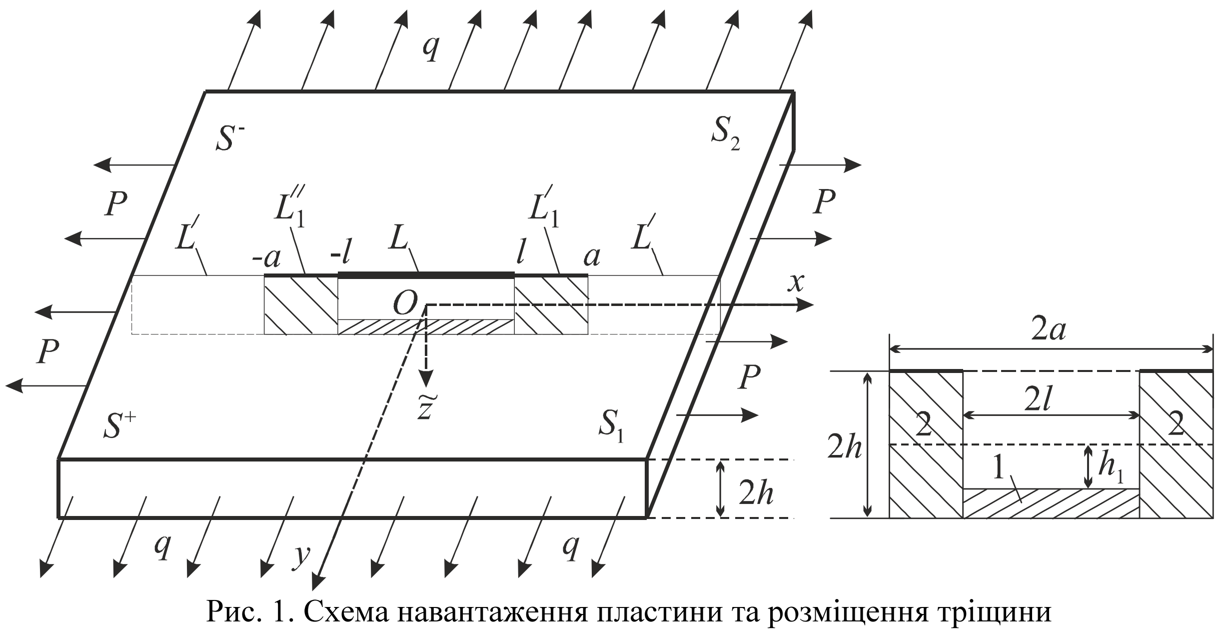

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Згідно постановки маємо такі крайові умови:
для плоскої задачі:

$$\sigma_y^{\pm} = \sigma_T b_1,\ \tau_{xy}^{\pm} = 0 \text{ на } L,$$

$$\sigma_y^{\pm} = \sigma_0,\ \tau_{xy}^{\pm} = 0 \text{ на } L_1,$$

для задачі згину:

$$M_y^{\pm} = \sigma_T b_2 ,\ H_{xy}^{\pm} = 0 ,\ N_y^{\pm} = 0 \text{ на } L ,$$

$$M_y^{\pm} = M_0 ,\ H_{xy}^{\pm} = 0 ,\ N_y^{\pm} = 0 \text{ на } L_1' ,$$

де σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень, а σ_0 – невідоме нормальне напруження у пластичній зоні у плоскій задачі; M_y, H_{xy}, N_y – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила, M_0 – невідомий згинальний моменти у пластичній зоні; $b_1 = (h - h_1)/(2h)$, $b_2 = (h^2 - h_1^2)/2$; σ_T – границя текучості матеріалу.

За допомогою методів теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі побудовано в класі функцій обмежених у вершинах пластичних зон. Знайдено напружений стан на $\tilde{L}$:

для плоскої задачі:

$$\sigma_y^{\pm}(x) = \sigma_0 ,\ \tau_{xy}^{\pm}(x) = 0 ,\ \sigma_x^{\pm}(x) = \sigma_0 + P - q ,\ x \in L_1 ,$$

$$\sigma_y^{\pm}(x) = \sigma_T b_1 ,\ \tau_{xy}^{\pm}(x) = 0 ,\ \sigma_x^{\pm}(x) = \sigma_T b + P - q ,\ x \in L ,$$

та моменти для задачі згину:

$$M_y^{\pm}(x) = M_0 ,\ H_{xy}^{\pm}(x) = 0 ,\ M_x^{\pm}(x) = \frac{\nu}{3+\nu} M_0 ,\ x \in L_1 ,$$

$$M_y^{\pm}(x) = \sigma_T b_2 ,\ H_{xy}^{\pm}(x) = 0 ,\ M_x^{\pm}(x) = \frac{\nu}{3+\nu} \sigma_T b ,\ x \in L .$$

Одержано співвідношення для визначення невідомих σ_0 і M_0

$$\sigma_0 = \left(\frac{q\pi}{2} - \sigma_T b_1 \arcsin \frac{l}{a} \right) / \arccos \frac{l}{a} ,\ M_0 = -\sigma_T b_2 \arcsin \frac{l}{a} / \arccos \frac{l}{a} .$$

Використовуючи умову пластичності Треска

$$\sigma_0 + \left| \frac{3}{2h^2} M_0 \right| = \sigma_T ,$$

знайдемо довжину пластичної зони

$$\frac{a}{l} = \sin^{-1} \left(\frac{2\pi(1 - q/\sigma_T)}{5 - 3(h_1/h)^2 + 2(h_1/h)} \right).$$

Для випадку наскрізної тріщини, коли $h_1 / h = 1$, одержимо відому в літературі формулу

$$\frac{a}{l} = \cos^{-1} \left(\frac{q\pi}{2\sigma_T} \right).$$

Скориставшись умовою пластичності Мізеса

$$\left(q - P + \left| \frac{3}{2h^2} \frac{3}{3+\nu} M_0 \right| \right)^2 + \left(\sigma_0 + P - q + \left| \frac{3}{2h^2} \frac{\nu}{3+\nu} M_0 \right| \right) \left(\sigma_0 + \left| \frac{3}{2h^2} M_0 \right| \right) = \sigma_T^2 ,$$

бачимо, що довжина пластичної зони буде залежати не тільки від головних напружень q на безмежності, а також від P, чого не спостерігаємо при використанні умови пластичності Треска.