

Міністерство освіти і науки України  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

**ОСТАПЧУК ОКСАНА ПЕТРІВНА**

УДК 532.72:532.546: 517:54:519.63

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ  
У ҐРУНТОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ З УРАХУВАННЯМ  
ТЕХНОГЕННИХ ЧИННИКІВ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Тернопіль-2013

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у Національному університеті водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України, м. Рівне

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор  
**Власюк Анатолій Павлович,**  
Міжнародний економіко-гуманітарний університет  
ім. академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне,  
завідувач кафедри інформаційних систем та  
обчислювальних методів

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор  
**Бомба Андрій Ярославович,**  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
завідувач кафедри інформатики і  
прикладної математики

доктор технічних наук, старший науковий співробітник  
**Чернуха Ольга Юріївна,**  
Центр математичного моделювання Інституту  
прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,  
завідувач відділом математичного моделювання  
нерівноважних процесів

Захист відбудеться “\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2013 р. о \_\_\_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К58.052.01 у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя за адресою: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56, ауд.79.

З дисертацією можна ознайомитись в науково-технічній бібліотеці Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя за адресою: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

Автореферат розісланий “\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2013 р.

Вчений секретар спеціалізованої  
вченої ради К58.052.01

Б. Г. Шелестовський

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** У сучасний період розвитку енергетики та інших галузей промисловості великого значення набувають проблеми, пов'язані зі стійкістю гідротехнічних та енергетичних об'єктів, надійністю та безпекою їх експлуатації. У багатьох випадках експлуатація останніх відбувається при фільтрації підземних вод в їх основах, де солі можуть бути дисперсно розчинені або залягати у вигляді окремих включень, пластів тощо. У зв'язку з цим великої уваги заслуговують питання розробки, дослідження та впровадження методів математичного моделювання для розв'язання задач, що вивчають процеси адсорбції радіонуклідів та інших хімічних забрудників в ґрунтових середовищах з метою прийняття оптимальних технічних рішень.

Подібні розрахунки виникають в задачах міграції забруднень, при прогнозі гідрохімічного режиму ґрунтів та при оцінці родючого шару ґрунту.

Питаннями дослідження процесів масопереносу розчинених в фільтраційному потоці речовин займалися ряд вчених: С.Н. Нумеров, О.Н. Патрашев, М.М. Веригін, Б.С. Шержуков, В.М. Ніколаєвський, Ф.Н. Бочевер, В.І. Лаврик, І.І. Ляшко, С.І. Ляшко, А.А. Глущенко, І.В. Сергієнко, В.С. Дейнека, В.В. Скопецький, О.Я. Олійник, В.Л. Поляков, В.М. Булавацький, Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, Я.Й. Бурак, Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха, А.П. Власюк, А.Я. Бомба, М.М. Біляєв, П.М. Мартинюк, М.Р. Петрик, J. Bear, K. Eriksson, A.D. Nield та ін.

Однак процеси масопереносу розчинених речовин вивчалися в основному на фоні фільтрації чистої води. В роботах А.П. Власюка, П.М. Мартинюка та в даній роботі масоперенос досліджувався в процесі фільтрації сольових розчинів у ґрунтових середовищах, оскільки, як показали експериментальні дослідження, фільтрація сольового розчину в ґрунті являє собою фільтрацію слабкого електроліту. А це означає, що параметри фільтрату залежать від його концентрації. Останнє призводить до того, що побудовані математичні моделі масопереносу та тепло-масопереносу сольових розчинів у ґрунтових середовищах є нелінійні, що більш адекватно описують дані процеси. Тому розробка нелінійних математичних моделей процесів переносу сольових розчинів та міграції радіонуклідів в ґрунтових середовищах та розв'язування такого класу задач є важливим та актуальним науковим завданням.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконувалась згідно держбюджетних тематик кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, а саме:

1. «Математичне та комп'ютерне моделювання природних, техногенних і інформаційних систем» (2004-2006 р.р., № ДР 0104U003122);

2. «Математичне та комп'ютерне моделювання впливу природних та техногенних факторів на стан ґрунтових основ енергетичних об'єктів» (2007-2009 р.р., № ДР 0107U004173);

3. «Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (2010-2012 р.р., № ДР 0110U000816).

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є формулювання нових фізичних постановок задач фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах. Розробка нових нелінійних математичних моделей даних задач з урахуванням взаємовпливу характеристик фільтраційного потоку та ґрунтового середовища в ізотермічних і неізотермічних умовах; розвинення числових методів скінченних різниць з використанням числових конформних відображень розв'язання відповідних нелінійних крайових задач.

Для досягнення мети потрібно розв'язати такі задачі:

1. Сформулювати постановки нових актуальних задач фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах з урахуванням взаємовпливу характеристик фільтраційного потоку та ґрунтового середовища в ізотермічних та неізотермічних умовах.

2. Побудувати нові нелінійні математичні моделі сформульованих в роботі задач фільтрації сольових розчинів у ґрунтовому середовищі: до водозабірника; в основі ГТС; із свердловини з урахуванням взаємного впливу характеристик процесу (концентрації сольових розчинів) на характеристики ґрунтового середовища (коефіцієнти фільтрації, дифузії, масообміну, пористості) в ізотермічних та неізотермічних умовах.

3. Побудувати нові нелінійні математичні моделі сформульованих у роботі задач міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах: в горизонтальному шарі ґрунту, при використанні горизонтального систематичного дренажу, наповненого сорбуючим матеріалом в ізотермічних та неізотермічних умовах та взаємовпливу характеристик фільтраційного потоку і ґрунтового середовища.

4. Розробити необхідне програмне забезпечення для побудованих в роботі різницевих схем та відповідних алгоритмів їх програмної реалізації.

5. Використовуючи розроблене програмне забезпечення, провести числові експерименти та виконати аналіз отриманих результатів.

*Об'єкт дослідження:* процеси фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах в ізотермічних та неізотермічних умовах.

*Предмет дослідження:* математичні моделі процесів фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах в ізотермічних та неізотермічних умовах.

**Методи дослідження.** Числові методи розв'язання крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь еліптичного та параболічного типів в областях з криволінійними межами, зокрема методи: скінченних різниць, скінченних елементів, числових конформних відображень областей складної геометричної форми.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Задачі фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах вперше розглянуті в нелінійних постановках. Для їх дослідження розвинені відомі числові методи. На основі побудованих алгоритмів створено програмне забезпечення, яке адаптоване для сучасних комп'ютерів. До найбільш значимих результатів, що характеризують наукову новизну, належать:

1. Вперше сформульовано нові фізичні постановки нелінійних задач фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах та побудовано

їх нелінійні математичні моделі при залежності параметрів фільтрації та масопереносу від концентрації солей, врахуванні осмосу, ізотермічних та неізотермічних умов.

2. Розвинено числові методи скінченних різниць, конформних відображень розв'язання відповідних нелінійних крайових задач в складних областях з криволінійними межами та вперше знайдено їх числові розв'язки.

3. Вперше доведено точність нової монотонної різницевої схеми для одновимірного нелінійного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну та використано дану різницеву схему для розв'язання задач фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах.

4. У результаті проведеного математичного і комп'ютерного моделювання показано суттєву відмінність між процесом фільтрації сольових розчинів (врахування залежності параметрів фільтрації та масопереносу від концентрації солей) та процесом масопереносу на фоні фільтрації чистої води у ґрунтового середовищі.

**Практичне значення отриманих результатів** полягає в тому, що проведені в дисертаційній роботі дослідження по розрахунку полів п'єзометричних напорів, розподілів температури, концентрацій солей в ґрунтових середовищах можуть бути використані при проектуванні та будівництві гідротехнічних споруд та інших будівель, які попадають в зону впливу висококонцентрованих сольових розчинів; при добуванні корисних копалин із надр шляхом їх розчинення та винесення фільтраційним потоком з подальшим вловлюванням системою свердловин; при прогнозуванні очищення радіоактивно забруднених родючих ґрунтів.

Результати даної дисертаційної роботи було впроваджено в процесі виконання робіт за договірною темою «Аналіз напружено-деформівного стану і розробка оптимальної конструкції монтажної шахти водовипуску Дністровської ГАЕС» (№4-78). Результати роботи застосовані при розробці конструкції екрану верхнього і нижнього басейнів Дністровської ГАЕС, технології проведення земляних робіт при його спорудженні та бетонній підготовці.

Матеріали кандидатської дисертації використано в навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами за напрямом підготовки 0403 «Прикладна математика» (бакалавр), студентами спеціальностей 7.04030101, 8.04030101 «Прикладна математика» (спеціаліст, магістр), частина результатів дисертаційних досліджень теоретичного і практичного характеру використана при розробці спецкурсів «Математичне та комп'ютерне моделювання природних та техногенних процесів», «Числові методи конформних та квазіконформних відображень», «Числові методи математичної фізики».

**Особистий внесок здобувача** полягає в безпосередній участі у проведенні теоретичних досліджень, розробці обчислювальних алгоритмів та виконанні числових експериментів, оформленні проміжних результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей, самостійному узагальненню окремих етапів досліджень та дисертаційної роботи в цілому. Усі теоретичні та практичні результати, які складають основний зміст дисертаційної роботи, автором отримано особисто. В публікаціях [1, 2, 4, 5, 11, 12], які написані у співавторстві, А.П. Власюку належать постановки задач та участь в аналізі отриманих теоретичних досліджень і

результатів числових експериментів. В роботі [3] здобувачеві належить доведення точності нової монотонної різницевої схеми для одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну, в роботах [7, 9, 10] – побудова нелінійних математичних моделей задач, розробка обчислювальних алгоритмів розв’язку, аналіз отриманих результатів.

**Апробація результатів дослідження.** Основні положення і результати досліджень доповідались, обговорювались та апробувались на: Міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми математичного моделювання сучасних технологій (ПММ-2002)» (Хмельницький, 2002); Міжнародних конференціях «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності» (Тернопіль, 2004; Бердянськ, 2005; Східниця, 2006; Чернівці, 2007; Київ-Рівне, 2008); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2004); Всеукраїнській науково-методичній конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації» (Кам’янець-Подільський, 2004); XI, XII, XIII Міжнародних наукових конференціях ім. академіка М.Кравчука (Київ, 2006, 2008, 2010); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (Рівне, 2013); науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу Національного університету водного господарства та природокористування (Рівне, 2002-2013 р. р.).

В повному обсязі робота доповідалася на: розширеному засіданні кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування; науковому семінарі «Математичне моделювання та обчислювальні методи» Тернопільського національного технічного університету ім. Івана Пулюя; міжкафедральному науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету ім. Івана Франка; науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету ім. Тараса Шевченка; семінарі кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету.

**Публікації.** За темою дисертаційної роботи опубліковано 25 наукових праць, з них: 12 статей та 13 тез доповідей. У фахових наукових виданнях опубліковано 10 статей, з них 2 опубліковано одноосібно.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 211 найменувань на 21 сторінці, додатків на 4 сторінках. Обсяг роботи становить 212 сторінок, в тому числі основного тексту 160 сторінок.

## **ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ**

**У вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, відображено зв’язок роботи з науковими програмами та темами, сформульовано мету і задачі дослідження, визначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, наведено дані про апробацію результатів роботи.

**У першому розділі** проведено огляд наукової літератури з математичного моделювання масопереносу при фільтрації підземних вод та міграції радіонуклідів у

грунтових середовищах; розглянуто фізичні закони, які описують дані процеси у ґрунтових середовищах в ізотермічних та неізотермічних умовах, наведено відповідні диференціальні рівняння та крайові умови, які описують дані процеси.

При дослідженні процесів масопереносу при фільтрації підземних вод у ґрунтовому середовищі багато дослідників вважали справедливим закон Дарсі  $\vec{V} = -k \text{ grad } h$ , який виражає пропорційність швидкості фільтрації градієнту напору. Це означає, що об'ємна кількість рідини, яка протікає за одиницю часу через одиницю площі при заданому градієнті тиску, не залежить від зміни концентрації розчину. Причому таке припущення вважалось справедливим, якщо концентрація розчинених солей знаходиться в межах від 2-3 до 50-60 г/л.

Отже, при моделюванні процесу масопереносу в пористих середовищах при фільтрації підземних вод з концентрацією солей до 60 г/л параметри фільтрації та масопереносу (коефіцієнт фільтрації, коефіцієнт конвективної дифузії, пористість) вважалися постійними. У зв'язку з цим, масоперенос розчинених у воді солей в основному вивчався на фоні фільтраційного потоку підземних вод, причому, замість фільтрації сольового розчину розглядалась фільтрація чистої води.

Однак ряд практичних задач (фільтрація солевих розчинів із хвостосховищ, добування корисних копалин із надр шляхом їх вилуговування, промивання засолених і забруднених земель, міграція радіонуклідів у ґрунтах та ін.) показали неадекватність існуючих математичних моделей процесам, перерахованим вище.

Вивченням питань математичного моделювання міграції радіонуклідів у ґрунтах присвячені роботи Я.І. Бурака, Є.Я. Чаплі, О.Ю. Чернухи, І.М. Гудкова, С.І. Ляшка, А.П. Власюка, С.-Т. Chen, J.B. Park, Y. Sun, M.M.R. Williams та ін. Ними були встановлені закономірності вертикальної міграції радіонуклідів на різних типах ґрунтів, надходження їх в рослини залежно від біологічних особливостей останніх та від властивостей ґрунтів. На підставі цього запропоновані моделі, які дозволяють прогнозувати залежність концентрації радіонуклідів у ґрунтових середовищах від часу. Однак питання зниження радіонуклідного забруднення ґрунтів з часом в залежності від їх властивостей на даний час ще недостатньо досліджені.

Процес тепло-масопереносу при фільтрації солевих розчинів у недеформованих ґрунтових середовищах в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\text{div}(D(c) \text{ grad } c + D_T(c) \text{ grad } T) - \vec{V} \text{ grad } c = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\vec{V}(c) = -k(c, T) \cdot \text{grad } h + v(c) \text{ grad } c + v_1 \text{ grad } T, \quad \text{div} \vec{V} = 0, \quad (2)$$

$$\text{div}(\lambda \text{ grad } T) - \rho c_p \vec{V}(c) \text{ grad } T = c_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N, C_*, N_*, T, \gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (4)$$

В рівняннях (1), (2), які описують масоперенесення і фільтрацію солевих розчинів в неізотермічних умовах, враховано залежність коефіцієнта фільтрації ґрунтового масиву  $k$ , а отже швидкості фільтрації  $V$  і коефіцієнта конвективної дифузії  $D$  від концентрації сольового розчину, а також вплив осмотичних явищ

( $k = k(c, T)$ ,  $v = v(c)$ ,  $D = D(c)$ ). Рівняння (3) описує теплоперенесення в ґрунтових масивах; (4) – масообмін між рідкою і твердою фазами.

**Другий розділ** присвячений математичному моделюванню нелінійних

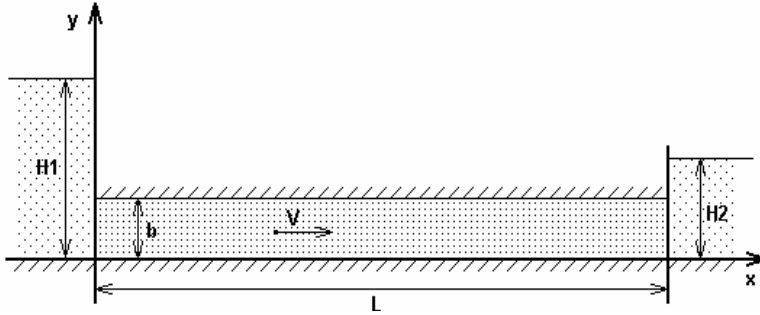


Рис.1. Фільтрація соляного розчину до водозабірника

одновимірних процесів переносу солевих розчинів як у ґрунтових середовищах в ізотермічних, так і в неізотермічних умовах. Зокрема, озглядається процес фільтрації солевих розчинів в горизонтальному протяжному ґрунтовому пласті довжиною  $l$  із одного водного басейну в інший, напори в яких  $H_1$  і  $H_2$  (рис.1).

Нехай процес фільтрації солевих розчинів в ґрунтовому пласті відбувається в ізотермічних умовах, а ґрунтове середовище є недеформівним. Крім того, вважатимемо, що  $l \gg b$  і процес масопереносу можна розглядати в рамках одновимірної моделі. Математична модель розглядуваної задачі описується наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (V(c) \cdot c) - \gamma(c - C_*) = \frac{\partial (\sigma c)}{\partial t}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$V(c) = -k(c) \frac{\partial h}{\partial x} + v(c) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (6)$$

$$h(0) = H_1, \quad h(l) = H_2, \quad c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

$$c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad t \geq 0; \quad l_2 c = \begin{cases} c(l, t) = \tilde{C}_2(t), \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial c(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0, \\ \left[ V(c) \cdot (c - \tilde{C}_2) - D(c) \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для крайової задачі (5)-(8) побудована нова монотонна різницева схема з порядком апроксимації  $O(h_1^2 + \tau)$

$$\begin{aligned} & \mu_{i2}^k d_{i+1}^k \cdot \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \cdot \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_1^2} + r_{+i}^k \cdot \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1} + \\ & + r_{-i}^k \cdot \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_1} - \gamma(C_i^{k+1} - C_*) = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}, \end{aligned}$$

$$C_i^0 = \tilde{C}_0(x_i), \quad x_i = i \cdot h_1, \quad i = \overline{0, N_1}; \quad C_0^k = \tilde{C}_1(t_k), \quad C_{N_1}^k = \tilde{C}_2(t_k), \quad t_k = k \cdot \tau, \quad k = \overline{1, N_2};$$

$$C_{N_1}^{k+1} = \frac{D_i^k + 0,5 \cdot r_{+i}^k \cdot h_1}{D_i^k + 0,5 \cdot h_1 \cdot \left( r_{+i}^k + \frac{\sigma \cdot h_1}{\tau} + \gamma \right)} \cdot C_{N_1-1}^{k+1} + \frac{0,5 \cdot h_1^2 \frac{\sigma}{\tau}}{D_i^k + 0,5 \cdot h_1 \cdot \left( r_{+i}^k + \frac{\sigma \cdot h_1}{\tau} + \gamma \right)} C_{N_1}^k +$$



$$+ \frac{0,5 \cdot h_1^2 \gamma \cdot C_*}{D_i^k + 0,5 \cdot h_1 \cdot \left( r_{+i}^k + \frac{\sigma \cdot h_1}{\tau} + \gamma \right)},$$

де

$$d_i^k = \frac{D(C_i^k) + D(C_{i-1}^k)}{2}, d_{i+1}^k = \frac{D(C_{i+1}^k) + D(C_i^k)}{2}, \mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5 h_1 \cdot |r_i^k|}{d_i^k}}, \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5 h_1 \cdot |r_i^k|}{d_{i+1}^k}},$$

$$r_i^k = r_{+i}^k + r_{-i}^k, r_{+i}^k = \frac{-V_i^k + |V_i^k|}{2} \geq 0, r_{-i}^k = \frac{-V_i^k - |V_i^k|}{2} \leq 0, V_i^k = -k_i^k \frac{h_{i+1}^k - h_{i-1}^k}{2h_1} + v_i^k \frac{C_{i+1}^k - C_{i-1}^k}{2h_1}.$$

В дисертаційній роботі показано, що побудована різницева схема має порядок апроксимації  $O(h_1^2 + \tau)$  відповідної диференціальної крайової задачі і є монотонною при  $\forall h_1, \tau > 0$ . Тому для цієї різницевої схеми можна застосувати принцип максимуму та його наслідки, звідки випливає коректність даної різницевої схеми і збіжність її розв'язку до розв'язку відповідної крайової задачі. Розв'язок різницевої схеми на кожному часовому шарі знайдено методом прогонки. Монотонність різницевої схеми гарантує стійкість методу прогонки.

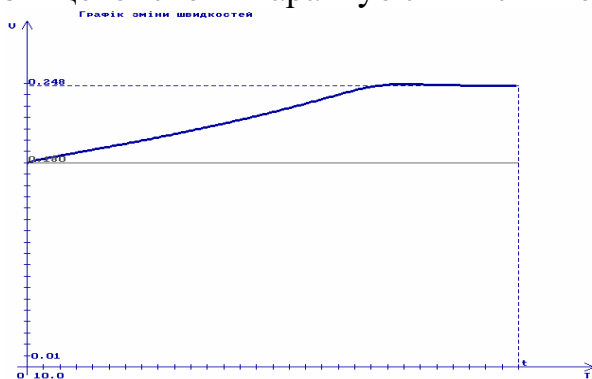


Рис. 2. Графік полів швидкостей фільтрації

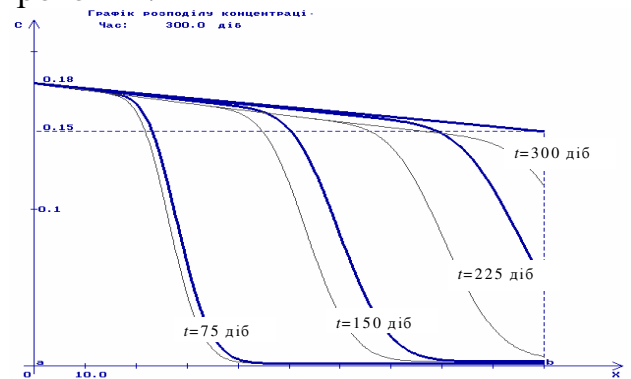


Рис. 3. Динаміка руху фронту концентрації сольових розчинів

На основі програмної реалізації задачі проведено значну кількість числових експериментів та виконано їх аналіз і порівняння результатів для коефіцієнтів фільтрації  $k=const$  і  $k=k(c)$  (рис.2, рис.3).

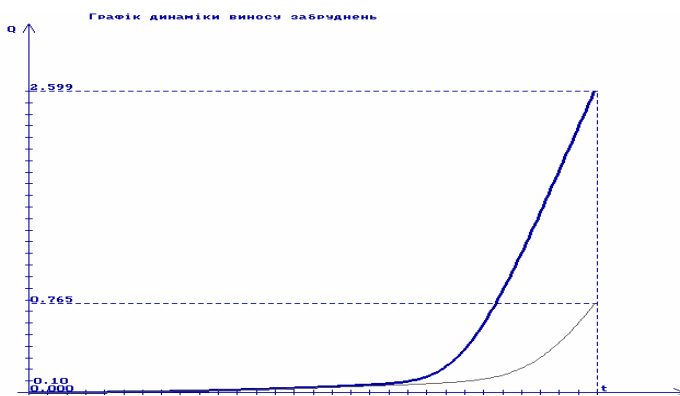


Рис. 4. Динаміка вивозу кількості речовини, що поступає з розчином в басейн стічних вод

Як видно з рис.2, значення швидкості фільтрації води ( $k=const$ ) є постійною, а у випадку фільтрації сольового розчину ( $k=k(c)$ ) - змінюється в залежності від розподілу концентрації сольового розчину по області фільтрації, яка через деякий час при виході процесу на стаціонарний режим, стабілізується на певній величині. Як видно з рис.3, фронт забруднень при

$k=k(c)$  з часом значно випереджає фронт забруднень при  $k=const$ .

В роботі визначено кількість мігруючих речовин  $Q_C$ , яка виноситься фільтраційним потоком за час  $t$  з області фільтрації, і як видно з рис. 4, при  $k=k(c)$  і  $k=const$  може відрізнятись в декілька разів.

В цьому ж розділі досліджено процес фільтрації сольових розчинів з урахуванням залежностей параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину та наявності осмотичних явищ в неізотермічних умовах. При цьому рівняння тепло-масопереносу набуде вигляду

$$\frac{\partial \left( D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} - V(c) \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x \in (0, l), t > 0.$$

Крім того, математична модель (5)-(8) доповниться рівнянням теплопереносу

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - V(c) c_p \frac{\partial T}{\partial x} = c_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (0, l), t > 0$$

з відповідними початковими та граничними умовами для температури.

Числові результати, отримані з використанням звичайної монотонної різницевої схеми (за О.А. Самарським) та нової монотонної різницевої схеми (за А.П. Власюком), достатньо добре співпадають (похибка між ними становить  $0.003 \div 0.000001$  г/л). В зв'язку з цим можна стверджувати, що нова монотонна різницева схема порядку апроксимації  $O(h^2 + \tau)$  достатньо адекватно моделює властивості вихідного нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну.

**Третій розділ** присвячено математичному моделюванню фільтрації сольових розчинів у ґрунтових середовищах у двовимірному випадку.

Розглядається процес фільтрації сольових розчинів із хвостосховища в основі гідротехнічної споруди (рис. 5) з урахуванням впливу осмотичних явищ та залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину. Задано напори у верхньому та нижньому б'єфах  $H_1$  та  $H_2$ . Основа ГТС підстиляється водоупором, що знаходиться на глибині  $b$ .

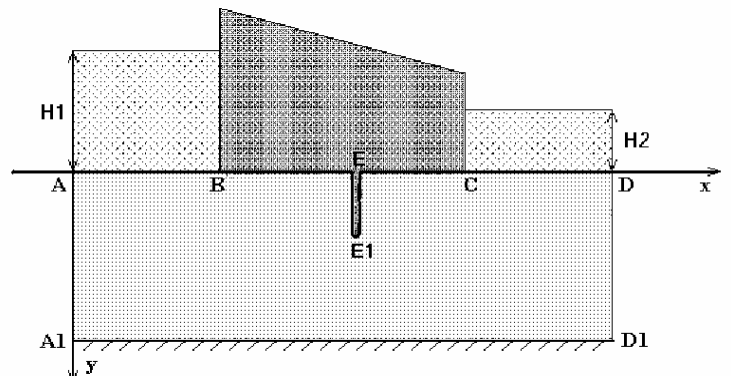


Рис. 5. Фільтрація сольових розчинів в основі ГТС

Математичну модель поставленої задачі можна описати такою крайовою задачею:

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}(c) \operatorname{grad} c) - \vec{V} \operatorname{grad} c - \gamma(c - C_m) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (9)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{K}(c) \operatorname{grad} h) = \mu \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (10)$$

$$\vec{V} = -\mathbf{K}(c) \operatorname{grad} h + \mathbf{v}(c) \operatorname{grad} c, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (11)$$

$$(\vec{V}, \mathbf{n})|_{AA_1D_1D} = (\vec{V}, \mathbf{n})|_{BEE_1C} = 0, \quad t > 0, \quad h|_{AB} = \tilde{H}_1, \quad h|_{CD} = \tilde{H}_2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n}|_{BEE_1C} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n}|_{CD} = 0, \quad lc(x, y, t)|_{AA_1D_1D} = \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \\ C_m, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$c(x, 0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad t > 0, \quad h(x, y, 0) = \tilde{H}_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (14)$$

Числовий розв'язок задачі (9) – (14) знайдено методом скінченних елементів. Для цього з варіаційного запису задачі отримано задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{L}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}(t) = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)}, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}^* \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{L}^*(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}(t) = \mathbf{F}^*, \quad \mathbf{M}^* \cdot \mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{F}^{(0)*}. \quad (16)$$

Наближений розв'язок (15), (16), отримано за допомогою неявної різницевої схеми. Результати числових експериментів крайової задачі (9)-(13) при  $k=k(c)$  і  $k=const$  наведені на рис.6, рис.7.

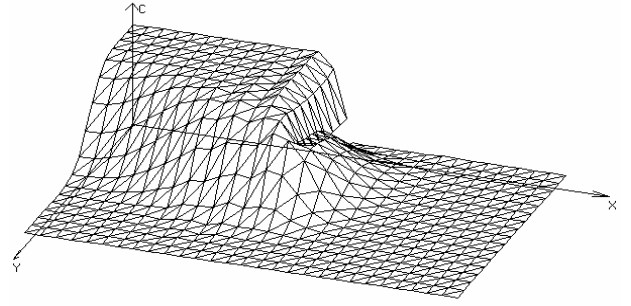
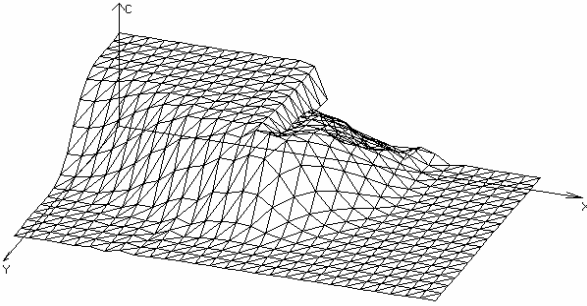


Рис. 6. Розподіл поля концентрації в основі ГТС при  $t=27$  діб для  $k=k(c)$       Рис. 7. Розподіл поля концентрації в основі ГТС при  $t=27$  діб для  $k=const$

При аналізі отриманих результатів числових розв'язків розглянутої вище задачі для сталого коефіцієнта фільтрації ( $k=const$ ) та його залежності від концентрації розчинених солей ( $k=k(c)$ ), можна стверджувати, що фронт концентрації сольових розчинів при  $k=k(c)$  з часом значно випереджає фронт концентрації сольових розчинів при  $k=const$  (що й підтверджується результатами для одновимірної моделі).

В цьому ж розділі проведено математичне моделювання переносу сольових розчинів при плановій стаціонарній та нестаціонарній фільтрації із досконалої свердловини.

Математична модель планової напірної фільтрації сольових розчинів в пласті із досконалої свердловини з довільним замкнутим криволінійним контуром впливу  $\Gamma_2$  (зокрема, концентричне коло), має вигляд:

$$\frac{\partial \left( D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D(c) \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{\partial y} - V_x(c) \frac{\partial c}{\partial x} - V_y(c) \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (x, y) \in G_z, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$\vec{V} = -\frac{k(c)}{b} \text{grad}h, \quad \text{div}(\mathbf{b} \cdot \vec{V}) = 0, \quad h|_{r=r_1} = H_1, \quad h|_{\Gamma_2} = H_2, \quad (x, y) \in G_z, \quad (18)$$

$$c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), (x, y) \in \bar{G}_z, c|_{r=r_1} = \tilde{C}_1(t), l_2 c = \begin{cases} c|_{\Gamma_2} = \tilde{C}_2(t), \\ \left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases} t > 0. \quad (19)$$

Згідно використаного в роботі підходу, здійснено перехід в задачі (17)–(19) до нових незалежних змінних  $\varphi, \psi$  області комплексного потенціалу, де  $\varphi$  – потенціал фільтрації:  $\varphi = -\bar{k}bh$ ,  $\bar{k}$  – усереднений коефіцієнт фільтрації по області фільтрації,  $\psi$  – функція течії. Тоді компоненти усередненої швидкості фільтрації для середовища з усередненим коефіцієнтом фільтрації  $\bar{k}$  визначаються як

$$\bar{V}_x = -\bar{k} \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{b} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{V}_y = -\bar{k} \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{1}{b} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Математична модель задачі (17)–(19), після введення функції течії  $\psi = \psi(x, y)$ , з урахуванням осесиметричності випадку в нових змінних  $\varphi, \psi$  матиме вигляд

$$D(c) \cdot \bar{V}^2(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} - \bar{V}^2(\varphi, \psi) \left( \frac{1}{b} - \frac{\partial D(c)}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{b^2} (c - C_*) = \frac{\sigma}{b} \frac{\partial c}{\partial t}, (\varphi, \psi) \in G_w, t > 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, (x, y) \in G_w, \quad (21)$$

$$x^2(0, \psi) + y^2(0, \psi) = r_1^2, \quad 0 < \psi < \frac{Q}{4}, \quad (22)$$

$$g(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = 0, \quad (\text{зокрема } x^2(\varphi_0, \psi) + y^2(\varphi_0, \psi) = r_2^2), \quad 0 < \psi < \frac{Q}{4}, \quad (23)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = \tilde{C}_0(\varphi), (\varphi, \psi) \in \bar{G}_\omega, \quad c(0, \psi, t) = \tilde{C}_1(t), l_2 c = \begin{cases} c(\varphi_0, \psi, t) = \tilde{C}_2(t), \\ \left. \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \end{cases} t > 0. \quad (24)$$

Розв'язок задачі (20)–(24) знайдено методом скінченних різниць з використанням числових конформних відображень згідно відомих алгоритмів.

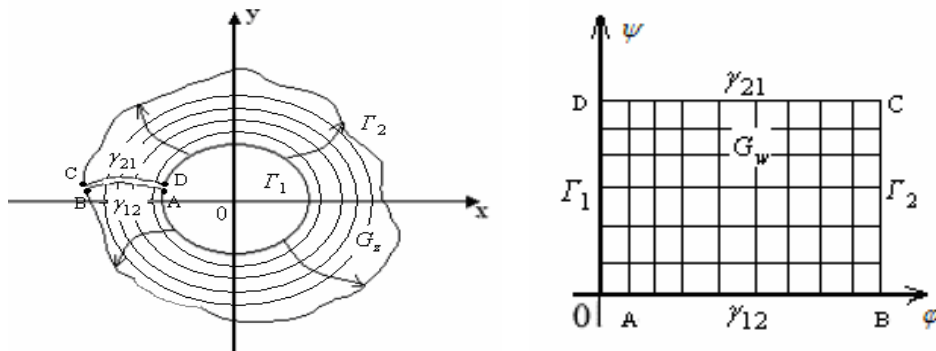


Рис. 8. Конформне відображення двохзв'язної кільцевої області з розрізом на параметричний прямокутник

В роботі також знайдено розв'язок крайової задачі (20)–(24) у випадку, коли контур впливу свердловини  $\Gamma_2$  є криволінійним. Для отримання числового розв'язку використано метод скінченних різниць з використанням числових конформних відображень. У зв'язку з цим, в кільцевій двохзв'язній області фільтрації проведено нескінченно тонкий розріз по лінії течії  $\psi = const$ . Після чого здійснено числове

конформне відображення так розрізаної кільцевої двохзв'язної області на параметричний прямокутник  $G_w$  області комплексного потенціалу (рис. 8).

Математична модель вихідної крайової задачі (17)–(19) в нових змінних  $\varphi, \psi$  матиме вигляд

$$D(c) \cdot \bar{V}^2(\varphi, \psi) \left( \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} \right) - \bar{V}^2(\varphi, \psi) \left( \frac{1}{b} - \frac{\partial D(c)}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \frac{\gamma}{b^2} (c - C_*) = \frac{\sigma}{b^2} \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (\varphi, \psi) \in G_w, \quad t > 0, \quad (25)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = \tilde{C}_0(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in \bar{G}_w, \quad c(0, \psi, t) = \tilde{C}_1(\psi, t), \quad (\varphi, \psi) \in \bar{G}_w, \quad (26)$$

$$c(\varphi_0, \psi, 0) = \tilde{C}_2(\psi, t) \quad \text{або} \quad \frac{\partial c(\varphi_0, \psi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad 0 < \psi < Q, \quad t > 0, \quad (27)$$

$$c(\varphi, 0, t) = c(\varphi, Q, t), \quad \frac{\partial c(\varphi, 0, t)}{\partial \psi} = \frac{\partial c(\varphi, Q, t)}{\partial \psi}, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad t > 0. \quad (28)$$

В результаті числового конформного відображення побудовано гідродинамічну сітку фільтраційного потоку. На основі програмної реалізації задачі проведено ряд числових експериментів для різних вхідних даних задачі та досліджено процес розподілу солей на контурі впливу свердловини з плином часу.

В третьому розділі також отримано числовий розв'язок задачі планової нестационарної фільтрації сольових розчинів із свердловини з криволінійним контуром впливу. В математичній моделі задачі (17)–(19) рівняння стаціонарної фільтрації (18) замінюється рівнянням нестационарної фільтрації

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(c) H \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(c) H \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \varepsilon = \mu \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (x, y) \in G_z, \quad t > 0, \quad (27)$$

Для розв'язування даної задачі в математичній моделі (17), (19), (27) здійснено перехід до змінних  $\xi, \eta$  ( $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ ), використовуючи конформні відображення  $x_\xi = y_\eta$ ,  $x_\eta = y_\xi$ . Числовий розв'язок крайової задачі (17), (19), (27) знайдено різницеvim методом з використанням числових конформних відображень.

В результаті проведення числових експериментів отримано просторово-часові розгортки п'єзометричних напорів, швидкості фільтрації та поля концентрації солей. Проаналізовано залежність отриманих результатів (для вищенаведених полів) від вхідних значень пористості ґрунту  $\sigma$ , коефіцієнтів: фільтрації  $k$ , конвективної дифузії  $D$ , масообміну  $\gamma$ .

В четвертому розділі проведено математичне і комп'ютерне моделювання процесів міграції радіонуклідів та локалізації з використанням фільтрів-вловлювачів та дренажних вловлювачів.

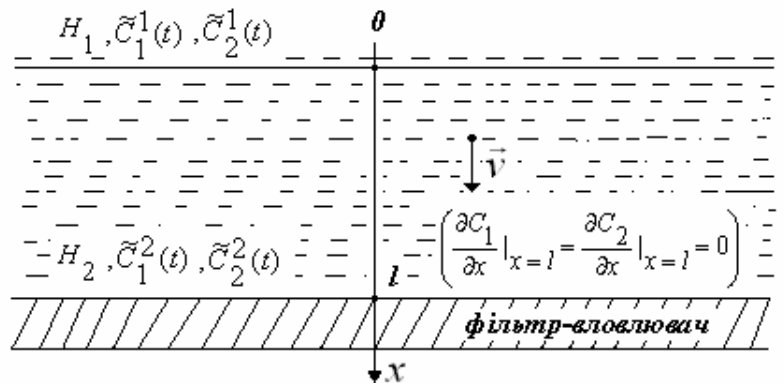


Рис. 9. Вертикальна міграція радіонуклідів до фільтрів-вловлювачів в горизонтальному шарі ґрунту

Розв'язано задачу міграції радіонуклідів (наприклад,  $^{90}\text{Sr}$  (стронцій-90) або  $^{137}\text{Cs}$  (цезій-137)) при їх вертикальній міграції в горизонтальному шарі ґрунту великої протяжності шляхом переносу їх фільтраційним потоком зі швидкістю  $\vec{V}$  під впливом конвективної дифузії (рис. 9), яка описана такою крайовою задачею:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right) - V(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (31)$$

$$V(c_1) = -k(c_1) \frac{\partial h}{\partial x} + v(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, l), \quad (32)$$

$$h(0) = H_1, \quad h(l) = H_2, \quad (33)$$

$$c_1(x, 0) = \tilde{C}_1^0(x), \quad c_2(x, 0) = \tilde{C}_2^0(x), \quad x \in (0, l), \quad (34)$$

$$c_1(0, t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad c_2(0, t) = \tilde{C}_2^1(t), \quad 0 < t < t_1, \quad (35)$$

$$l_2 c_1(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_1^2(t), \\ \frac{\partial c_1(l, t)}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad l_2 c_2(l, t) = \begin{cases} \tilde{C}_2^2(t), \\ \frac{\partial c_2(l, t)}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad 0 < t < t_1. \quad (36)$$

Обчислювальний алгоритм розв'язання крайової задачі (30)–(36) базується на тому, що їй у відповідність було поставлено сукупність двох крайових задач, числовий розв'язок яких отримано з використанням різницевого методу, зокрема, нової монотонної та неявної різницевої схем.

В роботі також отримано числовий розв'язок, відповідної до (30)–(36), крайової задачі тепло-масопереносу.

На рис. 10 показано графічні зображення залежностей концентрацій  $c_1$  та  $c_2$  в ізотермічних умовах при заданні граничних умов 1-го роду.

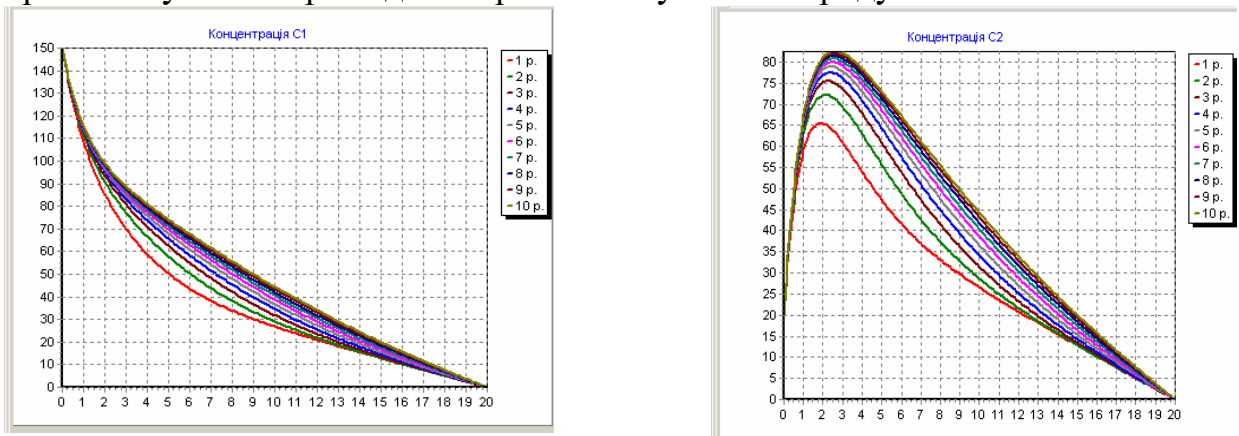


Рис. 10. Графіки розподілів концентрацій  $c_1$  та  $c_2$  при заданні на поверхні ґрунту та на фільтрі-вловлювачі граничних умов 1-го роду

В даному розділі розв'язана двовимірною задачею міграції радіонуклідів та їх локалізація за допомогою дренаж-вловлювачів при плоско-вертикальній напірній фільтрації. В зв'язку з цим розглянуто задачу очищення шару родючого ґрунту від радіонуклідів шляхом переносу їх фільтраційним потоком до системи горизонтальних дренаж з подальшим вловлюванням їх дренами (рис. 11). Нехай маємо

фронтальний переріз ґрунту, в якому на глибині  $b_1$  розташована дренавловлювач радіусом  $r_1$ , відстань між центрами сусідніх дрен дорівнює  $l$ , відстань від центру дрени до водонепроникного шару ґрунту становить  $b_2$  м, товщина верхнього

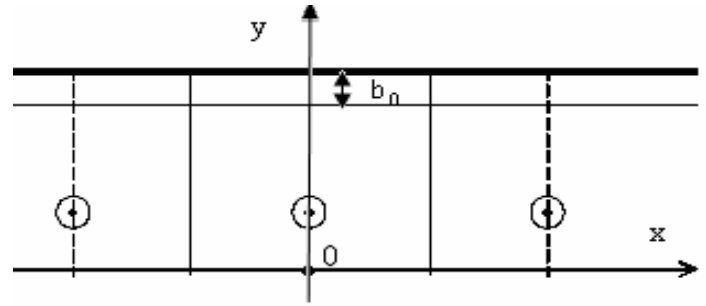


Рис. 11. Горизонтальний систематичний дренаж, наповнений фільтрами-вловлювачами

родючого шару ґрунту становить  $b_0$  м.

В силу симетрії картини течії, розглядається лише фрагмент області фільтрації, обмежений двома екіпотенціальними лініями і двома лініями течії – область  $AB_1B_2BCD$  (криволінійний чотирикутник) (рис. 12). Вона є областю з чотирма відміченими точками А, В, С, D, які при конформному відображенні перейдуть у вершини параметричного прямокутника  $G_w$  (область комплексного потенціалу) (рис. 13).

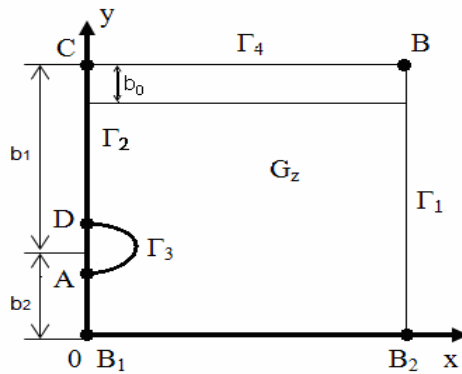


Рис. 12. Фрагмент фізичної області перенесення радіонуклідів

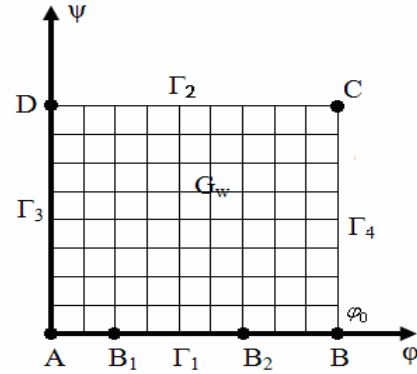


Рис. 13. Параметричний прямокутник в області комплексного потенціалу

Для формалізації постановки задачі розглянуто дві математичні моделі. В першій з них міграція радіонуклідів вивчається лише в рідкій фазі фільтруючої рідини

$$D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_y \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (x, y) \in G_z, \quad t > 0, \quad (37)$$

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in G_z, \quad \varphi|_{\Gamma_3} = 0, \quad \varphi|_{\Gamma_4} = \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (38)$$

$$c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{G}_z, \quad \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (39)$$

$$c|_{\Gamma_3} = \tilde{C}_1(x, y, t), \quad (x, y) \in G_z, \quad t > 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0, \quad (40)$$

$$c|_{\Gamma_4} = \tilde{C}_2(x, y, t), \quad (x, y) \in G_z, \quad t > 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{\Gamma_4} = 0. \quad (41)$$

В другій – міграція радіонуклідів вивчається як у фільтраційному потоці (конвективно рухомому поровому розчині), так і у воді, зв'язаній зі скелетом ґрунту

$$D_1 \left( \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - V_x \frac{\partial c_1}{\partial x} - V_y \frac{\partial c_1}{\partial y} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 = \sigma \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (x, y) \in G_z, \quad t > 0, \quad (42)$$

$$D_2 \left( \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 = \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (x, y) \in G_z, \quad t > 0, \quad (43)$$

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in G_z, \quad \varphi|_{\Gamma_3} = \varphi_1, \quad \varphi|_{\Gamma_4} = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (44)$$

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0^1(x, y), \quad c_2(x, y, 0) = \tilde{C}_0^2(x, y), \quad (x, y) \in \bar{G}_z, \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (45)$$

$$c_1|_{\Gamma_3} = \tilde{C}_1^1(x, y, t) \quad \text{або} \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0, \quad c_2|_{\Gamma_3} = \tilde{C}_1^2(x, y, t) \quad \text{або} \quad \frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0, \quad (46)$$

$$c_1|_{\Gamma_4} = \tilde{C}_2^1(x, y, t) \quad \text{або} \quad \frac{\partial c_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad c_2|_{\Gamma_4} = \tilde{C}_2^2(x, y, t) \quad \text{або} \quad \frac{\partial c_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_4} = 0. \quad (47)$$

В результаті побудови числового конформного відображення отримано різницеву гідродинамічну сітку фільтраційного потоку (рис.14), на якій отримано числовий розв'язок задачі фільтрації.

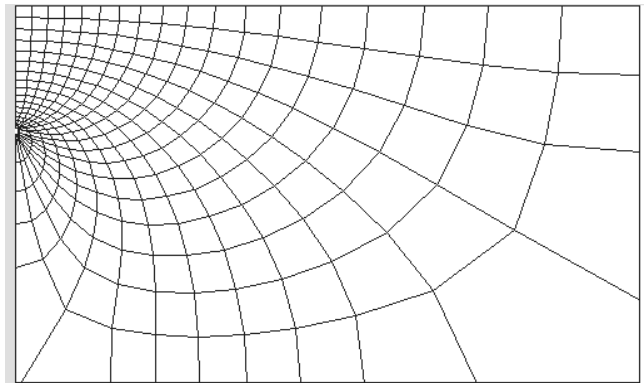


Рис. 14. Вигляд гідродинамічної сітки фільтраційного потоку

Використовуючи метод скінченних різниць, розв'язано задачі масопереносу (37)-(41), (42)-(47). В результаті проведених числових експериментів отримано розподіл концентрації радіонуклідів з часом по області фільтрації для обох математичних моделей для різних вхідних даних задач (рис.15, рис.16).

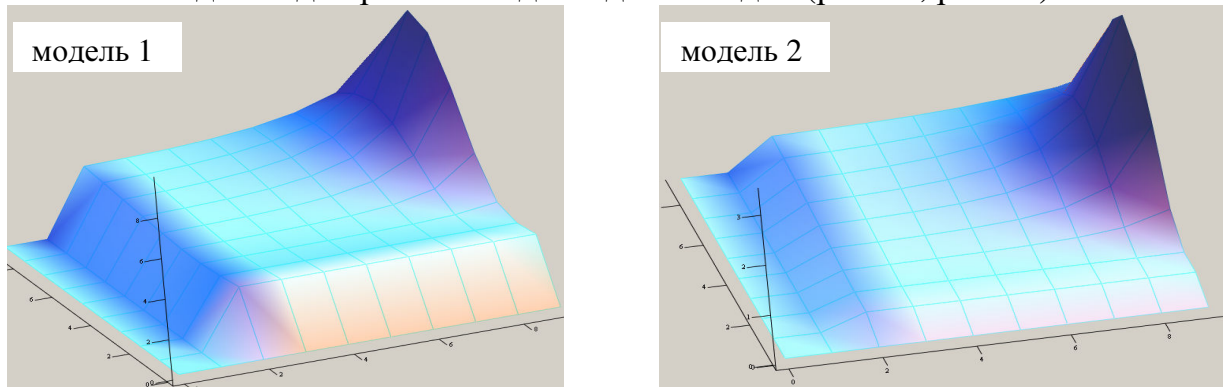


Рис. 15. Візуалізація фронту концентрації в родючому шарі ґрунту на момент часу  $t=1$  місяць



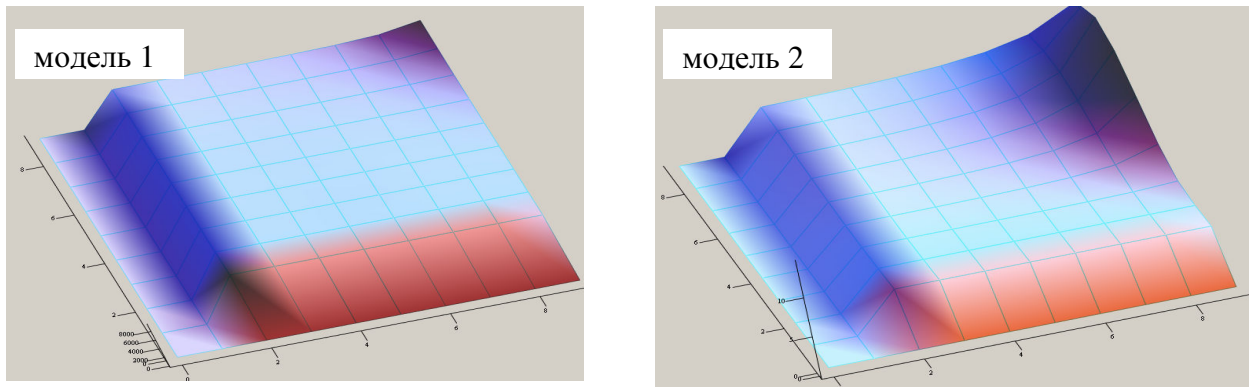


Рис. 16. Візуалізація фронту концентрації в родючому шарі ґрунту на момент часу  $t = 6$  місяців

Як видно з вищенаведених графіків, при розгляді моделі 1 через 6 місяців від початку забруднення концентрація радіонуклідів зменшиться до допустимої норми і родючий шар ґрунту стане придатним до подальшого використання, а для моделі 2 цього проміжку часу ще недостатньо.

Розроблений комплекс програм реалізовано у вільному для користування середовищі Delphi XE2 Starter Edition.

## ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливу наукову задачу: розроблено нові математичні моделі процесів фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів з урахуванням взаємовпливу характеристик фільтраційного потоку та ґрунтового середовища в ізотермічних та неізотермічних умовах. Розвинено числові методи скінченних різниць, числових конформних відображень розв'язання відповідних нелінійних крайових задач.

При цьому отримано такі наукові і практичні результати.

1. Побудовано нові нелінійні математичні моделі сформульованих в роботі одновимірних та двовимірних задач фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах при залежності параметрів фільтрації та масопереносу від концентрації солей, врахуванні осмосу, ізотермічних та неізотермічних умов.

2. Розвинено числові методи скінченних різниць, конформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач в складних областях з криволінійними межами та вперше знайдено їх числові розв'язки.

3. Доведено точність нової монотонної різницевої схеми для одновимірного нелінійного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну та використано дану різницеву схему для розв'язання задач фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах.

4. На основі проведених числових експериментів, основні результати яких наведені у вигляді графічних зображень, встановлено суттєву відмінність між процесами фільтрації сольових розчинів (врахування залежності параметрів фільтрації та масопереносу від концентрації) та фільтрацією чистої води у ґрунтовому середовищі. Так, при  $k=k(c)$  швидкість фільтрації монотонно зростає до насичення і перевищує швидкість фільтрації при  $k=const$  в 1,4 рази, кількість винесеної речовини фільтраційним потоком збільшиться в 3,4 рази протягом року.

Неізотермічні умови значно впливають на процеси фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів в ґрунтових середовищах і це проявляється в їх інтенсивнішому проходженні з часом.

5. Практичне значення дисертаційної роботи полягає в наступному. Результати роботи застосовані при розробці конструкції екрану верхнього і нижнього басейнів Дністровської ГАЕС, технології проведення земляних робіт при його спорудженні та бетонної підготовки. Матеріали кандидатської дисертації використано в навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами за напрямом підготовки 0403 «Прикладна математика», частина результатів дисертаційних досліджень теоретичного і практичного характеру використана при розробці спецкурсів «Математичне та комп'ютерне моделювання природних та техногенних процесів», «Числові методи конформних та квазіконформних відображень», «Числові методи математичної фізики».

### **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Власюк А. П. Чисельне дослідження одновимірної задачі масопереносу сольових розчинів у ґрунтових масивах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – К., 2004. – Вип. 4. – С. 228-237.

2. Власюк А. П. Моделювання процесу масопереносу сольових розчинів в основі гідротехнічного об'єкта / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник Хмельницького національного університету. Сер.: технічні науки. – Хмельницький, 2005. – Ч. 1, том 2. – С. 5-9.

3. Власюк А. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. наук. – К., 2005. – Вип. 3. – С. 217-226.

4. Власюк А. П. Числове моделювання одновимірної задачі переносу сольових розчинів при фільтрації до водозабірника в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2006. – Вип. 4 (36). Ч. 2. – С. 39-48.

5. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. наук. – К., 2007. – Вип. 4. – С. 130-134.

6. Остапчук О. П. Математичне моделювання процесу переносу сольових розчинів при нестационарній фільтрації із свердловини / О. П. Остапчук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2007. – Вип. 4 (40). Ч. 3. – С. 329-334.

7. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задачі стаціонарної фільтрації до горизонтального дренажу при наявності вільної поверхні в неоднорідному ґрунтовому середовищі / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, М. Г. Раковець // Вісник НУВГП. – Рівне, 2008. – Вип. 4 (44). – С. 72-79.

8. Остапчук О. П. Чисельне моделювання процесу очищення горизонтального шару ґрунту від радіонуклідів при їх вертикальній міграції / О. П. Остапчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: технічні науки. – Кам'янець-Подільський, 2010. – Вип. 4. – С. 162-172.

9. Остапчук О. П. Математичне та комп'ютерне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в ґрунтовому масиві в неізотермічних умовах /

О. П. Остапчук, М. О. Ющук // Вісник НУВГП. Сер.: технічні науки. – Рівне, 2011. – Вип. 3 (55). – С. 188-195.

10. Власюк А. П. Чисельне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів в двозв'язних кільцевих областях / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, А. Ю. Шмендрук // Вісник НУВГП. Сер.: технічні науки. – Рівне, 2012. – Вип. 2 (58). – С. 204-211.

11. Власюк А. П. Числове моделювання масопереносу сольових розчинів під гідротехнічними спорудами / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2006. – Вип. 4 (36). Ч. 2. – С. 30-38.

12. Власюк А. П. Числове моделювання процесу переносу сольових розчинів в двозв'язних кільцевих областях в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Вісник НУВГП. – Рівне, 2007. – Вип. 4 (40). Ч. 3. – С. 293-298.

13. Власюк А. П. Чисельне дослідження однієї задачі масопереносу сольових розчинів у ґрунтових масивах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Проблеми математичного моделювання сучасних технологій (ПММ-2002)». – Хмельницький, 2002. – С. 24.

14. Власюк А. П. Чисельне моделювання переносу сольових розчинів в основі ґрунтової греблі / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів, 2004. – С. 33.

15. Власюк А. П. Чисельне моделювання переносу сольових розчинів в основах гідротехнічних об'єктів / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. школи-семінару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Тернопіль, 2004. – С. 217-219.

16. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». – Кам'янець-Подільський, 2004. – С. 248.

17. Власюк А. П. Числове моделювання однієї задачі про утилізацію радіонуклідів / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Бердянськ, 2005. – С. 111-113.

18. Власюк А. П. Побудова монотонної різницевої схеми для одновимірного нелінійного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Бердянськ, 2005. – С. 113-114.

19. Власюк А. П. Числове моделювання міграції радіонуклідів при горизонтальній фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2006. – С. 180-181.

20. Власюк А. П. Математичне моделювання задачі про утилізацію радіонуклідів в шарі ґрунту / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. ім. академіка М. Кравчука. – К., 2006. – С. 57.

21. Власюк А. П. Числове моделювання міграції радіонуклідів при плановій фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Чернівці, 2007. – С. 72-74.

22. Власюк А. П. Застосування чисельних конформних відображень до розв'язання нестационарної задачі фільтрації підземних вод / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – Київ – Рівне, 2008. – С. 250-252.

23. Власюк А. П. Розв'язання задачі фільтрації рідини до горизонтального дренажу з використанням чисельних конформних відображень / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. ім. ак. М. Кравчука. – К., 2008. – С. 71.

24. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації із свердловини в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Міжн. конф. ім. академіка М. Кравчука. – К., 2010. – С. 90.

25. Власюк А. П. Числове моделювання локалізації радіонуклідів за допомогою дрен-вловлювачів при плоско-вертикальній напірній фільтрації / А. П. Власюк, О. П. Остапчук // Тези доп. Всеукр. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2013. – С. 43.

## АНОТАЦІЯ

**Остапчук О. П. Математичне моделювання фільтрації сольових розчинів у ґрунтових середовищах з урахуванням техногенних чинників.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Тернопіль, 2013.

Дисертаційна робота присвячена питанням математичного моделювання процесів фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах з урахуванням взаємовпливу характеристик фільтраційного потоку та ґрунтового середовища в ізотермічних та неізотермічних умовах.

В дисертації побудовано нові нелінійні математичні моделі процесів фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах при залежності параметрів фільтрації та масопереносу від концентрації солей, урахуванні осмотичних явищ, ізотермічних та неізотермічних умов. Розвинено числові методи розв'язання поставлених нелінійних крайових задач в складних областях з криволінійними межами.

Доведено точність побудованої нової монотонної різницевої схеми для одновимірного нелінійного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну та адаптовано її для розв'язання задач фільтрації сольових розчинів та міграції радіонуклідів у ґрунтових середовищах.

Розроблено обчислювальні алгоритми розв'язку поставлених задач, здійснено їх програмну реалізацію, проведено серію числових експериментів, на основі яких показано суттєву відмінність між процесами фільтрації сольових розчинів та фільтрацією чистої води в ґрунтовому середовищі, досліджено процеси міграції та вловлювання радіонуклідів з використанням фільтрів та дрен-вловлювачів.

**Ключові слова:** математичне моделювання, нелінійна крайова задача, конформні відображення, метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, монотонна різницева схема, фільтрація, масоперенос, тепло-масоперенос, осмос.

## АННОТАЦИЯ

**Остапчук О. П. Математическое моделирование фильтрации солевых растворов в грунтовых средах с учетом техногенных факторов.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя, Тернополь, 2013.

Диссертационная работа посвящена вопросам математического моделирования процессов фильтрации солевых растворов и миграции радионуклидов в грунтовых средах с учетом взаимовлияния характеристик фильтрационного потока и грунтовой среды в изотермических и неизотермических условиях.

В диссертации построены новые нелинейные математические модели процессов фильтрации солевых растворов и миграции радионуклидов в грунтовых средах при зависимости параметров фильтрации и массопереноса от концентрации солей, учете осмотических явлений, изотермических и неизотермических условий. В частности, построены новые одномерные математические модели фильтрации солевых растворов в грунтовых средах к водозаборнику в изотермических и неизотермических условиях.

Построены новые двумерные математические модели процессов фильтрации солевых растворов в грунтовых средах: математическая модель двумерной задачи фильтрации солевых растворов в основе гидротехнического сооружения; математическая модель двумерной задачи фильтрации солевых растворов из скважины.

Построены новые линейные и нелинейные математические модели процессов миграции и улавливания радионуклидов с использованием фильтров-ловушек и дрен-ловушек, как в одномерном, так и в двумерном случае, а именно: в горизонтальном слое грунта; при напорной фильтрации в горизонтальном слое грунта к системе симметрично расположенных дрен-ловушек. Исследованы процессы миграции и улавливания радионуклидов с использованием фильтров и дрен-ловушек, на основании чего можно судить о пригодности использования загрязненных земель в сельском хозяйстве.

Развиты численные методы решения поставленных нелинейных краевых задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типов в сложных областях с криволинейными границами. Доказана точность построенной новой монотонной разностной схемы для одномерного нелинейного уравнения параболического типа, содержащего первую производную, и указанная схема адаптирована для решения задач фильтрации солевых растворов и миграции радионуклидов в грунтовых средах.

Разработаны вычислительные алгоритмы решения поставленных задач, осуществлена их программная реализация, проведена серия численных экспериментов, на основе которых показано существенное отличие между процессами фильтрации солевых растворов и фильтрацией чистой воды в грунтовой среде. А именно, на основании анализа полученных результатов численных

решений рассматриваемых задач для постоянного коэффициента фильтрации ( $k=const$ ) и его зависимости от концентрации растворенных солей ( $k=k(c)$ ), сделан вывод, что фронт концентрации солевых растворов при  $k=k(c)$  со временем значительно опережает фронт концентрации солевых растворов при  $k=const$ . Кроме того, показаны отличия в распределении скоростей фильтрационного потока и в количестве выноса растворимого вещества в обоих случаях

Результаты диссертационных исследований могут быть использованы при проектировании и строительстве гидротехнических сооружений и других зданий, попадающих в зону влияния высококонцентрированных солевых растворов, при добыче полезных ископаемых из недр путем их растворения и выноса фильтрационным потоком с последующим улавливанием системой скважин, при прогнозировании очистки радиоактивно загрязненных плодородных земель.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, нелинейная краевая задача, конформные отображения, метод конечных разностей, метод конечных элементов, монотонная разностная схема, фильтрация, массоперенос, тепло-массоперенос, осмос.

## ANNOTATION

**Ostapchuk O. P. Mathematical modeling of filtration of salt solutions in soils considering anthropogenic factors. – Manuscript.**

Dissertation for a Technical Sciences Candidate Degree on specialty 01.05.02 - mathematical modeling and computational methods. - Ivan Pul'uj Ternopil National Technical University, Ternopil, 2013.

The thesis is devoted to the mathematical modeling of filtration of brine and radionuclide migration in soils considering interaction of filtration current characteristics and soil environment under isothermal and non-isothermal conditions.

The thesis presents new nonlinear mathematical models of brine filtering processes and radionuclide migration in soils with filtering options and mass transfer depending on salts concentration and osmotic phenomena, isothermal and non-isothermal conditions. The numerical methods for solving the set of nonlinear boundary value problems in complex domains with curved boundaries have been developed.

Precision of the new monotone difference scheme for one-dimensional nonlinear equation of parabolic type, containing the first derivative has been proved and it has been adapted to meet the challenges of salt solutions filtration and radionuclides migration in soil environments.

Computational algorithms for solution of the formulated tasks have been developed, their software implementation have been fulfilled. A series of conducted numerical experiments became the basis to show a significant difference between the processes of salt solutions filtration and pure water filtration in the soil environment. The processes of radionuclide migration and trapping using filters and drain-traps have been studied.

**Keywords:** mathematical modeling, nonlinear problem, conformal mapping, method of finite differences, method of finite elements, monotone difference scheme, filtration, mass transfer, heat transfer, osmosis.