

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

СТЕПАНЧЕНКО ОЛЬГА МИКОЛАЇВНА

УДК 532.72: 532.4: 519.63

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗЧИНЕННЯ ТА  
ВИЛУГОВУВАННЯ ВОДОРОЗЧИННИХ ПОРІД З ОСНОВ ТА  
ФУНДАМЕНТІВ ГІДРОТЕХНІЧНИХ СПОРУД**

**01.05.02** – математичне моделювання та обчислювальні методи

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**дисертації на здобуття наукового ступеня**  
**кандидата технічних наук**

Тернопіль — 2013

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному університеті водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України, м. Рівне

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор  
**Власюк Анатолій Павлович,**  
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне  
професор кафедри прикладної математики

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Біляєв Микола Миколайович,**  
Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка  
В.Лазаряна, м. Дніпропетровськ  
завідувач кафедри гідравліки та водопостачання;

кандидат технічних наук, доцент  
**Петрик Михайло Романович,**  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, м. Тернопіль  
професор кафедри програмної інженерії.

Захист відбудеться «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 р. о \_\_\_\_ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради **К 58.052.01** у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя (46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56, ауд. 79).

3 дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя (46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56).

Автореферат розісланий «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 р.

*Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради К58.052.01*

Б.Г. Шелестовський

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Гідротехнічні об'єкти відносяться до споруд тривалого терміну експлуатації, підвищеної небезпеки та складності. У минулому столітті в Україні було побудовано багато великих гідротехнічних споруд, до яких відносяться гідроелектростанції, греблі водосховищ, магістральні канали, шлюзи, насосні станції, гідромеліоративні системи та ін.

Гідротехнічні споруди (ГТС) повинні задовольняти вимогам високої надійності, тривалої безвідмовної експлуатації, прогнозованості технічного стану, високої економічної та екологічної безпеки. Аварії на гідротехнічних об'єктах можуть мати масштабні катастрофічні наслідки з людськими жертвами, значними матеріальними, екологічними та економічними втратами. Проблема надійної і безпечної експлуатації будівель і споруд, захисту населення від катастроф техногенного характеру має в Україні державне значення. Ці питання відображені в Законі України «Про захист населення від надзвичайних ситуацій техногенного та природного характеру» (08.07.2002 р.), в Постанові Кабінету Міністрів України «Про забезпечення надійності і безпечної експлуатації будівель, споруд та інженерних мереж» (05.05.1997 р.). Тому розробка методів розрахунку надійності та довговічності основ і фундаментів ГТС має важливе державне значення.

Основним конструкційним матеріалом у будівельній галузі і особливо у будівництві гідротехнічних об'єктів є бетон і залізобетон. Висока техніко-економічна ефективність бетону та залізобетону обумовлена його великою довговічністю та низькими експлуатаційними витратами. Разом з тим відомі численні випадки швидкої руйнації бетону після 30-50 років експлуатації. Тому актуальною є задача вивчення надійності та довговічності основ та фундаментів ГТС, процесів деградації бетону, створення математичних моделей, які описували б динаміку процесів розчинення пластів солей та їхніх включень в основах ГТС та корозії бетонних фундаментів.

Питаннями розчинення порід і засолених ґрунтів, корозією бетонів та масопереносом у підземних водах, теорією дифузії займались: О.М. Щукарев, І.Г. Богуський, М.О. Каяндер, А. Нернст, О.М. Патрашев, М.Х. Арутюнян, С.М. Нумеров, І.І. Ляшко, С.І. Ляшко, В.І. Лаврик, І.В. Сергієнко, В.С. Дейнека, В.В. Скопечський, А.А. Глушенко, О.Я. Олійник, М.М. Веригін, О.В. Ликов, Б.С. Шержуков, В.М. Ніколаєвський, А.Я. Бомба, А.П. Власюк, Я.Г. Савула, Г.А. Шинкаренко, В.С. Голубев, М.М. Біляєв, В.М. Булавацький, А.Ф. Мілютін, М.Р. Петрик, Б.В. Гусев, В.М. Москвін, О.С. Файвусович, І.В. Бабушкін та інші вчені. Їхніми зусиллями дані дослідження були поставлені на строгу математичну основу і отримали значний розвиток. Зокрема в роботах М.М. Веригіна розглянуті найпростіші одновимірні моделі на основі диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. В роботах В.І. Лаврика і А.Ф. Мілютіна розглянуті лінійні моделі. В роботах А.П. Власюка – одновимірні та двовимірні лінійні нестационарні моделі. Дисертаційна робота є продовженням і розвитком даних робіт. В ній розглянуті математичні моделі процесів

розчинення та вилуговування солей в яких враховано нелінійні ефекти як в диференціальних рівняннях, так і в граничних умовах.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась згідно з держбюджетними науково-дослідними темами кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, а саме:

1. «Математичне та комп'ютерне моделювання природних, техногенних і інформаційних систем» (термін виконання з 01.01.2004 по 31.12.2006 рр.), № держреєстрації 0104u003122.

2. «Математичне та комп'ютерне моделювання впливу природних та техногенних факторів на стан ґрунтових основ енергетичних об'єктів» (термін виконання з 01.01.2007 по 31.12.2009 рр.), № держреєстрації 0107u004173.

3. «Математичне та комп'ютерне моделювання фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (термін виконання з 01.01.2010 по 31.12.2012 рр.), № держреєстрації 0110u000816.

### **Мета і задачі дослідження.**

*Метою досліджень* є вдосконалення існуючих та створення нових одновимірних та двовимірних математичних моделей процесів розчинення та вилуговування солей та водорозчинних порід з основ та фундаментів ГТС на основі нелінійних диференціальних рівнянь, які описують процеси фільтрації підземних вод, тепло - та масопереносу.

Розвинення скінченно-різницевих методів знаходження наближених розв'язків відповідних крайових задач, зокрема в областях складної геометричної форми, розроблення алгоритмів, здійснення програмної реалізації, проведення числових експериментів сформульованих задач.

Для досягнення мети були поставлені та вирішені наступні завдання:

1. Розвинені фізичні постановки задач процесів розчинення та вилуговування солей і розчинних порід з основ і бетонних фундаментів гідротехнічних споруд з врахуванням нелінійності процесу розчинення, неізотермічних умов, наявності рухомих меж областей складної геометричної форми, в яких досліджуються дані процеси.

2. Вдосконалені та побудовані нові нелінійні математичні моделі для сформульованих фізичних задач в одновимірній та двовимірній постановці.

3. Розвинені числові методи розв'язання поставлених нелінійних крайових задач в областях складної геометричної форми з рухомими межами, що включають побудову числових конформних відображень, розробку нових монотонних різницевих схем для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну.

4. Розроблені обчислювальні алгоритми та створене програмне забезпечення для числового розв'язання поставлених задач.

5. Проведені числові експерименти. Досліджено вплив лінійних та

нелінійних ефектів, пов'язаних з фільтрацією, дифузією, осмосом, термодифузією, на швидкість розчинення пластів солі, водорозчинних порід, корозії бетону та розвитку карстових порожнин.

*Об'єктом дослідження* є процеси розчинення і вилугування солей та водорозчинних порід з основ та фундаментів ГТС, які приводять до корозії та просідання фундаментів гідротехнічних споруд, виникнення і розвитку карстових порожнин.

*Предметом досліджень* є нелінійні математичні моделі процесів розчинення та вилугування солей та розчинних порід з основ та фундаментів гідротехнічних споруд.

**Методи дослідження:** числові методи розв'язання крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь в областях з криволінійними та рухомими межами, зокрема: метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод числових конформних відображень областей складної геометричної форми з рухомими межами.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає в наступному:

1. Вперше побудовано нелінійні математичні моделі розчинення сольових включень в ґрунтових основах ГТС та корозії їх бетонних фундаментів в неізотермічних умовах при наявності осмотичних явищ з врахуванням нелінійної залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації та температури порового розчину.

2. Вперше отримано нові нелінійні балансову і кінематичну граничні умови на межі фронту розчинення в ізотермічних та в неізотермічних умовах в моделях розчинення та вилугування водорозчинних порід з основ та фундаментів ГТС.

3. Вперше побудовано нову монотонну різницеву схему для числового розв'язання нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну (конвективний член), та застосовано цю схему до розв'язання крайових задач розчинення сольових включень в ґрунтових основах та вилугування водорозчинних порід з бетонних фундаментів гідротехнічних споруд.

4. Вдосконалено алгоритми побудови числових конформних відображень областей з рухомими межами щодо урахування часу, як параметру, що впливає на форму області, в якій досліджується процес.

**Практичне значення отриманих результатів.** З допомогою розроблених математичних моделей і проведених числових експериментів досліджено розчинення сольових пластів і розчинних порід ґрунтовими водами, виникнення і розвиток карстових потоків і порожнин, корозію бетонних фундаментів. Розроблені математичні моделі та алгоритми розрахунку дають можливість визначати тривалість та глибину зони розчинення сольових пластів та включень чи розчинних порід в ґрунті, глибину корозії бетону, зміну міцності бетонного фундаменту внаслідок корозії першого виду. Нова монотонна різницева схема підвищеного порядку точності та вдосконалений числовий метод конформних відображень можуть бути використані для розв'язання загального класу задач в

областях з рухомими межами. Результати даної дисертації впроваджено в процесі виконання держбюджетної науково-дослідної роботи «Аналіз напружено-деформівного стану і розробка оптимальної конструкції монтажної шахти водовипуску Дністровської ГАЕС» (№4-78), 2006 р.

Окремі теоретичні положення та результати дисертаційної роботи використані у спецкурсах «Математичне і комп'ютерне моделювання природних та техногенних процесів», «Чисельні методи математичної фізики», «Чисельні методи конформних та квазіконформних відображень», які читались в НУВГП студентам спеціальності «Прикладна математика» і використовувались ними при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт.

**Особистий внесок здобувача** полягає в безпосередній участі в проведенні теоретичних досліджень, обґрунтуванні математичних моделей, доведенні нових крайових умов, розробці алгоритмів розрахунків та самостійному проведенні числових експериментів, самостійному узагальненню окремих етапів досліджень, оформленні проміжних результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей та дисертаційної роботи в цілому. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належить: в роботі [5] — побудова математичної моделі розчинення необмеженого монолітного пласта солі та аналіз отриманих результатів; в роботі [6] — побудова нової монотонної різницевої схеми для одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну; в роботі [11] — розробка різницевої схеми, розробка числового методу для розв'язку дискретизованої задачі, розробка програми та аналіз отриманих результатів; в роботі [12] — побудова нелінійної математичної моделі розчинення пласта солі, розробка числового методу для розв'язання крайової задачі та аналіз отриманих результатів; в роботі [13] — обґрунтування нової балансової умови в неізотермічних умовах, побудова математичних моделей, розробка обчислювального алгоритму та розробка програмного забезпечення; в роботі [18] — побудова нелінійної математичної моделі розчинення сольового включення, розробка числового методу для розв'язку отриманої задачі та аналіз отриманих результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації доповідались й обговорювались на міжнародних та вітчизняних конференціях: Міжнародній конференції „Проблеми математичного моделювання сучасних технологій” (Хмельницький, 2002); міжнародних школах-семінарах ”Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності” (PDMU) (Тернопіль, 2004; Бердянськ, 2005; Чернівці, 2007; Рівне, 2008; Львів, 2010); Всеукраїнських наукових конференціях “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (Львів, 2004, 2005); Всеукраїнській науково-методичній конференції „Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Камянець-Подільський, 2004); Міжнародних наукових конференціях ім. акад. М.Кравчука (Київ, 2006, 2010); Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2013).

В цілому дисертаційна робота обговорювалась на розширеному науковому

семінарі кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, на міжкафедральному науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету ім. І. Франка, на науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету імені Тараса Шевченка та на семінарі кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету.

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 20 наукових праць, у тому числі: 8 статей у наукових фахових виданнях з технічних наук, 2 статті опубліковано одноосібно, та 12 тез конференцій.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, який налічує 198 найменувань на 23 сторінках. Дисертація містить 72 рисунки з них 64 в додатках, 5 таблиць на 4 сторінках. Обсяг дисертації становить 232 сторінок, основний текст роботи викладено на 160 сторінках.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність вибраної теми, відображено зв'язок роботи з науковими програмами та темами, сформульовано предмет та мету досліджень, визначено наукову новизну роботи і практичне значення отриманих результатів, наведено відомості з апробації роботи та публікації за темою дисертації.

У **першому розділі** дисертаційної роботи наведено огляд літератури з питань розчинення та вилуговування солей та водорозчинних порід а також з питань корозії бетонних фундаментів. Розглянуті фізичні та фізико-хімічні процеси, які протікають при розчиненні солей та водорозчинних порід. Проаналізований склад, структура та фізико-хімічні властивості бетону, механізми його тверднення та деградації, види корозії, які спричиняють його руйнування.

Наведений аналіз стану наукових досліджень з математичного моделювання досліджуваних проблем. Зазначено, що об'єкти досліджень – гірські породи, бетон, мають складну структуру і властивості, а процеси розчинення, фільтрації, дифузії, осмосу – взаємопов'язані і важко піддаються моделюванню. Оскільки математичні моделі, які враховували б всі основні явища і процеси, описуються нелінійними диференціальними рівняннями другого порядку і не піддаються аналітичному розв'язанню, то більшість авторів використовує спрощені одновимірні моделі, які не дають можливості відповісти на значну кількість питань наукового та прикладного характеру. В даній галузі порівняно невелика кількість лабораторних та натурних досліджень. Часто відсутні надійні експериментальні дані, що утруднює процеси моделювання. Тому створення обґрунтованих математичних моделей має наукове і прикладне значення. На основі аналізу літературних джерел в цьому розділі поставлені задачі наукових досліджень.

У **другому розділі** дисертаційної роботи розглянуто основні математичні

моделі процесів розчинення та вилугування солей з гірських порід та бетонних фундаментів.

Процес масопереносу водорозчинних речовин при фільтрації підземних вод в насичених водою ґрунтах, бетонах, частково проникних породах описується наступною системою нелінійних диференціальних рівнянь:

1) рівняннями фільтрації підземних вод

$$\vec{V} = -\mathbf{K}(c) \text{grad } h, \quad \text{div } \vec{V} = 0,$$

2) рівнянням молекулярної дифузії, конвективної дифузії та термодифузії розчинених речовин

$$\text{div}(\mathbf{D}(c) \text{grad}(\rho c) + \rho \mathbf{D}_T(c) \text{grad} T) - \vec{V}(c) \text{grad}(\rho c) = \sigma \frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + (1 - \sigma) \vartheta \rho_B \frac{\partial(N)}{\partial t};$$

3) рівнянням конвективно-дифузійного теплопереносу

$$\text{div}(\lambda \text{grad } T) - \rho C_\rho \vec{V}(c) \text{grad } T = C_T \frac{\partial T}{\partial t},$$

4) рівнянням кінетики розчинення

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N, C_m, N_m, T, \gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Тут  $\vec{V} = \{v_x, v_y\}$  – вектор швидкості фільтрації;  $\mathbf{K}(c)$  – тензор коефіцієнтів фільтрації, який залежить від температури і концентрації розчинених в поровій рідині речовин;  $h = \frac{p}{\rho g} + y$  – п'єзометричний напір;  $p$  – тиск,  $\rho$  – густина

порової рідини,  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\mathbf{D}(c)$ ,  $\mathbf{D}_T(c)$  – тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії відповідно;  $c(x, y, t)$  і  $N(x, y, t)$  – масові концентрації речовин в рідкій і в твердій фазах;  $C_m$  і  $N_m$  – масові концентрації речовини в рідкій і твердій фазах в умовах рівноваги;  $\rho_B$  – густина розчинної речовини в твердій фазі;  $\sigma$  – пористість середовища;  $\vartheta$  – масова частка розчинної речовини в твердому тілі;  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  – константи, які характеризують швидкість масообміну;  $\lambda$  – тензор коефіцієнтів теплопровідності вологого ґрунту;  $T(x, y, t)$  – температура ґрунту;  $C_\rho$  – питома теплоємність порового розчину;  $C_T$  – об'ємна теплоємність ґрунту.

Для розв'язку задач даної математичної моделі нами були розглянуті крайові умови для концентрації і температури. Дістала подальший розвиток балансова гранична умова третього роду. На основі аналізу дифузійного, осмотичного та фільтраційного потоків речовини на межі дифузійного шару області розчинення отримана нова балансова гранична умова:

$$\left[ (D(c) + v(c)) \vec{V}(\rho c) + \rho D_T \vec{V} T - \vec{V} c - \frac{D(c)}{\delta} c \right] \Big|_{\Gamma_\phi} = - \frac{D(c)}{\delta} C_m.$$

На межі фронту розчинення отримана нова кінематична умова, яка дозволяє визначити залежність глибини розчинення пласта солі від часу:



$$\frac{dl}{dt} = \frac{\int_0^a ((-D(c) - v(c)) \vec{\nabla}(\rho c) - \rho D_T \vec{\nabla} T + \rho \vec{v} c) \cdot \vec{n} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\int_0^a (1 - \sigma) \vartheta \cdot \rho_B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}, (x, y) \in L(x, y, t), t \geq 0,$$

В третьому розділі проведено математичне моделювання процесу розчинення та вилуговування ґрунтовими водами гірських порід, що залягають в основах ГТС. Розглянуто горизонтальний протяжний пласт породи, розміщений в ґрунтовій основі гідротехнічної споруди. Прийнято, що вертикальні розміри області розчинення та фільтрації набагато менші від горизонтальної протяжності пласта. Тому

задача зведена до одновимірної. Розроблена нелінійна одновимірна математична модель даної задачі. Методом скінчених різниць (МСР) з використанням нової монотонної різницевої схеми знайдено числові розв'язки поставленої крайової задачі. Виконана програмна реалізація розроблених алгоритмів. Проведено числові експерименти, якими досліджено швидкість протікання процесу розчинення, зміну межі зони повного розчинення пласта гірської породи, розподіл концентрації розчиненої речовини і їхню залежність від явищ фільтрації, конвективної дифузії, осмосу, термодифузії. Виявлено вплив на вказані процеси нелінійності диференціальних рівнянь математичної моделі а також нелінійної залежності від концентрації та температури параметрів, які визначають процес розчинення, фільтрації, молекулярну та конвективну дифузію, термодифузію, осмос, теплопровідність. Досліджено умови виникнення карстових порожнин та кінетику їх розвитку.

В розділі розглянутий горизонтальний протяжний пласт кам'яної солі, перекритий зверху шаром ґрунту товщиною  $l_0$ , який являє собою основу фундаменту ГТС (рис. 1.). В ґрунті в горизонтальному напрямку відбувається фільтрація води під дією деякого напору з постійним градієнтом. Враховано, що в сольовому розчині в околі фронту розчинення існує дифузійний приміжовий шар товщиною  $\delta$ , в межах якого градієнт концентрації досягає найбільших значень. Оскільки ґрунт є мікропористим середовищем, то при наявності градієнтів концентрації і температури в ньому проявляються осмотичні явища. Процес розчинення, як правило, відбувається в неізотермічних умовах.

Внаслідок розчинення солі в приміжовій області пласта виникає зона повного розчинення товщиною  $l(t)$ , яка переміщається вглиб пласта. Прийнято, що зона розчинення заповнюється ґрунтовим середовищем з тими самими фізико-хімічними властивостями, що і ґрунт в основі. Фронт розчинення знаходиться на глибині  $l_1(t) = l_0 + l(t)$ .

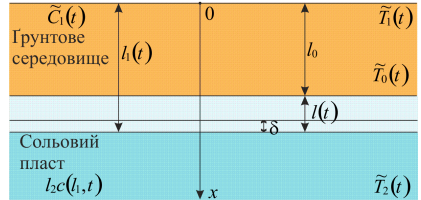


Рис. 1. Дифузійне розчинення монолітного пласта солі в неізотермічних умовах

Математична модель процесу розчинення пласта солі з врахуванням фільтрації, молекулярної та конвективної дифузії, термодифузії, осмосу, теплопровідності та нелінійності процесу прийме такий вигляд:

$$\frac{\partial \left( D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} - V(c, T) \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_m) + \frac{\partial \left( D_r \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x \in (0, l_1), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} - V(c, T) \cdot \rho C_p \frac{\partial T}{\partial x} = C_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (0, l_1), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$V = -k_1(c, T) \frac{\partial h}{\partial x} + v(c) \frac{\partial c}{\partial x} + k_2(c) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, l_1), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$h(0, t) = H_1(t), \quad l_3 h(l_1, t) = H_2(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad x \in [0, l_0], \quad c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad l_2 c(l_1, t) = \tilde{C}_2(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$\left[ \left( D(c) + v(c) \right) \frac{\partial c}{\partial x} + D_r \frac{\partial T}{\partial x} - V_x c - \frac{D(c)}{\delta} c \right] \Big|_{x=l_1} = -\frac{D(c)}{\delta} C_m, \quad x \in l_1, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{\rho}{\rho_B} \left( \left( D(c) + v(c) \right) \frac{\partial c}{\partial x} + D_r \frac{\partial T}{\partial x} + V_x c \right), \quad x \in l_1, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$T(x, 0) = \tilde{T}_0(x), \quad x \in [0, l_0], \quad T(0, t) = \tilde{T}_1(t), \quad T(l, t) = \tilde{T}_2(t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Тут:  $c(x, t)$ ,  $T(x, t)$  – концентрація розчину солі та його температура;  $D(c)$  – коефіцієнт дифузії;  $V(c, t)$  – швидкість фільтрації;  $k_1(c)$  – коефіцієнт фільтрації;  $v(c)$  – коефіцієнт осмосу;  $k_2$  – коефіцієнт термічного осмосу;  $\sigma$  – пористість ґрунту;  $l(t)$  – глибина зони повного розчинення пласта солі;  $\delta$  – товщина дифузійного примежового шару в околі фронту розчинення;  $D_r$  – коефіцієнт термодифузії;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності вологого ґрунту;  $C_p$  – питома теплоємність розчину;  $C_T$  – об'ємна теплоємність ґрунту;  $V_n$  – нормальна до поверхні розчинення складова вектора швидкості;  $C_m$  – концентрація граничного насичення;  $\rho$  – густина розчину;  $\rho_c$  – густина сольового пласта;  $l_2$ ,  $l_3$  – оператори, що задають одну з граничних умов 1-го, 2-го або 3-го роду.

Для числового розв'язання нелінійної крайової задачі (1)–(8) спочатку побудовано монотонну різницеву схему для крайової задачі що містить одновимірне нелінійне рівняння параболічного типу з першою похідною і яка входить в дану задачу автономно.

Введемо достатньо гладкі функції:  $p(x, u)$ ,  $r(x, u)$ ,  $f(x, u)$ ,  $q(x, u)$ , тоді рівняння (1) набере вигляду:

$$\frac{\partial \left( p(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} + r(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, u) = q(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in (0; l), \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$u(x,0)=U_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad u(0,t)=U_1(t), \quad l_2 u(l,t)=U_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (10)$$

Для крайової задачі (9), (10) побудовано нову монотонну різницьку схему для будь-яких кроків  $h$  і  $\tau$  порядку апроксимації  $O(h^2 + \tau)$ .

$$\mu_{i2}^k d_{i+1}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + r_{i+}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = q_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}, \quad (11)$$

$$\text{де} \quad \mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k}}, \quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_{i+1}^k|}{d_{i+1}^k}}.$$

Для розв'язання крайової задачі (1)-(8) було використано наступні етапи. Спочатку дискретизували швидкість фільтрації (3):

$$(V)_i^k = -(k_1)_i^k \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{h} + (v)_i^k \frac{C_{i+1}^k - C_{i-1}^k}{2h} + (k_2)_i^k \frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{2h}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad k = \overline{0, K}$$

Задачу теплопереносу (2), (8). дискретизували з використанням нової монотонної різницької схеми (11):

$$\tilde{\mu}_{i2}^k \tilde{d}_{i+1}^k \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{h^2} - \tilde{\mu}_{i1}^k \tilde{d}_i^k \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \tilde{r}_{i+}^k \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{h} + \tilde{r}_{i-}^k \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{C_T}{\rho C_p} \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau}, \quad (12)$$

$$T_0^{k+1} = \tilde{\chi}_1^k T_1^{k+1} + \tilde{\mu}_1^k, \quad T_n^{k+1} = \tilde{\chi}_2^k T_{n-1}^{k+1} + \tilde{\mu}_2^k, \quad (13)$$

$$\text{де} \quad \tilde{d}_i^k = \frac{\lambda(T_i^k) + \lambda(T_{i-1}^k)}{2\rho C_p}, \quad \tilde{d}_{i+1}^k = \frac{\lambda(T_{i+1}^k) + \lambda(T_i^k)}{2\rho C_p},$$

$$\tilde{r}_i = \tilde{r}_{i+} + \tilde{r}_{i-} = V(C_i^k, T_i^k), \quad \tilde{r}_{i+}^k = 0,5(\tilde{r}(C_i^k) + |\tilde{r}(C_i^k)|) \geq 0, \quad \tilde{r}_{i-}^k = 0,5(\tilde{r}(C_i^k) - |\tilde{r}(C_i^k)|) \leq 0,$$

$$\tilde{\mu}_{i1}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|\tilde{r}_i^k|}{\tilde{d}_i^k}}, \quad \tilde{\mu}_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|\tilde{r}_{i+1}^k|}{\tilde{d}_{i+1}^k}}.$$

Використовуючи знайдений числовий розв'язок задачі теплопереносу, на основі (11), побудовано монотонну різницьку схему задачі масопереносу (1), (5)-(7).

$$\mu_{i2}^k d_{i+1}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h^2} + r_{i+}^k \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h} + \gamma(C_i^{k+1} - C_m) + \frac{D_{T_{i+1}}^{k+1} + D_{T_i}^{k+1}}{2} \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{D_{T_{i-1}}^{k+1} + D_{T_i}^{k+1}}{2} \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{h^2} = \sigma \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}, \quad (14)$$

$$C_i^0 = C_0(ih), \quad i = \overline{0, n}, \quad C_0^{k+1} = C_1^{k+1}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (15)$$

$$D(C_n^{k+1}) \frac{C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}}{h} + v(C_n^{k+1}) \frac{C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}}{h} + D_r(T_n^{k+1}) \frac{T_n^{k+1} - T_{n-1}^{k+1}}{h} - V(C_n^{k+1}) C_n^{k+1} - \frac{D(C_n^{k+1})}{\delta} C_n^{k+1} = C_m \quad (16)$$

де

$$d_i^k = \frac{D(C_i^k) + D(C_{i-1}^k)}{2}, \quad d_{i+1}^k = \frac{D(C_i^k) + D(C_{i+1}^k)}{2},$$

$$r_i = r_{i+} + r_{i-} = V(C_i^k), \quad r_{i+}^k = 0,5(r(C_i^k) + |r(C_i^k)|) \geq 0, \quad r_{i-}^k = 0,5(r(C_i^k) - |r(C_i^k)|) \leq 0,$$

$$\mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k}}, \quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_{i+1}^k}}.$$

Положення фронту розчинення на часовому шарі  $(k+1)$  знаходимо наступним чином:

$$l_i^{k+1} = l_i^k + \frac{\rho\tau}{\rho_b h} (D(C_n^{k+1}) \cdot (C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}) + \nu(C_n^{k+1}) \cdot (C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}) + D_r(T_n^{k+1}) \cdot (T_n^{k+1} - T_{n-1}^{k+1}) + \nu(C_n^{k+1}) C_n^{k+1}).$$

На основі формули Вант-Гоффа-Шредера запропонована нова гранична умова першого роду для концентрації розчиненої речовини на межі фронту розчинення в неізотермічних умовах:

$$c(x, y, t) \Big|_{l(t)} = C_m^1 \cdot e^{\frac{Q}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right)}, \quad (x, y, t) \in \bar{\Omega}, \quad t \geq 0.$$

де  $C_m^1$  – гранична концентрація при деякій температурі  $T_1$ ,  $Q$  – молярна теплота розчинення,  $R$  – універсальна газова стала.

Результати числових експериментів розв'язку задачі (1)-(8) наведені на графіках рис.2., рис.3.

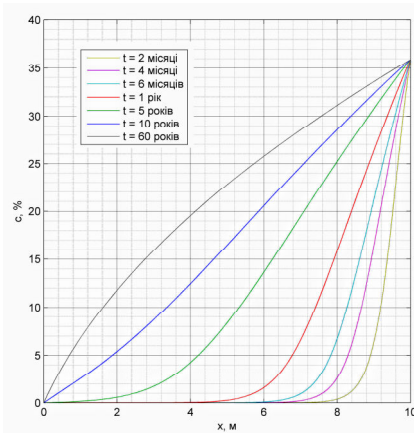


Рис. 2. Розподіл концентрації розчиненої речовини в ґрунті в різні моменти часу (залежність коефіцієнта дифузії від концентрації зростаюча)

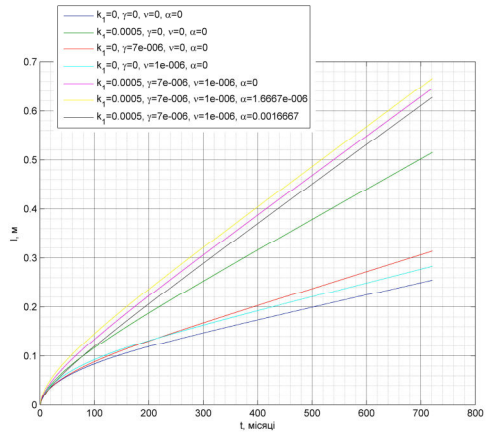


Рис. 3. Залежність глибини розчинення пласта солі від часу при різних умовах розчинення

У четвертому розділі проведено математичне і комп'ютерне моделювання процесів вилугування вапна з бетонних фундаментів ГТС та визначення глибини зони корозії бетонного фундаменту в двовимірній постановці з урахуванням фільтрації в бетонному фундаменті в неізотермічних умовах.

В даній задачі розглянуто корозію бетонного фундаменту ГТС, під яким знаходиться водопроникний шар ґрунту товщиною  $b_1$ , що лежить на водоупорі (рис. 4). Оскільки бетон є пористим середовищем, то внаслідок омивання його фільтраційним потоком підземних вод відбувається процес розчинення його водорозчинних складових з подальшим винесенням їх за рахунок масопереносу. В результаті з часом зменшується концентрація водорозчинних частин бетону (вапна та ін.). В даній задачі визначається глибина зони корозії бетонного фундаменту, зміна пористості бетону та його міцності, маса винесеного з бетону вапна, розподіл концентрації водорозчинних сполук в ґрунтовій основі та в бетоні в залежності від часу.

У системі координат, зображеній на рис. 4, математична модель описаної задачі має вигляд:

$$\frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right)}{\partial y} - V_{1x}(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1(c_1 - C_m) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad t > 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right)}{\partial y} - V_{2x}(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_r \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( D_r \frac{\partial T}{\partial y} \right)}{\partial y} = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - V_{2x} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial x} = C_r \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad t > 0, \quad (19)$$

$$\vec{V}_1 = -k_1(c_1) \operatorname{grad} h, \quad \operatorname{div} \vec{V}_1 = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (20)$$

$$\vec{V}_2 = -\tilde{k}_1(c_2) \operatorname{grad} h, \quad \operatorname{div} \vec{V}_2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (21)$$

$$h(0, y) = H_1(y), \quad h(a, y) = H_2(y), \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0, y=b_1+l_1(t), y=b_1+l_2(t)} = 0, \quad (22)$$

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (23)$$

$$T(0, y, t) = T_1(y, t), \quad T(a, y, t) = T_2(y, t), \quad y \in [0, b_1], \quad t > 0, \quad (24)$$

$$T(x, 0, t) = T_3(x, t), \quad T(x, b_1, t) = T_4(x, t), \quad x \in [0, a], \quad t > 0, \quad (25)$$

$$c_1(x, y, 0) = \tilde{C}_0^1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad c_2(x, y, 0) = \tilde{C}_0^2(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (26)$$

$$c_1(0, y, t) = \tilde{C}_1^1(y, t), \quad y \in [b_1, b_0], \quad c_2(0, y, t) = \tilde{C}_2^1(y, t), \quad y \in [0, b_1], \quad t > 0 \quad (27)$$

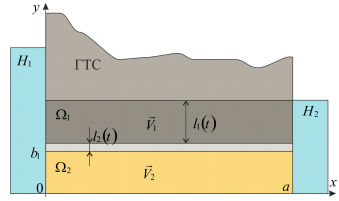


Рис. 4. Область фільтрації ґрунтової основи ГТС та зони корозії її бетонного фундаменту

$$l_1 c_1 = \begin{cases} c_1(a, y, t) = \tilde{C}_1^2(y, t), & y \in [b_1, b_1 + l_1(t)], \quad t > 0, \\ \left. \frac{\partial c_1}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, & y \in [b_1, b_1 + l_1(t)], \quad t > 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$l_2 c_2 = \begin{cases} c_2(a, y, t) = \tilde{C}_2^2(y, t), & y \in [0, b_1], \quad t > 0, \\ \left. \frac{\partial c_2}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, & y \in [0, b_1], \quad t > 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$\frac{\partial c_2(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad x \in [0, a], \quad t > 0, \quad (30)$$

$$l_3 c_1 = \begin{cases} C_m, & x \in [0, a], \quad t > 0, \\ \left( \frac{\partial c_1}{\partial y} + c_1 \right) \Big|_{y=b_1+l_1(t)} = C_m, \end{cases} \quad l_4 c_2 = \begin{cases} C_m, & x \in [0, a], \quad t > 0, \\ \left( \delta \frac{\partial c_2}{\partial y} + c_2 \right) \Big|_{y=b_1+l_2(t)} = C_m, \end{cases} \quad x \in [0, a], \quad t > 0 \quad (31)$$

$$\frac{dl_1}{dt} = -\frac{D_1(c_1)}{\sigma} \cdot \frac{\partial c_1(x, b_1 + l_1(l), t)}{\partial y}, \quad \frac{dl_2}{dt} = -\frac{\rho_2}{(1-\sigma)\rho_B} D_2(c_2) \frac{\partial c_2(x, b_1 + l_2(l), t)}{\partial y}, \quad x \in [0, a], \quad t > 0, \quad (32)$$

Для знаходження числового розв'язку крайової задачі (17)–(32), використано локально-одновимірну схему О.А. Самарського. Згідно з даним методом отримано декілька локально-одновимірних задач. Для числового розв'язання отриманих крайових задач побудовано різницеві схеми, зокрема для задач, що містять конвективний член – нову монотонну схему підвищеної точності, а для решти – чисто неявну різницеву схему. Всі отримані різницеві задачі розв'язані методом прогонки.

Розподіл концентрації розчинених солей і вапна в бетоні і ґрунті наведені у вигляді графіків рис.5., рис.6.

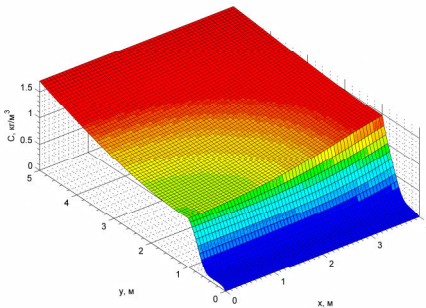


Рис. 5. Просторова візуалізація розподілу концентрації розчиненої речовини в ґрунті і в бетоні

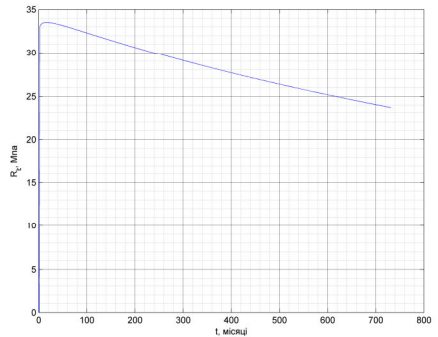


Рис. 6. Залежність міцності бетону від часу при корозії першого виду

В п'ятому розділі побудовано та досліджено нові математичні моделі задач розчинення та винесення солей з карстових порід, які залягають в основі ГТС у вигляді непроникних включень (рис. 6.). Розчинення тіла відбувається на його поверхні з утворенням зони повного розчинення. Відповідні математичні моделі описуються крайовими задачами фільтрації сольових розчинів та конвективної дифузії розчинених у фільтраційному потоці солей як в лінійній, так і в нелінійній постановці. При цьому параметри фільтрації і масопереносу залежать від концентрації розчинених солей. Рухомий фронт розчинення сольового включення має криволінійні межі.

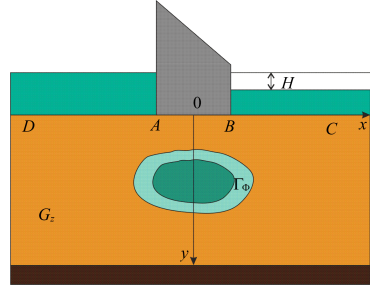


Рис. 7. Утворення та еволюція карстової порожнини в основі гідротехнічної споруди

Розв'язок поставлених в роботі крайових задач отримано з використанням методу скінченних різниць та числових конформних відображень в оберненій постановці. У зв'язку з цим крайові задачі написані в змінних  $\varphi$ ,  $\psi$  (потенціал  $\varphi$  – функція течії  $\psi$ ) області комплексного потенціалу (лінійна задача) та в змінних  $\xi$ ,  $\eta$  комплексної області (нелінійна задача). Крайова задача розчинення сольового включення в лінійній постановці при переході до змінних  $\varphi$ ,  $\psi$  набере вигляду:

$$\begin{aligned}
 & DV^2(\varphi, \psi) \left( \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} \right) - V^2(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \gamma(c - C_m) + \\
 & + \frac{x_\varphi}{\Im} \left( \frac{\partial c}{\partial \varphi} y_\psi - \frac{\partial c}{\partial \psi} y_\varphi \right) + \frac{y_\varphi}{\Im} \left( \frac{\partial c}{\partial \varphi} x_\psi - \frac{\partial c}{\partial \psi} x_\varphi \right) = \left( \frac{\partial c}{\partial t} \right)_{(\varphi, \psi)}, \\
 & c(\varphi, \psi, 0) = \tilde{C}_0(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad c(0, \psi, t) = \tilde{C}_1(\psi, t), \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_3(AD), \\
 & \frac{\partial c(\varphi, 0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_1(AB), \quad \frac{\partial c(\varphi, Q, t)}{\partial \psi} = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_2(CD), \\
 & \frac{\partial c(\varphi, \psi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_4(BC) \quad \frac{dl_0}{dt} = \frac{1}{C_m \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{V^2(\varphi, Q_0(t))}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( -D \frac{\partial c}{\partial \psi} \Big|_{\psi=Q_0(t)} \right) d\varphi.
 \end{aligned}$$

Крайова задача розчинення сольового включення в нелінійній постановці в змінних  $\xi$ ,  $\eta$  в загальноприйнятих позначеннях для концентрації та напору описується наступною системою нелінійних рівнянь:

$$\frac{D(c)}{\Im_1} \left( \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \right) - V_1(c) \frac{\partial c}{\partial \xi} - V_2(c) \frac{\partial c}{\partial \eta} + \bar{F}(c) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}$$

$$\frac{k(c)}{\mathfrak{S}_1} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right) + D_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0,$$

$$\text{де } V_1(c) = -\frac{1}{\mathfrak{S}_1} (V'_x(c)y_\eta - V'_y(c)x_\eta), \quad V_2(c) = -\frac{1}{\mathfrak{S}_1} (-V'_x(c)y_\xi + V'_y(c)x_\xi), \quad \bar{F} = -\gamma(c - C_m),$$

$$D_1 = \frac{1}{\mathfrak{S}_1^2} \left[ \frac{\partial k(c)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial k(c)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\eta - \frac{1}{\mathfrak{S}_1^2} \left[ -\frac{\partial k(c)}{\partial \xi} x_\eta - \frac{\partial k(c)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\eta,$$

$$E_1 = -\frac{1}{\mathfrak{S}_1^2} \left[ \frac{\partial k(c)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial k(c)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\eta + \frac{1}{\mathfrak{S}_1^2} \left[ -\frac{\partial k(c)}{\partial \xi} x_\eta - \frac{\partial k(c)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\eta$$

при відповідній початковій умові, граничних умовах на межі області фільтрації та кінематичній умові на фронті розчинення сольового включення, записаних в нових змінних  $\xi, \eta$ .

Для даних крайових задач побудовано монотонні різницеві схеми та отримано їхні числові розв'язки. Розроблені алгоритми отримання числових розв'язків програмно реалізовані з використанням сучасних технологій програмування, на основі чого проведені числові експерименти та здійснено їх аналіз. Числові результати приведені у вигляді графіків досліджуваних полів концентрації розчинених солей рис. 8. та руху межі розчинення сольового включення рис. 9.

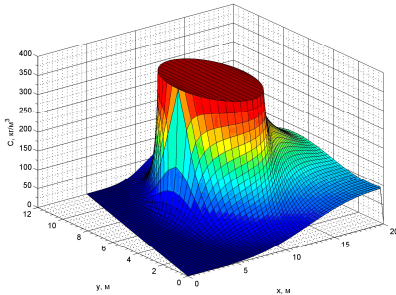


Рис.8. Просторова візуалізація розподілу концентрацій в фізичній області при розчиненні сольового включення.

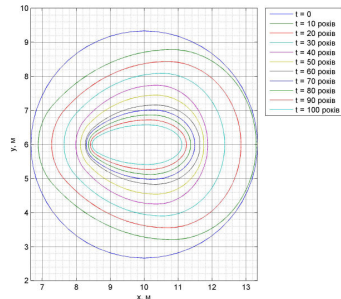


Рис. 9. Положення межі розчинення сферичного сольового включення в різні моменти часу.

## ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому поставлено і розв'язано актуальну та важливу науково-технічну задачу розробки нових нелінійних математичних моделей процесів розчинення та вилугування солей і розчинних порід з основ і бетонних фундаментів гідротехнічних споруд з врахуванням нелінійності процесів розчинення та вилугування, впливу неізотермічних умов, осмотичних явищ на дані процеси, наявності рухомих меж областей складної геометричної форми, в яких ці процеси досліджуються. В



роботі розвинені числові методи розв'язання відповідних нелінійних крайових задач, розроблені обчислювальні алгоритми і програмне забезпечення для виконання числових експериментів. При цьому отримані такі основні результати та висновки.

1. Створена нова одновимірна математична модель розчинення пласта солі або розчинної породи на основі нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які описують явища фільтрації, масопереносу, теплопереносу та кінетики розчинення з врахуванням нелінійних ефектів фільтрації, молекулярної та конвективної дифузії, термодифузії, осмосу в неізотермічних умовах. Доведені нові балансові та кінематичні граничні умови для ізотермічного та неізотермічного випадку. Розроблена нова монотонна різницева схема. Методом скінчених різниць проведені числові експерименти.

Встановлено, що поряд з молекулярною дифузією явища фільтрації, конвективної дифузії, осмосу суттєво впливають на збільшення швидкості розчинення солі. Вплив термодифузії незначний.

У випадку лише молекулярної дифузії залежність глибини розчинення від часу є степеневою функцією з показником 0,5. Вплив нелінійних ефектів проявляється у збільшенні швидкості розчинення солі і в збільшенні показника степеневої залежності.

2. Створена нова двовимірна математична модель вилуговування вапна з бетонного фундаменту з врахуванням нелінійних ефектів фільтрації, молекулярної та конвективної дифузії, термодифузії, осмосу в неізотермічних умовах. Проведені порівняльні числові експерименти методом скінчених різниць і методом скінчених елементів, які показали їхню взаємну відповідність з відносною похибкою 3,2% при довірчій імовірності 95%.

З допомогою числових експериментів досліджено корозію бетону першого виду. Розроблені алгоритми для розрахунків глибини зони корозії, довговічності бетону, його міцності. Проведені розрахунки добре узгоджуються з експериментальними даними. Найбільший вплив на швидкість корозії в неагресивному водному середовищі має фільтрація води в бетоні. Розроблений алгоритм і проведені обчислення маси вапна, винесеного внаслідок вилуговування з бетонного фундаменту ГТС, що дозволяє зробити прогнозну оцінку міцності споруди.

3. Розроблена математична модель і проведені числові експерименти по дослідженню процесу виникнення і розвитку карстових проток і порожнин. Встановлено, що з більшою імовірністю карстові протоки виникають в тих частинах карстових порід, де є тріщини, механічні та фізико-хімічні неоднорідності, умови виникнення фільтрації води. Після початку навіть незначної фільтрації процес розчинення породи в таких ділянках іде набагато швидше, ніж в однорідних. Неоднорідні теплові та концентраційні поля, нелінійні ефекти прискорюють процеси карстоутворення.

4. Розвинені та обґрунтовані числові методи конформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач з рухомими межами розчинення сольових пластів і включень розчинних порід. Створені алгоритми обчислення швидкості

розчинення сольових пластів, винесеної фільтраційними потоками маси розчиненої речовини, оцінки часу розчинення сольового пласта.

### СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Власюк А.П.* Чисельний розв'язок однієї задачі розчинення пласта солі / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко, С.В. Татевський* // Вісн. Укр. держ. Університету водного господарства і природокористування. Збірник наукових праць. Вип. 2(26) – Рівне, 2004. – С. 399-405.
2. *Власюк А.П.* Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну. / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко, О.П. Остапчук* // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки Випуск №2 – 2005. – С. 188-197.
3. *Степанченко О.М.* Чисельне моделювання розчинення пласта солі з врахуванням осмосу / *О.М. Степанченко* // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки Випуск №3 – 2005. – С. 363-371.
4. *Власюк А.П.* Математичне моделювання процесу корозії бетонного фундаменту гідротехнічної споруди / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Вісник Хмельницького національного університету Серія: технічні науки Частина 1, Том2 – 2005. – С. 46-52.
5. *Власюк А.П.* Чисельне розв'язування однієї нелінійної задачі розчинення пласта солі / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки Випуск №2 – 2006. – С. 142-150.
6. *Власюк А.П.* Про деякі нові математичні моделі задач розчинення гірських порід / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Вісн. національного університету водного господарства і природокористування. Випуск 4 (36) Частина 2 – Рівне, – 2006. – С. 49-55.
7. *Степанченко О.М.* Математичне моделювання процесу вилугування солей в основах гідротехнічних споруд та корозії їх фундаментів / *О.М. Степанченко* // Вісн. національного університету водного господарства і природокористування. Збірник наукових праць. Випуск 4 (40) Частина 3 – Рівне, 2007. – С. 341-346.
8. *Власюк А.П.* Чисельне моделювання однієї задачі розчинення сольового включення. / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: Зб. наук. праць. Вип. 4. – Кам'янець-Подільський, 2010.– С. 70–84.
9. *Степанченко О.М.* Чисельне моделювання однієї задачі розчинення пласта солі / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тези доп. Міжнародної конференції „Проблеми математичного моделювання сучасних технологій (ПММ-2002)” Хмельницький-2002р.
10. *Степанченко О.М.* Чисельне моделювання однієї задачі розчинення пласта солі / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тез. Міжнар. школи-семінару ”Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності”(PDMU-2004). Тези доп.- Тернопіль, 2004. – С. 219-221.
11. *Власюк А.П.* Чисельне моделювання однієї нелінійної задачі розчинення

пласта солі / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тез. Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики”. Львів 2004. – С. 34.

12. *Степанченко О.М.* Чисельне моделювання розчинення пласта солі з врахуванням осмосу. / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тези Всеукр. наук.-метод. конф. „Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”, Кам'янець-Подільський, 2004 – С. 249.

13. *Степанченко О.М.* Побудова монотонної різницевої схеми для одновимірного нелінійного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко, О.П. Остапчук*, // Тез. Міжнар. школи-семінару “Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності”. Тези доп.- Бердянск, 2005. – С. 113.

14. *Степанченко О.М.* Числове розв'язання однієї задачі корозії бетонного фундаменту гідротехнічного об'єкта / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тез. Міжнар. школи-семінару “Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності”. Тези доп.- Бердянск, 2005. – С. 114.

15. *Власюк А.П.* Числове моделювання процесу корозії бетонного фундаменту гідротехнічного об'єкта в неізотермічних умовах. / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тез. Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики”. Львів, 2005. – С. 51.

16. *Степанченко О.М.* Математичне моделювання розчинення сольового включення в основі гідротехнічного об'єкта / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тез.Одинадцятій міжнародній науковій конференції ім. Кравчука. – Київ 2006. – С. 58

17. *Власюк А.П.* Математичне моделювання розчинення сольового включення в основі гідроенергетичного об'єкта / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тез. Міжнар. конференція “Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності” (PDMU-2007). Тези доп. – Чернівці, 2007. – С. 74-76.

18. *Власюк А.П.* Нелінійна математична модель задачі розчинення та корозії бетонного фундаменту гідротехнічної споруди / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тез. Міжнар. конференції “Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності” (PDMU-2008). Тези доп.- Київ-Рівне, 2008.– С. 253-255.

19. *Степанченко О.М.* Чисельне моделювання однієї нелінійної задачі розчинення сольового включення в основі гідротехнічних споруд в ізотермічних умовах/ *О.М. Степанченко, А.П. Власюк* // Тези доповідей XIII Міжнародної наукової конференції імені акад. М.Кравчука, Київ, 2010. – С. 91.

20. *Власюк А.П.* Математичне моделювання розчинення сольового включення в основі гідротехнічної споруди в неізотермічних умовах / *А.П. Власюк, О.М. Степанченко* // Тез. Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне 2013. – С.44

#### АНОТАЦІЯ

**Степанченко О.М.** Математичне моделювання процесів розчинення та вилугування водорозчинних порід з основ та фундаментів гідротехнічних

**споруд.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя. – Тернопіль, 2013.

Дисертаційна робота присвячена питанням математичного моделювання процесів розчинення та вилуговування речовин з розчинних порід та бетонних фундаментів і їх масопереносу при фільтрації підземних вод. Дані процеси моделюються на основі нелінійних диференціальних рівнянь масопереносу, теплопереносу, фільтрації та кінетики розчинення з врахуванням залежності коефіцієнтів розчинення, фільтрації, дифузії, осмосу та термодифузії від концентрації і температури.

В дисертації побудовано нові математичні моделі процесів масопереносу речовин при вилуговуванні бетонних фундаментів, розчиненні солей і карстових порід, що залягають в основах фундаментів гідротехнічних споруд та інших енергетичних об'єктів. Розглянуті моделі розчинення тіл простої та складної геометричної форми з рухомими межами розчинення в ізотермічних та неізотермічних умовах.

Розвинені числові методи розв'язання поставлених нелінійних крайових задач в областях складної геометричної форми з рухомими межами, що включають побудову числових конформних відображень. Побудовано нову монотонну різницеву схему підвищеної точності для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять першу похідну.

Розроблені обчислювальні алгоритми та створене програмне забезпечення для числового розв'язання поставлених задач. Проведені числові експерименти, в ході яких досліджено вплив лінійних та нелінійних ефектів, пов'язаних з фільтрацією, дифузією, осмосом, термодифузією, на швидкість розчинення пластів солі, водорозчинних порід, корозії бетону та розвитку карстових порожнин.

**Ключові слова:** математичне моделювання, різницєва схема, монотонна схема, конформне відображення, розчинення, вилуговування, масоперенос, теплоперенос.

## АННОТАЦІЯ

**Степанченко О.Н. Математическое моделирование процессов растворения и выщелачивания водорастворимых пород из основ и фундаментов гидротехнических сооружений.** - На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. - Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя. - Тернополь, 2013.

Диссертационная работа посвящена вопросам математического моделирования процессов растворения и массопереноса растворимых веществ при фильтрации подземных вод. Данные процессы моделируются на основе нелинейных дифференциальных уравнений с учетом зависимости

коэффициентов фильтрации, диффузии, осмоса и термодиффузии от концентрации и температуры.

В диссертации построены новые математические модели процессов массопереноса растворимых пород, в частности солей и карстовых пород, которые залегают в основе гидротехнических сооружений и других важных энергетических объектов и комплексов в виде солевых включений и пластов или их частей с подвижными границами и в областях сложной геометрической формы. В частности созданы новые одномерные математические модели растворения пласта соли или водорастворимой породы на основе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые описывают явления фильтрации, массопереноса, теплопереноса и кинетики растворения с учетом нелинейных эффектов фильтрации, молекулярной и конвективной диффузии, термодиффузии, осмоса в неизотермических условиях. Доказаны новые балансовые и кинематические граничные условия в изотермическом и неизотермическом режимах. Разработана новая монотонная разностная схема. Методом конечных разностей проведены числовые эксперименты.

Установлено, что наряду с молекулярной диффузией явления фильтрации, конвективной диффузии, осмоса существенно влияют на увеличение скорости растворения соли. Влияние термодиффузии незначительное.

В случае лишь молекулярной диффузии зависимость глубины растворения от времени аппроксимируется степенной функцией с показателем степени 0,5. Влияние нелинейных эффектов проявляется в увеличении показателя степени зависимости и в увеличении растворимости сравнительно с степенной.

Рассмотрены также двумерные математические модели выщелачивания извести из бетонного фундамента с учетом нелинейных эффектов фильтрации, молекулярной и конвективной диффузии, термодиффузии, осмоса в неизотермических условиях. Проведены сравнительные числовые эксперименты методом конечных разностей и методом конечных элементов, которые показали их хорошее взаимное соответствие.

С помощью числовых экспериментов исследована коррозия бетона первого вида. Разработаны алгоритмы для расчетов глубины зоны коррозии, долговечности бетона, его прочности. Проведенные расчеты хорошо согласуются с экспериментальными данными. Самое большое влияние на скорость коррозии в неагрессивной водной среде имеет фильтрация в бетоне.

Вычислено количество вынесенного вещества из фундамента ГТС, что позволяет оценить (спрогнозировать) прочность сооружений.

Разработаны математические модели и проведены числовые эксперименты по исследованию процесса возникновения и развития карстовых протоков и пустот. Установлено, что с большей вероятностью карстовые протоки возникают в тех частях карстовых пород, где есть трещины, механические и физико-химические неоднородности, условия возникновения фильтрации воды. После начала даже незначительной фильтрации процесс растворения породы в таких участках идет намного быстрее, чем в однородных. Неоднородные тепловые и концентрационные поля, нелинейные эффекты ускоряют процессы

карстообразования.

Развиты и обоснованы числовые методы конформных отображений решения нелинейных краевых задач с подвижными границами растворения солевых пластов и включений растворимых пород. Созданы алгоритмы вычисления скорости растворения солевых пластов, вынесенной фильтрационными потоками массы растворенного вещества, оценки времени растворения солевого пласта.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, разностные схемы, монотонная схема, конформные отображения, растворение, выщелачивание, массоперенос, теплоперенос.

## ANNOTATION

**Stepanchenko O.M. Mathematical Modelling of the Dissolution and Leaching of Water-soluble Rocks Processes of the Basements and Structures of the Hydrotechnical Constructions. -On the rights of the manuscript.**

Thesis for the Science Degree of the Candidate of the Technical Sciences on the Speciality 01.05.02 - Mathematical Modelling and Computational Methods. - Ternopil National University Named After Ivan Puliuy.- Ternopil, 2013.

The thesis is devoted to the problem of the mathematical modelling of the dissolution and leaching of the substances of the soluble rocks and concrete basements and their masstransfer in the processes of the underground water filtration. These processes are modelled on the basis of the nonlinear differential equations of masstransferring, heattransferring, filtration and the kinetics of the dissolution, taking into account the dependency between the coefficients of dissolution, filtration, diffusion, osmosis and thermodiffusion depending on concentration and temperature.

The new mathematical models of the processes of the masstransfer of the substances during leaching of the concrete basements, salts dissolving and karst rocks which occur in the basement structures of the hydrothechnical constructions and other energetical objects have been built in the thesis. The models of dissolving of the solids of the simple and complex geometrical configurations with the moving boundaries of the dissolution under the isothermal and nonisothermal conditions have been considered. The numerical methods of solving of the defined nonlinear boundaries value tasks in the area of the complicated geometrical configurations with the moving boundaries which include the building of the numerical conformal reflections have been developed.

The new monotonic differentiative scheme of the increased accuracy for the nonlinear equations of the parabolic type with the first derivative has been built.

The computational algorithms have been developed and the programme database for the numerical solution of the defined tasks has been provided.

The numerical experiments have been carried out during which the influence of the linear and nonlinear effects connected with the filtration, diffusion, osmosis, thermodiffusion on the speed of the salts layers dissolution, water-soluble rocks, concrete corrosion and karst cavities development have been investigated.

**Key words:** mathematical modelling, differentiative scheme, monotonic scheme, conformal reflection, dissolution, leaching, masstransfer, heattransfer.