

УДК 539.3

Т. Шопа, кандидат фіз.-мат. наук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

***Резюме.** В рамках уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з довільною кількістю отворів довільної геометричної форми, орієнтації та розташування. Зовнішня границя панелі є довільної геометричної конфігурації. Розглянуто довільні гармонічні в часі граничні умови на контурах отворів та на зовнішній границі панелі. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до зображення функції Гріна. Крайові задачі зведено до систем лінійних алгебраїчних рівнянь.*

***Ключові слова:** ортотропна панель подвійної кривини, коливання, власні частоти, послідовнісний підхід, функція Гріна, непрямий метод граничних елементів, метод колокації.*

T. Shopa

VIBRATION OF ORTHOTROPIC DOUBLY CURVED PANEL WITH A SET OF CUTOUTS OF ARBITRARY CONFIGURATION

***Summary.** In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation and all inertial components including rotary inertia, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic doubly curved panel with the arbitrary number of holes of the arbitrary geometrical form, orientation, and location is constructed. The panel of the uniform thickness with constant curvatures is considered. External boundary of the panel is of the arbitrary geometrical configuration. This object can be obtained as the result of an arbitrary cut out from the doubly curved panel of the canonical rectangular shape. Arbitrary harmonic in time boundary conditions are considered, both on the contours of the holes and on the external boundary of the panel. The solution of the system of five partial differential equations in the multi-connected domain with the non-homogeneous boundary conditions of different types is built on the basis of the indirect boundary elements method. The Green's functions are found on the base of the sequential approach to the representation of the Dirac delta function (as the sequence of the delta-like functions) and the Fourier series method. The boundary value problems are reduced to the systems of the Fredholm type integral equations on the base of indirect boundary element method and are solved by the collocation method. The cases of external and internal boundaries of the panel with the corner points, and the cases of holes degenerated into the cracks can be analysed within the solutions constructed. The solutions for arbitrary mixed cases of the boundary conditions can be obtained on the base of integral equations constructed in the paper. Different arbitrary mixed boundary conditions on all subsections, both of the external boundary and of the contours of the cutouts, are also allowed. The solutions of the analogical problem for the plate can be considered as the partial case. Some aspects of the efficient numerical schemes of the collocation method in order to obtain the convergent solutions for the ill-posed problems, considering Fredholm integral equations of the first kind and the cases of non-smooth boundaries, are discussed.*

***Key words:** orthotropic doubly curved panel, vibration, natural frequencies, sequential approach, Green function, indirect boundary elements method, collocation method.*

Постановка проблеми. В сучасних інженерних конструкціях, які працюють за змінних у часі навантажень, широко використовуються анізотропні оболонкові елементи з отворами різної форми та розташування. Серед них є оболонкові пружини [1], які використовуються в машинобудуванні (бурові амортизатори, вібраційні машини

[2] та ін). Тому виникає зростаюча потреба дослідження динамічної поведінки таких елементів.

Аналіз відомих результатів досліджень. Коливанням суцільних тонкостінних елементів конструкцій багато уваги приділяють чимало фахівців з механіки деформівного твердого тіла [3, 4]. Однак недостатньо є опублікованих матеріалів, які стосуються динамічної поведінки тонкостінних елементів конструкцій з отворами, зокрема криволінійних панелей. У роботі [5] в рамках класичної теорії без урахування інерції обертання методом скінченних елементів досліджено вільні коливання підкріпленої в поздовжньому напрямку циліндричної ізотропної панелі з центральним прямокутним отвором та різними типами граничних умов на зовнішньому контурі панелі. В роботі [6] проведено числові, на основі методу скінченних елементів, та експериментальні дослідження впливу ексцентрично розташованого прямокутного отвору на частоти та форми коливань композитної циліндричної панелі. В дослідженнях [7] на базі методу скінченних елементів та уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви та інерцію обертання, розглянуто динамічну стійкість ламінованої композитної панелі подвійної кривини з центральним прямокутним отвором та з різними типами граничних умов на її межі. В статті [8] методом скінченних елементів досліджено коливання панелі подвійної кривини з центральним круглим отвором на базі уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви та інерцію обертання. В роботі [9] досліджено коливання панелі подвійної кривини супереліптичного зовнішнього профілю з супереліптичним отвором.

Метою роботи є побудова розв'язку узагальненої задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної форми, орієнтації та розташування з довільними гармонічними в часі граничними умовами на контурах отворів та на зовнішній довільної форми границі панелі ефективним методом в рамках уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви і всі інерційні компоненти,

Постановка задачі. Розглянути задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини. Панель містить N отворів довільної форми та розташування. Контурами отворів є криві $L^{(j)}, j = \overline{1, N}$. Зовнішня границя панелі є також довільної форми, а її контуром є крива $L^{(0)}$. Можна уявити цей об'єкт, який в термінах серединної поверхні займає багатозв'язну область Ω , як результат довільного вирізу з панелі подвійної кривини, яка в термінах серединної поверхні займає однозв'язну область Π канонічної форми (прямокутну в плані). Криволінійну систему координат з метрикою, близькою до евклідової, розміщено в уявно розширеній області. Координатні лінії криволінійної системи координат співпадають з напрямками головних кривин та осями ортотропії матеріалу панелі (рис. 1).

Використано такі позначення: $\mathbf{n}, \mathbf{\tau}$ – нормальний і дотичний вектор уздовж деякого напрямку; E_i – модулі Юнга; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву матеріалу; ν_{12}, ν_{21} – коефіцієнти Пуассона; ρ – густина матеріалу; k_1, k_2 – головні кривини панелі; R_1, R_2 – головні радіуси кривини; $2h$ – товщина панелі; φ_1, φ_2 – кути розхилу панелі; q_i, m_i – компоненти зовнішнього навантаження; w – прогин; u_n, u_τ – нормальні й тангенціальні компоненти переміщень точок серединної поверхні; γ_n, γ_τ – нормальні й тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні; Q_n – нормальна компонента перерізувальних сил; M_n, N_n – нормальні компоненти і M_τ, N_τ – тангенціальні компоненти моментів та мембранних сил.

Розглянемо два різні типи гармонічних у часі граничних умов з частотою ω на всіх контурах:

а) задано розподілені компоненти переміщень

$$\begin{aligned} w^{(j)} &= w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), & u_n^{(j)} &= u_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), & \gamma_n^{(j)} &= \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \\ u_\tau^{(j)} &= u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), & \gamma_\tau^{(j)} &= \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), & j &= \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (1)$$

б) задано розподілені компоненти зусиль

$$\begin{aligned} Q_n^{(j)} &= Q_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), & M_n^{(j)} &= M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), & N_n^{(j)} &= N_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \\ N_\tau^{(j)} &= N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), & M_\tau^{(j)} &= M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), & j &= \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (2)$$

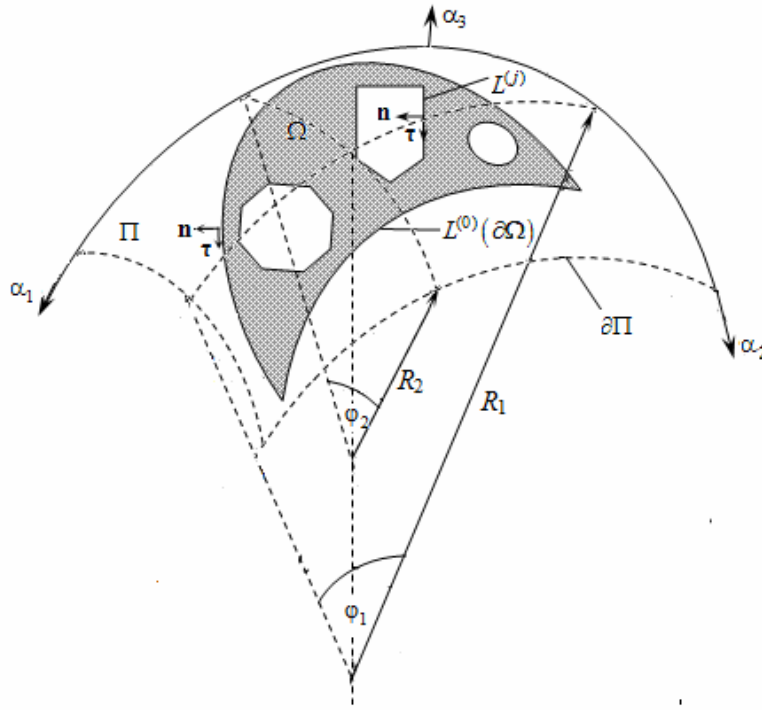


Рисунок 1. Панель подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації та зовнішньою границею довільної форми

Figure 1. Doubly curved panel with a set of cutouts of arbitrary configuration and with the external boundary of the arbitrary form

Розв'язок задачі. Для дослідження використано рівняння оболонок, які враховують поперечні зсуви та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Рівняння руху мають вигляд [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i &= -m_i + \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2}, & \frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} + k_i Q_i &= -q_i + 2h\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2), \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) &= -q_3 + 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

На основі припущень стосовно розподілу напружень і переміщень

$$U_i = u_i + \gamma_i \alpha_3, \quad U_3 = w, \quad \sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^\pm, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3, \quad (-h \leq \alpha_3 \leq h), \quad \sigma_{i3} = \begin{cases} \frac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^\pm, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j) \quad (4)$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду

$$\begin{aligned} N_{ii} &= B_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + v_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + (k_i + v_{ij} k_j) w \right], \quad N_{ij} = N_{ji} = B_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} \right), \\ M_{ii} &= D_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + v_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j} \right), \quad M_{ij} = M_{ji} = D_{ij} \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} \right), \quad Q_i = \Lambda_i \left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i \right), \\ D_i &= \frac{2h^3 E_i}{3(1 - v_{ij} v_{ji})}, \quad D_{ij} = \frac{2h^3 G_{ij}}{3}, \quad B_{ij} = 2h G_{ij}, \quad B_i = \frac{2h E_i}{1 - v_{ij} v_{ji}}, \quad \Lambda_i = 2h G_{i3}, \\ & \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (5)$$

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} \gamma_n &= n_1 \gamma_1 + n_2 \gamma_2, \quad \gamma_\tau = \tau_1 \gamma_1 + \tau_2 \gamma_2, \quad u_n = n_1 u_1 + n_2 u_2, \quad u_\tau = \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2, \\ M_n &= M_{11} n_1^2 + 2M_{12} n_1 n_2 + M_{22} n_2^2, \quad N_n = N_{11} n_1^2 + 2N_{12} n_1 n_2 + N_{22} n_2^2, \quad Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2, \\ M_\tau &= (M_{11} n_1 + M_{12} n_2) \tau_1 + (M_{21} n_1 + M_{22} n_2) \tau_2, \quad N_\tau = (N_{11} n_1 + N_{12} n_2) \tau_1 + (N_{21} n_1 + N_{22} n_2) \tau_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Унаслідок підстановки фізичних співвідношень (5) у рівняння руху (3) отримуємо ключові рівняння

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}]\{U\} &= -\{P\}, \quad \{U\} = \{u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2\}, \quad \{P\} = \{q_1, q_2, q_3, m_1, m_2\}, \quad (7) \\ \mathbf{L}_{11} &= B_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2 \Lambda_1 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{22} = B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2 \Lambda_2 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathbf{L}_{33} &= \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - [k_1 B_1 (k_1 + v_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + v_{21} k_1)] - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathbf{L}_{44} &= D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{55} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathbf{L}_{14} &= \mathbf{L}_{41} = k_1 \Lambda_1, \quad \mathbf{L}_{12} = (B_1 v_{12} + B_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{21} = (B_{12} + B_2 v_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ \mathbf{L}_{25} &= \mathbf{L}_{52} = k_2 \Lambda_2, \quad \mathbf{L}_{45} = (D_{12} v_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{54} = (D_{12} + D_2 v_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ \mathbf{L}_{34} &= -\mathbf{L}_{43} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \mathbf{L}_{35} = -\mathbf{L}_{53} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{24} = \mathbf{L}_{42} = 0, \quad \mathbf{L}_{15} = \mathbf{L}_{51} = 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{13} = (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 \nu_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \mathbf{L}_{31} = -(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 \nu_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{23} = (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 \nu_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{32} = -(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 \nu_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}.$$

У результаті маємо дві крайові задачі: задачу (1), (7) та задачу (2), (7).

Для розв'язку згаданих вище крайових задач використовуємо непрямий метод граничних елементів. Функції Гріна знаходимо методом Фур'є за використання послідовнісного підходу до представлення дельта-функції Дірака (як границю послідовності дельтаподібних функцій [10–12]). Звідси крайова задача для знаходження функції Гріна складається з рівнянь (7), в яких

$$q_s = T_s^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\omega t), \quad s = \overline{1, 3},$$

$$m_p = T_{3+p}^r \delta_{\varepsilon 1}(\alpha_1, \alpha_1^r) \delta_{\varepsilon 2}(\alpha_2, \alpha_2^r) \sin(\omega t), \quad p = 1, 2, \quad (8)$$

$$\delta_{\varepsilon}(\xi, \xi^r) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} g\left(\frac{|\xi - \xi^r|}{\varepsilon}\right), & |\xi - \xi^r| \leq \varepsilon, \\ 0, & |\xi - \xi^r| > \varepsilon, \end{cases}$$

в уявно побудованій області $\Pi: 0 \leq \alpha_1 \leq l_1, 0 \leq \alpha_2 \leq l_2, \Omega \in \Pi$ і однорідних крайових умов на її границі $\partial\Pi$

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad u_{\tau} = 0, \quad \gamma_{\tau} = 0. \quad (9)$$

Згідно з методом Фур'є розв'язок шукаємо в такій формі:

$$w(\alpha, \alpha^r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{\varepsilon km}(\alpha^r) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} u_1(\alpha, \alpha^r, t) \\ \gamma_1(\alpha, \alpha^r, t) \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} u_{1\varepsilon km}(\alpha^r) \\ \gamma_{1\varepsilon km}(\alpha^r) \end{cases} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} u_2(\alpha, \alpha^r, t) \\ \gamma_2(\alpha, \alpha^r, t) \end{cases} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{cases} u_{2\varepsilon km}(\alpha^r) \\ \gamma_{2\varepsilon km}(\alpha^r) \end{cases} \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \sin(\omega t). \quad (10)$$

Функції у виразах (8) розкладаємо в ряди Фур'є

$$q_3(\alpha, \alpha^r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_3^r C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{ss}(\alpha^r) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} q_1(\alpha, \alpha^r, t) \\ m_1(\alpha, \alpha^r, t) \end{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{cases} T_1^r \\ T_4^r \end{cases} C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) \Phi_{km}^{cs}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\begin{Bmatrix} q_2(\alpha, \alpha^r, t) \\ m_2(\alpha, \alpha^r, t) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} T_2^r \\ T_5^r \end{Bmatrix} C_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^{sc}(\alpha^r) \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \sin(\omega t), \quad (11)$$

$$C_{km}(\varepsilon) = \mu_{km} \frac{4}{l_1 l_2} \varphi(\lambda_{1k} \varepsilon) \varphi(\lambda_{2m} \varepsilon),$$

$$\lambda_{1k} = \frac{k\pi}{l_1}, \lambda_{2m} = \frac{m\pi}{l_2}, l_1 = R_1 \varphi_1, l_2 = R_2 \varphi_2,$$

$$\Phi_{km}^{cs}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k} \alpha_1) \sin(\lambda_{2m} \alpha_2),$$

$$\Phi_{km}^{sc}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k} \alpha_1) \cos(\lambda_{2m} \alpha_2),$$

$$\Phi_{km}^{ss}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k} \alpha_1) \sin(\lambda_{2m} \alpha_2),$$

$$\Phi_{km}^{cc}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k} \alpha_1) \cos(\lambda_{2m} \alpha_2),$$

$$\mu_{km} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \neq 0, m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } k = 0, m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } k \neq 0, m = 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо } k = 0, m = 0, \end{cases}$$

$\varphi(\lambda_{1k} \varepsilon), \varphi(\lambda_{2m} \varepsilon)$ — вагові функції, які визначають тип узагальненого підсумовування.

Після підстановки співвідношень (10), (11) у вирішувальну систему рівнянь (7) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Часова координата відокремлюється у випадку усталених гармонічних коливань. У результаті отримаємо функцію Гріна в аналітичному вигляді

$$U(\alpha, \alpha^r, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(\alpha, \alpha^r, \varepsilon, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{E}_{km}(\alpha)] [U_{km}] [\mathbf{E}_{km}(\alpha^r)] \{T^r\} \sin(\omega t),$$

$$U(\alpha, \alpha^r, t) = \{u_1(\alpha, \alpha^r, t), u_2(\alpha, \alpha^r, t), w(\alpha, \alpha^r, t), \gamma_1(\alpha, \alpha^r, t), \gamma_2(\alpha, \alpha^r, t)\}, \quad (12)$$

$$[\mathbf{E}_{km}(\alpha)] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{cs}(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cs}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{E}_{km}(\alpha^r)] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha^r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}(\alpha^r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha^r) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{U}_{km}] = \begin{bmatrix} u_{1km}^1 & u_{1km}^2 & u_{1km}^3 & u_{1km}^4 & u_{1km}^5 \\ u_{2km}^1 & u_{2km}^2 & u_{2km}^3 & u_{2km}^4 & u_{2km}^5 \\ w_{km}^1 & w_{km}^2 & w_{km}^3 & w_{km}^4 & w_{km}^5 \\ \gamma_{1km}^1 & \gamma_{1km}^2 & \gamma_{1km}^3 & \gamma_{1km}^4 & \gamma_{1km}^5 \\ \gamma_{2km}^1 & \gamma_{2km}^2 & \gamma_{2km}^3 & \gamma_{2km}^4 & \gamma_{2km}^5 \end{bmatrix}, \quad u_{1km}^1 = \frac{1}{\det |\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{22}^{km} & \mathbf{L}_{23}^{km} & \mathbf{L}_{24}^{km} & \mathbf{L}_{25}^{km} \\ \mathbf{L}_{32}^{km} & \mathbf{L}_{33}^{km} & \mathbf{L}_{34}^{km} & \mathbf{L}_{35}^{km} \\ \mathbf{L}_{42}^{km} & \mathbf{L}_{43}^{km} & \mathbf{L}_{44}^{km} & \mathbf{L}_{45}^{km} \\ \mathbf{L}_{52}^{km} & \mathbf{L}_{53}^{km} & \mathbf{L}_{54}^{km} & \mathbf{L}_{55}^{km} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{11}^{km} = -B_1 \lambda_{1k}^2 - B_{12} \lambda_{2m}^2 - k_1^2 \Lambda_1 + 2\rho h \omega^2, \quad \mathbf{L}_{22}^{km} = -B_{12} \lambda_{1k}^2 - B_2 \lambda_{2m}^2 - k_2^2 \Lambda_2 + 2\rho h \omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{33}^{km} = -\Lambda_1 \lambda_{1k}^2 - \Lambda_2 \lambda_{2m}^2 - [k_1 B_1 (k_1 + v_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + v_{21} k_1)] + 2\rho h \omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{44}^{km} = -D_1 \lambda_{1k}^2 - D_{12} \lambda_{2m}^2 - \Lambda_1 + \frac{2h^3}{3} \rho \omega^2, \quad \mathbf{L}_{55}^{km} = -D_{12} \lambda_{1k}^2 - D_2 \lambda_{2m}^2 - \Lambda_2 + \frac{2h^3}{3} \rho \omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{14}^{km} = \mathbf{L}_{41}^{km} = k_1 \Lambda_1, \quad \mathbf{L}_{25}^{km} = \mathbf{L}_{52}^{km} = k_2 \Lambda_2, \quad \mathbf{L}_{15}^{km} = \mathbf{L}_{51}^{km} = \mathbf{L}_{24}^{km} = \mathbf{L}_{42}^{km} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{12}^{km} = -(B_1 v_{12} + B_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{21}^{km} = -(B_2 v_{21} + B_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{34}^{km} = \mathbf{L}_{43}^{km} = -\Lambda_1 \lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}_{35}^{km} = \mathbf{L}_{53}^{km} = -\Lambda_2 \lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{54}^{km} = -(D_2 v_{21} + D_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{45}^{km} = -(D_1 v_{12} + D_{12}) \lambda_{1k} \lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{13}^{km} = (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 v_{12}) \lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}_{31}^{km} = (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 v_{21}) \lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}_{23}^{km} = (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 v_{21}) \lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{32}^{km} = (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 v_{12}) \lambda_{2m}.$$

Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі у випадку задавання на границях розподілених переміщень вводимо узагальнений контур $L = L^{(0)} \cup L^{(1)} \cup L^{(2)} \cup \dots \cup L^{(N)}$ і такі функції на ньому:

$$\{T(\xi)\} = \begin{cases} \{T_1^{(0)}, \dots, T_5^{(0)}\}^T, & \xi \in L^{(0)}, \\ \{T_1^{(1)}, \dots, T_5^{(1)}\}^T, & \xi \in L^{(1)}, \\ \dots \\ \{T_1^{(N)}, \dots, T_5^{(N)}\}^T, & \xi \in L^{(N)}; \end{cases}$$

$$\{U_0(\alpha)\} = \begin{cases} \{u_{n0}^{(0)}(\alpha), u_{\tau0}^{(0)}(\alpha), w_0^{(0)}(\alpha), \gamma_{n0}^{(0)}(\alpha), \gamma_{\tau0}^{(0)}(\alpha)\}^T, & \alpha \in L^{(0)}, \\ \{u_{n0}^{(1)}(\alpha), u_{\tau0}^{(1)}(\alpha), w_0^{(1)}(\alpha), \gamma_{n0}^{(1)}(\alpha), \gamma_{\tau0}^{(1)}(\alpha)\}^T, & \alpha \in L^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ \{u_{n0}^{(N)}(\alpha), u_{\tau0}^{(N)}(\alpha), w_0^{(N)}(\alpha), \gamma_{n0}^{(N)}(\alpha), \gamma_{\tau0}^{(N)}(\alpha)\}^T, & \alpha \in L^{(N)}. \end{cases}$$

На основі знайденої функції Гріна (12) представлення розв’язку через потенціал простого шару

$$U(\alpha, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{E}_{km}(\alpha)] [U_{km}] [\mathbf{E}_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} dl(\xi) \sin(\omega t),$$

$$U(\alpha, t) = \{u_1(\alpha, t), u_2(\alpha, t), w(\alpha, t), \gamma_1(\alpha, t), \gamma_2(\alpha, t)\},$$

крайових умов (1) і співвідношень (6) система інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій густин $T(\xi)$ набуває вигляду

$$\{U_0(\alpha)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha)] [\mathbf{E}_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} dl(\xi), \quad (13)$$

$$[\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha)] = \begin{bmatrix} u_{1n}(\alpha) & u_{2n}(\alpha) & u_{3n}(\alpha) & u_{4n}(\alpha) & u_{5n}(\alpha) \\ u_{1\tau}(\alpha) & u_{2\tau}(\alpha) & u_{3\tau}(\alpha) & u_{4\tau}(\alpha) & u_{5\tau}(\alpha) \\ w_1(\alpha) & w_2(\alpha) & w_3(\alpha) & w_4(\alpha) & w_5(\alpha) \\ \gamma_{1n}(\alpha) & \gamma_{2n}(\alpha) & \gamma_{3n}(\alpha) & \gamma_{4n}(\alpha) & \gamma_{5n}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}(\alpha) & \gamma_{2\tau}(\alpha) & \gamma_{3\tau}(\alpha) & \gamma_{4\tau}(\alpha) & \gamma_{5\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$u_{jn}(\alpha) = n_1(\alpha) u_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha) u_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$u_{j\tau}(\alpha) = \tau_1(\alpha) u_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha) u_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{jn}(\alpha) = n_1(\alpha) \gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha) \gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{j\tau}(\alpha) = \tau_1(\alpha) \gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha) \gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$w_j(\alpha) = w_{km}^j \Phi_{km}^{ss}(\alpha), \quad j = \overline{1,5}.$$

Аналогічно побудовано систему інтегральних рівнянь у випадку, якщо на отворі задаються зусилля. Розглянуто функції, визначені на узагальненому контурі L

$$\{F_0(\alpha)\} = \begin{cases} \left\{ N_{n_0}^{(0)}(\alpha), N_{\tau_0}^{(0)}(\alpha), Q_{n_0}^{(0)}(\alpha), M_{n_0}^{(0)}(\alpha), M_{\tau_0}^{(0)}(\alpha) \right\}^T, & \alpha \in L^{(0)}, \\ \left\{ N_{n_0}^{(1)}(\alpha), N_{\tau_0}^{(1)}(\alpha), Q_{n_0}^{(1)}(\alpha), M_{n_0}^{(1)}(\alpha), M_{\tau_0}^{(1)}(\alpha) \right\}^T, & \alpha \in L^{(1)}, \\ \dots \\ \left\{ N_{n_0}^{(N)}(\alpha), N_{\tau_0}^{(N)}(\alpha), Q_{n_0}^{(N)}(\alpha), M_{n_0}^{(N)}(\alpha), M_{\tau_0}^{(N)}(\alpha) \right\}^T, & \alpha \in L^{(N)}. \end{cases}$$

Звідси отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$\{F_0(\alpha)\} = \pm \frac{1}{2} \{T(\alpha)\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \left[\mathbf{Q}_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \left[\mathbf{E}_{km}(\xi) \right] \{T(\xi)\} dl(\xi), \quad (14)$$

знак “-”, якщо $\alpha \in L^{(0)}$, знак “+”, коли $\alpha \in L \setminus L^{(0)}$

$$\left[\mathbf{Q}_{km}^{(P)}(\alpha) \right] = \begin{bmatrix} N_{1n}(\alpha) & N_{2n}(\alpha) & N_{3n}(\alpha) & N_{4n}(\alpha) & N_{5n}(\alpha) \\ N_{1\tau}(\alpha) & N_{2\tau}(\alpha) & N_{3\tau}(\alpha) & N_{4\tau}(\alpha) & N_{5\tau}(\alpha) \\ Q_{1n}(\alpha) & Q_{2n}(\alpha) & Q_{3n}(\alpha) & Q_{4n}(\alpha) & Q_{5n}(\alpha) \\ M_{1n}(\alpha) & M_{2n}(\alpha) & M_{3n}(\alpha) & M_{4n}(\alpha) & M_{5n}(\alpha) \\ M_{1\tau}(\alpha) & M_{2\tau}(\alpha) & M_{3\tau}(\alpha) & M_{4\tau}(\alpha) & M_{5\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$N_{jn} = B_1 n_1^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left[-\lambda_{1k} u_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} u_{2km}^j + (k_1 + \nu_{12} k_2) w_{km}^j \right] +$$

$$+ 2B_{12} n_1 n_2 \Phi_{km}^{cc}(\alpha) \left(\lambda_{2m} u_{1km}^j + \lambda_{1k} u_{2km}^j \right) +$$

$$+ B_2 n_2^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left[-\lambda_{2m} u_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} u_{1km}^j + (k_2 + \nu_{21} k_1) w_{km}^j \right],$$

$$N_{j\tau} = B_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left[-\lambda_{1k} u_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} u_{2km}^j + (k_1 + \nu_{12} k_2) w_{km}^j \right] +$$

$$+ B_{12} (n_1 \tau_2 + n_2 \tau_1) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) \left(\lambda_{2m} u_{1km}^j + \lambda_{1k} u_{2km}^j \right) +$$

$$+ B_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left[-\lambda_{2m} u_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} u_{1km}^j + (k_2 + \nu_{21} k_1) w_{km}^j \right],$$

$$M_{jn} = D_1 n_1^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left(-\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j \right) + 2D_{12} n_1 n_2 \Phi_{km}^{cc}(\alpha) \times$$

$$\times \left(\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j \right) + D_2 n_2^2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left(-\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j \right),$$

$$M_{j\tau} = D_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left(-\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j \right) + D_{12} (n_1 \tau_2 + n_2 \tau_1) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) \times$$

$$\times \left(\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j \right) + D_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha) \left(-\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j \right),$$

$$Q_{jn} = \Lambda_1 n_1 \Phi_{km}^{cs}(\alpha) \left(\gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} w_{km}^j - k_1 u_{1km}^j \right) + \Lambda_2 n_2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \left(\gamma_{2km}^j + \lambda_{2m} w_{km}^j - k_2 u_{2km}^j \right), \quad j = \overline{1, 5}.$$

Розв’язок систем інтегральних рівнянь можна знайти на основі різних схем методу колокацій. Для відшукування розв’язку системи інтегральних рівнянь (13), яка є

системою інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, необхідно використовувати регуляризовані алгоритми, оскільки це є традиційно некоректна задача. Для контурів із кутовими точками необхідно використовувати нерівномірну сітку з досить сильним ущільненням біля кутів з метою отримання збіжних розв'язків. Для прикладу, достатньо добрі результати дає метод колокацій, коли контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття j -ого контуру, $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків розбиття j -ого контуру, $r=1, \overline{S^{(j)}}$), а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо розподіл невідомих густин $T^{(j)r}(\xi) = T^{(j)r} \delta(\alpha^{(j)r}, \xi)$. Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій α^q , які вибираємо серединами відрізків розбиття контурів.

Звідси для випадку інтегральних рівнянь (13) система $5 \sum_{j=0}^N S^{(j)}$ лінійних алгебраїчних рівнянь набуде вигляду

$$\{U_0(\alpha^q)\} = \sum_{j=0}^N \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^q)] [E_{km}(\alpha^r)] \{T^{(j)r}\}, \quad q=1, \overline{\sum_{j=0}^N S^{(j)}}.$$

А у випадку інтегральних рівнянь (14) система лінійних алгебраїчних рівнянь матиме вигляд

$$\{F_0(\alpha^q)\} = \pm \frac{1}{2} \{T^{(j)q}\} + \sum_{j=0}^N \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(P)}(\alpha^q)] [E_{km}(\alpha^r)] \{T^{(j)r}\}, \quad q=1, \overline{\sum_{j=0}^N S^{(j)}}.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідних систем однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник систем до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\mathbf{n}(\alpha) = (n_1(\alpha), n_2(\alpha))$ та дотичною $\boldsymbol{\tau}(\alpha) = (\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha))$ можна отримати на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на контурі отвору, використовуючи формули

$$\begin{cases} u_n(\alpha, t) \\ u_\tau(\alpha, t) \\ w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=0}^N \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha)] [E_{km}(\alpha^r)] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t), \quad \alpha^r \in L,$$

$$\begin{cases} N_n(\alpha, t) \\ N_\tau(\alpha, t) \\ Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=0}^N \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \left[E_{km}(\alpha^r) \right] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t), \quad \alpha^r \in L.$$

Висновки. Використовуючи побудовані в роботі інтегральні рівняння, можна отримати розв'язки для довільних мішаних випадків крайових умов. Можна розглядати довільні комбінації амплітуд $w(\alpha), u_n(\alpha), \gamma_n(\alpha), u_\tau(\alpha), \gamma_\tau(\alpha), Q_n(\alpha), M_n(\alpha), N_n(\alpha), M_\tau(\alpha), N_\tau(\alpha)$ на контурі як зовнішньої границі, так і на кожному контурі внутрішньої границі. Також дозволяються різні довільні мішані крайові умови на всіх складових як зовнішньої границі, так і контурів отворів. Тому в рамках поставленої задачі не обов'язково, щоб зовнішній контур був закріплений. Один або декілька внутрішніх контурів можна розглядати якимось чином закріпленими. Також можна розглядати випадки, коли закріплені тільки деякі частини внутрішніх та зовнішніх контурів. Ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Це дозволяє досліджувати у кращій якості різні типи коливань, спричинених різним характером збурення границі у випадку анізотропних матеріалів. У рамках побудованих розв'язків можна розглядати випадки зовнішніх та внутрішніх границь з кутовими точками, а також випадки отворів, які вироджуються в тріщини. Однак у випадку контурів з кутовими точками необхідно розглядати нерівномірне розбиття у схемі методу колокацій з досить сильним ущільненням біля кутів з метою отримання збіжних розв'язків. А для розв'язку системи рівнянь Фредгольма першого роду необхідно використовувати стабілізовані алгоритми, оскільки це є традиційно некоректна задача. На етапі числового розрахунку необхідним є дослідження збіжності й оптимального вибору значень параметрів апроксимації $S^{(j)}, K, M, \varepsilon$ в рамках кожного конкретного випадку для отримання достатньо точних числових результатів. Запропонована в статті схема дає розв'язки, які добре узгоджуються з відомими результатами для часткових випадків, отриманих іншими методами. Випадок пластини можна отримати, якщо головні кривини дорівнюватимуть нулю.

Conclusions. Using integral equations constructed in the paper, the solutions for arbitrary mixed cases of the boundary conditions can be obtained. Arbitrary combinations of the magnitudes $w(\alpha), u_n(\alpha), \gamma_n(\alpha), u_\tau(\alpha), \gamma_\tau(\alpha), Q_n(\alpha), M_n(\alpha), N_n(\alpha), M_\tau(\alpha), N_\tau(\alpha)$ can be considered, both on the contour of the external boundary and on each contour of the internal boundary. Different arbitrary mixed boundary conditions on all subsections, both of the external boundary and of the contours of the cutouts, are also allowed. Such that it is not mandatory within the problem statement that the external contour is fixed. One or several internal contours can be considered somehow fixed. The cases when only some subsections of the external or internal contours are fixed can be also considered. The key equations take into account transverse shear deformation and all inertial components including rotary inertia. This allows to investigate different types of vibrations caused by different character of boundary excitation in case of anisotropic materials in the higher quality. The cases of

external and internal boundaries of the panel with the corner points, and the cases of holes degenerated into the cracks can be analysed within the solutions constructed. However, non-uniform meshes with the strong mesh refinements near the corners in the collocation scheme must be considered for the cases of the cutouts with corner points in order to obtain the convergent solutions. And the stabilized procedures must be used for the solution of the system of the Fredholm equations of the first kind, because this is conventionally ill-posed problem. It is indispensable to investigate the convergence and optimal choice of the values of the approximation parameters $S^{(j)}$, K , M , ε on the stage of numerical computation within each particular case in order to get the numerical results efficient enough. The scheme proposed in the paper provides the solutions which are in reasonable agreement with the known results for the partial cases obtained by the other methods. The case of the plate can be obtained by putting the main curvatures equal to zero.

Список використаної літератури

1. Оболонкові пружини [Текст] / В.М. Шопя, А.С. Величкович, С.В. Величкович, І.П. Шацький, І.Й. Попадюк, Т.В. Шопя. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
2. Величкович, А.С. Комплекс засобів віброзахисту та регулювання динамічного режиму бурильної колони [Текст] / А.С. Величкович, С.В. Величкович, В.М. Шопя. – Івано-Франківськ: Сіверсія, 2000. – 92 с.
3. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций [Текст] / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
4. Григоренко, Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей [Текст] / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко. – Киев: Издательский дом «Академперіодика», 2006. – 472 с.
5. Sivasubramonian, B. Free vibration of longitudinally stiffened curved panels with cutout / B. Sivasubramonian, G. V. Rao, A. Krishnan // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 226, No 1, 9. – P. 41–55.
6. Levræa, V.J. The effect of cutout positioning on the dynamic characteristics of a curved composite panel / V.J. Lavrea, A.N. Palazotto, G.E. Maddux // Composite structures. –1993. – Vol. 23 – P. 263–272.
7. Sahu, S.K. Dynamic stability of laminated composite curved panels with cutouts / S.K. Sahu, P.K. Datta // Journal of Engineering Mechanics. – 2003. – Vol. 129. – P. 1245–1253.
8. Ravi Kumar, L. Tension buckling and parametric instability characteristics of doubly curved panels with circular cutout subjected to nonuniform tensile edge loading / L. Ravi Kumar, P.K. Datta, D.L. Prabhakara // Thin-Walled Structures. – 2004. – Vol. 42. Issue 7. – P. 947–962.
9. Liew, K.M. Vibration of perforated doubly-curved shallow shells with rounded corners / K.M. Liew, C.W. Lim // International Journal of Solids and Structures. – 1994. – Vol. 31. Issue 11. – P. 1519–1536.
10. Бурак, Я.Й. Аналітична механіка локально навантажених оболонок [Текст] / Я.Й. Бурак, Ю.К. Рудавський, М.А. Сухорольський. – Львів: Інтелект-Захід, 2007. – 240 с.
11. Lighthill, J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions / J. Lighthill. – Cambridge University Press, 1958. – 79 p.
12. Сухорольський, М.А. Послідовності і ряди [Текст] / М.А. Сухорольський. – Растр-7, 2010. – 346 с.

Отримано 27.08.2012