

УДК 624.042.8

О. Распопов¹, докт. техн. наук; Г. Сулим², докт. фіз-мат. наук;
Й. Лучко³, докт. техн. наук

¹Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту
імені академіка В. Лазаряна

²Львівський національний університет імені Івана Франка

³Львівська філія Дніпропетровського національного університету
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

МЕТОДОЛОГІЯ АНАЛІЗУ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ БАГАТОПРОГОНОВИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ЗГИНАЛЬНОЇ ЖОРСТКОСТІ

Резюме. Викладено загальну методологію аналізу поперечних коливань прямокутних багатопрогонових ізотропних і трансверсально ізотропних пластин з дискретно змінюваною в одному паралельному до якоїсь пари сторін напрямі згинальною жорсткістю та при використанні перпендикулярних до цього напрямку пружних щодо вертикальних переміщень і кутів повертання лінійних опор з рівномірним розподілом уздовж них зосереджених мас (включень, накладок). Для побудови частотних характеристичних рівнянь розрахунку власних частот використовується метод початкових параметрів і асоційованих матриць, а також теорія скінченних автоматів з елементами математичної логіки. Розглянуто приклади застосування методу.

Ключові слова: пластина, коливання, частота, метод початкових параметрів, асоційована матриця, скінченний автомат.

O. Raspopov, G. Sulim, J. Luchko

METHODOLOGY OF THE LATERAL OSCILLATIONS ANALYSIS OF THE ORTHOGONAL MULTISPAN PLATES WITH VARIABLE BENDING RIGIDITY

Summary. The paper briefly describes the general methodology for the analysis of transverse vibrations of rectangular isotropic and transversely isotropic multispans plates with the bending rigidity, which discretely varies in parallel towards to an arbitrary pair of sides, and using linear bearings perpendicular to this direction, which are elastic towards the vertical displacements and rotation angles, with uniform distribution of the concentrated masses along them (inclusions, stringers).

Two opposite edges parallel to the direction of change of the properties of the plate are hinge supported or fixed with sliding, and two others satisfy the arbitrary fixing homogeneous conditions.

The research starting point is based on the assumption of possibility of division of the plate onto strips, which are perpendicular to the direction of change of properties, such that certain sections coincide with the beginning or the end of each of the spans, and that within each strip the thickness and/or elastic modulus are constant or can be considered constant with sufficient accuracy. Each section is assumed to be a plate or a beam loaded in joint-sections by supporting forces and moments arising from the interaction of the considered strips with neighboring ones and hinge or sliding supported edges perpendicular to these strips. As each section is described by specific values of the component of the linear and angular displacements and components of internal forces and moments that form the state vector S , with introduction into the consideration of the influence matrix the relationship between the state vectors of the edge section of each of the strips can be obtained. As a result the calculation of the plate is reduced to the analysis of the single object loaded by given forces and

additional supporting ones. This allows describing in binary form of topological code of the primary (PP) and the end values (KP) of boundary parameters (conditions) of the graph of investigated elements in the case of calculating the transverse vibrations of the plate using the same number (on two) of arbitrary and fixed parameters.

To construct the frequency characteristic equations for calculation of eigenfrequencies the methods of initial parameters and associated matrices, and finite-state machine theory with elements of mathematical logic are used.

As an example, it is shown that in the case of the analysis of the plate, one end of which is fixed, and the second is hinge supported or two opposite edges are fixed, and two others are hinge supported, obtained equation of frequency are the same as those obtained using other methods.

The oscillations of orthotropic plates subject to forces of inertia of rotation, displacement and longitudinal forces are also considered. Based on the solution of the problem of vibration of cross-beams systems the examples of calculation of circular frequencies of orthotropic plates are considered.

Key words: plate, oscillations, frequency, initial parameters method, associated matrix, finite automate.

Вступ. Нерозрізні плити та пластини входять до складу багатьох інженерних і технічних споруд. Зокрема, можна відзначити їх використання при споруджуванні прогонових будов мостів чи корпусів суден, а також ефективному моделюванні пластинами або плитами складніших конструкцій. У цій роботі досліджуються поперечні коливання багатопрогонних прямокутних жорстких пластин або тонких плит, змінюваних у напрямі однієї з осей симетрії товщини та/чи модуля пружності за умови малості відносно товщини прогинів із використанням припущень, які при цьому зазвичай вводяться [1, 2]. Розрахунок таких систем будемо проводити за допомогою методу початкових параметрів і асоційованих матриць [3], а побудову рівнянь частот – із використанням теорії скінченних автоматів і елементів математичної логіки [4].

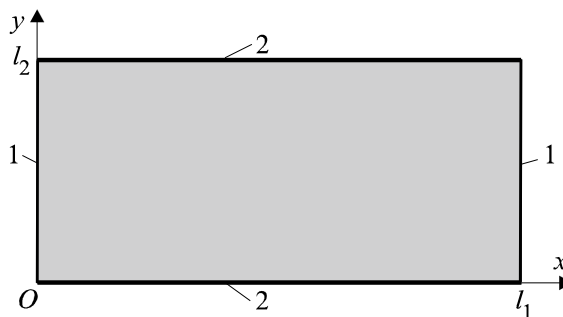


Рисунок 1. Схема задачі (крайові умови: 1 – довільний тип; 2 – шарнірне обпирання або ковзне защемлення)

Figure 1. Sketch of the problem (boundary conditions: 1 – arbitrary type; 2 – hinge support or fixation with sliding)

Уведемо у розгляд прямокутну систему координат x, y, z : осі x (уздовж напрямку зміни товщини і/чи модуля пружності) та y розташовані в серединній площині пластини; вісь z напрямлена вертикально вгору (рис. 1). Два протилежні паралельні до напрямку зміни товщини краї пластини (при $y = 0$ і $y = l_2$) вважаються шарнірно обпертими або ковзно защемленими; два інші (при $x = 0$ і $x = l_1$) – мають довільні однорідні умови закріплення, які дають можливість описувати топологічний код початкових (ПП) і кінцевих значень (КП) крайових параметрів (умов) графа, досліджуваних елементів у разі розрахунку поперечних коливань у напрямі осі z за

допомогою однакової кількості (по два) довільних і фіксованих параметрів.

Поділимо умовно паралельними до площини yOz перерізами пластину на p смужок-ділянок так, щоб перерізи збігалися із початком чи кінцем кожного з прогонів, а також, щоб у межах кожної смужки товщина та/чи модуль пружності були сталими або могли з достатньою мірою точності вважатися такими, і розглянемо одну з них (з номером k) завдовжки l_k , обмежену перерізами $k-1, k$. Кожну таку смужку розглядаємо як оперту на прямолінійних краях $y=0$ і $y=l_2$ пластину чи балку і додатково навантажену опорними зусиллями і моментами у перерізах $k-1, k$, що постають внаслідок взаємодії розглядуваної смужки із сусідніми. В результаті цього розрахунок пластини буде зведений до аналізу цілісного об'єкта, навантаженого, крім заданих зусиль, ще й додатковими опорними.

У загальному випадку кожен переріз характеризується певними значеннями компонент лінійного та кутового переміщень і компонент внутрішніх зусиль та моментів, які разом утворюють вектор стану S , що включає узагальнені вектори переміщень u і зусиль q (складові векторів: переміщення u_z , кут повертання φ_y навколо осі Oy , згинальний момент m_y та поперечна сила q_z). Позначимо через S_k значення вектора стану у перерізі k і подамо зв'язок між значеннями цього вектора у крайніх перерізах ділянки k пластини у вигляді

$$S_k = S_{k-1} B_{tk}, \tag{1}$$

де B_{tk} – транспонована матриця впливу або перехідна матриця k -ї ділянки пластини (індекс t означає операцію транспонування), у структурі якої вже враховано два згадані вище можливі типи однорідних крайових умов на $y=0$ і $y=l_2$.

З урахуванням розв'язку диференціального рівняння власних коливань k -ї ділянки пластини [3] матрицю B_{tk} подамо у формі блочної матриці, запис елементів якої (підматриць) для спрощення не міститиме індексів t, k :

$$B_{tk} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} k-1 \\ \backslash \\ u \end{array} & \begin{array}{c} k \\ \backslash \\ q \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u \\ q \end{array} & \begin{array}{cc} B_{uu} & B_{uq} \\ B_{qu} & B_{qq} \end{array} \end{array} \tag{2}$$

Зазначимо, що записані у (2) за межами матриці по вертикалі та горизонталі позначення векторів u, q стосуються відповідно початкового та кінцевого перерізів ділянки.

З використанням припущення, що на межі між елементами вектор стану змінюється неперервно (вектор стану в кінці елемента такий самий, як на початку наступного), а також залежності (1) вдається обчислити значення вектора стану S_p на правому краї пластинки через значення вектора стану S_0 на лівому краї пластинки за допомогою очевидного виразу $S_p = S_0 B_{t1} B_{t2} \dots B_{t-1} B_{t1} \dots B_{tp-1} B_{tp}$.

Підматриці блочної матриці B_{tk} визначаються виразами

$$\begin{aligned} B_{uu} &= \begin{vmatrix} S_1 & V_2 \\ T_3 & S_1 \end{vmatrix}; & B_{uq} &= \begin{vmatrix} U_2 & T_2 \\ V_2 & U_2 \end{vmatrix}; \\ B_{qu} &= \begin{vmatrix} U_1 & T_1 \\ V_1 & U_1 \end{vmatrix}; & B_{qq} &= \begin{vmatrix} S_2 & V_3 \\ T_1 & S_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Елементами цих підматриць є функції [3, 5]:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (a^2 \operatorname{ch} d + d^2 \cos a), & S_2 &= \frac{1}{\Delta^2} (d^2 \operatorname{ch} d + a^2 \cos a); & T_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (d \operatorname{sh} d + a \sin a), \\ T_2 &= a^2 d^2 U_1, & T_3 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{a^2}{d} \operatorname{sh} d + \frac{d^2}{a} \sin a \right); & U_1 &= \frac{1}{\Delta^2} (\operatorname{ch} d + \cos a), & U_2 &= a^2 d^2 U_1; \\ V_1 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{1}{d} \operatorname{sh} d - \frac{1}{a} \sin a \right), & V_2 &= a^2 d^2 V_1, & V_3 &= \frac{1}{\Delta^2} (d^3 \operatorname{sh} d - a^3 \sin a), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\Delta^2 = a^2 + d^2$; $a^2 = \lambda^2 - \beta_i^2$; $d^2 = \lambda^2 + \beta_i^2$; $\lambda^4 = \mu \omega^2 l^4 / D$ – частотний параметр; $\beta_i = l \pi i / l_2$; $i = 1, 2, 3, \dots$ – номер форми коливань пластини в площині yOz ; $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – циліндрична жорсткість пластини; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $\mu = \rho h$ – маса пластини на одиницю площі; ρ – густина матеріалу; h – товщина пластини; ω – кругова частота коливань (для спрощення запису індекс k упушений). Параметри a, d пов'язані очевидними залежностями

$$a^2 + d^2 = 2\lambda^2; \quad a^2 - d^2 = -2\beta_i^2; \quad ad = \lambda^4 - \beta_i^4. \quad (5)$$

Для розрахунку власних частот необхідно побудувати відповідні характеристичні рівняння. Оскільки розглядаються тільки поперечні коливання [4] (в напрямку осі Oz), то параметрами на краях кожного перерізу будуть $u_z, \varphi_y; m_y, q_z$. Якщо значення якогось із цих параметрів на одній чи другій межі елемента фіксується (задається), то у відповідному топологічному коді послідовності параметрів ставиться символ «0», а коли він не задається (такий, який вже виходить), то «1». Таким чином, топологічним кодом шарнірного опирання буде 0101, повного защемлення – 0011, ковзного защемлення – 1010, вільного краю – 1100, безповоротного шарнірного закріплення – 1001 і опирання без формування перерізувальної сили – 0110. У цьому разі можливим станам елементів пластини при однорідних крайових умовах відповідають частотні визначники, складені із мінорів другого порядку матриці B_{ik} , які для кожної смужки формують так звану асоційовану матрицю M_k . Після доволі простих але тривалих перетворень із урахуванням співвідношень (5) вирази для добутків компонент матриці M_k на $1/\Delta^4$ наведено у табл. 1, де кожен елемент записаний у порядку логічного слідування кодів позначення тих чи інших початкових (ПП) і кінцевих (КП) крайових параметрів ділянки пластини.

Таблиця 1. Асоційована матриця M_k (без урахування спільного множника $1/\Delta^4$)

Table 1. Associated matrix M_k (excluding common multiplier $1/\Delta^4$)

| КП ПП | 0011 | 0101 | 0110 | 1001 | 1010 | 1100 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1100 | E_1 | A_3 | H_2 | F_2 | C_3 | G_4 |
| 1010 | C_1 | D_1 | A_2 | A_3 | B_2 | C_3 |
| 1001 | F_1 | C_1 | E_2 | G_3 | A_3 | F_2 |
| 0110 | H_1 | C_2 | G_2 | E_2 | A_2 | H_2 |
| 0101 | A_1 | B_1 | C_2 | C_1 | D_1 | A_3 |
| 0011 | G_1 | A_1 | H_1 | F_1 | C_1 | E_1 |

Елементи, які входять до складу асоційованої матриці M_k , визначають такими формулами:

$$\begin{aligned} A_s &= \Delta^2 (k_s \operatorname{ch} d \sin a - f_s \operatorname{sh} d \cos a) \quad (s=1, 2); \\ A_3 &= -a^2 d^2 A_1, \end{aligned} \quad (6)$$

де при $s=1 - k_1 = \frac{1}{a}, f_1 = \frac{1}{d}$; при $s=2 - k_2 = -d^3, f_2 = -a^3$;

$$\begin{aligned} C_s &= \Delta^2 (k_s \operatorname{ch} d \sin a + f_s \operatorname{sh} d \cos a) \quad (s=1, 2); \\ C_3 &= -a^2 d^2 C_1, \end{aligned} \quad (7)$$

де при $s=1 - k_1 = d, f_1 = a$; при $s=2 - k_2 = \frac{d^2}{a}, f_2 = \frac{a^2}{d}$.

Для функцій B_1, B_2, D_1 можна записати вирази

$$B_1 = \frac{\Delta^4}{ad} \operatorname{sh} d \sin a; \quad B_2 = -a^2 d^2 B_1; \quad (8)$$

$$D_1 = \Delta^4 \operatorname{ch} d \cos a. \quad (9)$$

У свою чергу, функції F_1, F_2 і H_1, H_2 дорівнюють

$$F_1 = 2ad \operatorname{sh} d \sin a + \gamma; \quad F_2 = -a^2 d^2 F_1; \quad (10)$$

$$H_1 = \frac{\Delta^4}{ad} \operatorname{sh} d \sin a - \gamma; \quad H_2 = -a^2 d^2 H_1, \quad (11)$$

де $\gamma = (a^2 - d^2)(1 - \operatorname{ch} d \cos a)$.

Функції ж G_s і E_s мають вигляд

$$\begin{aligned} G_s &= k_s (1 - \operatorname{ch} d \cos a) + f_s \operatorname{sh} d \sin a \quad (s=1, 2); \\ G_3 &= -a^2 d^2 G_1; \quad G_4 = -a^2 d^2 G_3, \end{aligned} \quad (12)$$

де при $s=1 - k_1 = 2, f_1 = \frac{d}{a} - \frac{a}{d}$; при $s=2 - k_2 = -2a^2 d^2, f_2 = a^2 d^2 \left(\frac{d^3}{a^3} - \frac{a^3}{d^3} \right)$;

$$E_s = \gamma_s + k_s \operatorname{ch} d \cos a + f_s \operatorname{sh} d \sin a, \quad (13)$$

де при $s=1 - \gamma_1 = a^4 + d^4, k_1 = 2ad, f_1 = ad(a^2 - d^2)$; при $s=2 - \gamma_2 = k_1, k_2 = \gamma_1, f_2 = f_1$.

Таким чином, матриця M_k містить у ролі елементів визначники частот вільних коливань окремої пластини сталої згинальної жорсткості та характеризує 36 можливих її станів і комбінацій крайових умов при $x=0$ і $x=l_1$ для перелічених способів закріплення сторін при $y=0$ і $y=l_2$.

Наприклад, для пластини, один край якої ($x=0$ чи $x=l_1$) защемлений, а другий – шарнірно опертий, рівняння частот визначається безпосередньо елементом матриці M_k (табл. 1) із кодами 0011/0101, які задовольняють крайові умови на кінцях пластини

$$\frac{A_1}{\Delta^4} \equiv \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{ch} d \sin a - \frac{1}{d} \operatorname{sh} d \cos a \right) = 0, \quad (14)$$

або

$$\frac{1}{a} \operatorname{tg} a - \frac{1}{d} \operatorname{th} d = 0. \quad (15)$$

Для пластини, у якої два протилежних краї ($y=0$ чи $y=l_2$) защемлені (коди 0011/0011), а два інші – шарнірно оперті, рівняння частот набуде вигляду

$$\frac{G_1}{\Delta^4} \equiv \frac{1}{\Delta^4} \left[2(1 - \operatorname{ch} d \cos a) - \frac{a^2 - d^2}{ad} \operatorname{sh} d \sin a \right] = 0 \quad (16)$$

або для розщеплюваних у даному випадку симетричних і кососиметричних форм коливань

$$\left(d \operatorname{th} \frac{d}{2} + a \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \left(d \operatorname{cth} \frac{d}{2} - a \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right) = 0. \quad (17)$$

Рівняння (14)–(17) повністю збігаються із отриманими у роботах [2, 5].

Інші можливі стани пластини, які визначаються вхідними послідовностями всіх значень бульових функцій початкових та кінцевих крайових умов, що реалізуються на множинах $\{0,0,0,1\}$ та $\{1,1,1,0\}$, тобто визначаються комбінаціями крайових умов із трьох довільних або фіксованих і, відповідно, одним фіксованим або довільним ПП і КП (усього 16 станів), будуть характеризуватися частотними визначниками із мінорів третього порядку матриці B_{ik} . Вхідні послідовності такого типу можуть бути реалізовані при скінченно-автоматному моделюванні вимушених коливань пластин або визначенні їх власних форм. Аналізуючи всі отримані мінори, можна дійти висновку, що кожен із них тотожний певному елементу матриці впливу, побудованій за технічною теорією згинальних коливань. Ця ж властивість характерна і для мінорів першого порядку матриці B_{ik} . Розміщуючи елементи матриці (2) відповідно із кодами ПП/КП, отримаємо асоційовану матрицю R_k (табл. 2) із функціями (4).

Таблиця 2. Асоційована матриця R_k

Table 2. Associated matrix R_k

| | | | | |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| КП | 0111 | 1011 | 1101 | 1110 |
| ПП | 0001 | 0010 | 0100 | 1000 |
| 1000 | $S_1(\lambda)$ | $V_2(\lambda)$ | $U_2(\lambda)$ | $T_2(\lambda)$ |
| 1110 | | | | |

| | | | | |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0100 1101 | $T_3(\lambda)$ | $S_1(\lambda)$ | $V_2(\lambda)$ | $U_2(\lambda)$ |
| 0010 1011 | $U_1(\lambda)$ | $T_1(\lambda)$ | $S_2(\lambda)$ | $V_3(\lambda)$ |
| 0001 0111 | $V_1(\lambda)$ | $U_1(\lambda)$ | $T_1(\lambda)$ | $S_2(\lambda)$ |

Для p -прогонової нерозрізної пластини змінної товщини в напрямку осі x рівняння частот можна виразити у вигляді послідовного добутку асоційованих матриць [6] кожної із p ділянок системи

$$V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k \tilde{V}_p = 0, \tag{18}$$

де V_1 і \tilde{V}_p – матриця-рядок і матриця-стовпець відповідно першої та p -ї ділянок.

Для побудови рівнянь частот у багатопрогонових стрижневих балкових конструкціях із використанням теорії скінченних автоматів і елементів математичної логіки [4] будуються належні таблиці переходу скінченного автомата. Однак у разі простих випадків необхідності у побудові таблиць переходів автомата немає – достатньо скористатися тільки аналізом графа системи. Наприклад, якщо у перерізах пластини $1, 2, \dots, p-1$ (уздовж осі y) поставлені абсолютно жорсткі опори, то підграф k -ї ділянки пластини набуде зображеного на рис. 2 вигляду.

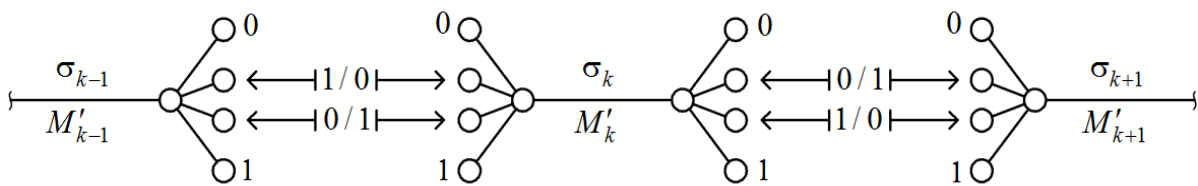


Рисунок 2. Підграф k -ї ділянки нерозрізної пластини на жорстких опорах
Figure 2. The sub-graph of the k -th part of continuous plate on rigid bearings

Легко помітити, що в кожному перерізі між сусідніми ділянками пластини можливі лише два варіанти крайових умов і, як наслідок, чотири стани будь-якого із підавтоматів A_2, A_3, \dots, A_{p-1} , що описують перехід крайових умов від однієї ділянки до наступної. Топологічний код k -го підавтомата для відповідного графа G_k ділянок пластини можна в загальному випадку подати квадратною матрицею σ_k кодів другого порядку

$$C(G_k) = \|\sigma_k\|_1^2, \tag{19}$$

де елементи цієї матриці – $\sigma_{11} = [0101/0011]$, $\sigma_{12} = [0101/0101]$, $\sigma_{21} = [0011/0011]$, $\sigma_{22} = [0011/0101]$.

Відповідна асоційована матриця M'_k із урахуванням кодів елементів матриці σ_k (див. табл. 1) має вигляд

$$M'_k = \begin{array}{c|cc|c} & \begin{array}{c} \text{КП} \\ \text{НП} \end{array} & & \\ \hline & 0011 & 0101 & \\ \hline 0101 & A_1(\lambda_k) & B_1(\lambda_k) & \\ \hline 0011 & G_1(\lambda_k) & A_1(\lambda_k) & \\ \hline \end{array} \frac{1}{\Delta_k^4}. \quad (20)$$

Залежно від умов закріплення першої й останньої ділянок пластини визначаються функції векторів V_1 і \tilde{V}_p у рівнянні (18). Наприклад, якщо лівий край пластини (при $x=0$) защемлений (матриця-рядок $\sigma_1 = \|0011/0011 \ 0011/0101\|$), а правий (при $x = \sum_{k=1}^p l_k$) – вільний (матриця-стовпчик $\sigma_p = \{0101/1100 \ 0011/1100\}$), то

$$V_1 = \frac{1}{\Delta_1^4} \|G_1(\lambda_1) \ A_1(\lambda_1)\|; \quad \tilde{V}_p = \frac{1}{\Delta_p^4} \left\| \begin{array}{c} A_3(\lambda_p) \\ E_1(\lambda_p) \end{array} \right\|. \quad (21)$$

Припустимо тепер, що в k -му перерізі пластини розміщені пружні опори віднесеної до одиниці довжини перерізу жорсткості c_k (ребро жорсткості), які впливають на поперечні переміщення, а також прикладена рівномірно розподілена уздовж перерізу зосереджена маса інтенсивності m_k . У цьому разі розв'язки будуть аналогічними до отриманих для пружно-опертих балок, які окрім континуально розподілених параметрів мають ще й точкові маси (включення) та різного типу опори [6]. Скажімо, вираз для асоційованої матриці M_k (позначимо її для цього випадку через Y_k^c) ділянки пластини, яка враховує наявність пружних опор на лівому краї, з урахуванням позначень [6] можна подати у вигляді

$$Y_k^c = M_k + \tilde{c}_k M_k^c, \quad (22)$$

де $M_k^c = M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)}$; $\tilde{c}_k = c_k - m_k \omega^2$.

Для ділянки пластини із пружними стосовно повороту перерізу опорами жорсткості q_k аналогічна матриця Y_k^q набуде вигляду

$$Y_k^q = M_k + \tilde{q}_k M_k^q, \quad (23)$$

де $M_k^q = M_{1010}^{(1)} + M_{0011}^{(5)}$; $\tilde{q}_k = q_k - J_{km} \omega^2$.

Відповідна асоційована матриця Y_k^{cq} для ділянки пластини з пружними стосовно поперечних і кутових переміщень опорами, а також рівномірно розподіленою уздовж перерізу на лівому кінці масою запишеться так:

$$Y_k^{cq} = M_k + \tilde{c}_k M_k^c + \tilde{q}_k M_k^q + \tilde{c}_k \tilde{q}_k M_k^{cq}, \quad (24)$$

де $M_k^{cq} = M_{0011}^{(1)}$.

Той же результат отримується шляхом розкриття мінорів другого порядку матриці R_k^{cq} , елементи якої також використовуються в розрахунках вимушених коливань і побудові форм власних коливань нерозрізних плит [7]:

$$R_k^{cq} = R_k + \tilde{c}_k R_{0001}^{(1)} + \tilde{q}_k R_{0010}^{(2)}, \quad (25)$$

де R_k – асоційована матриця четвертого порядку звичайної ділянки пластини (табл. 2);
 $R_{0001}^{(1)} = R_{1110}^{(1)}$; $R_{0010}^{(2)} = R_{1011}^{(2)}$.

Загалом, коли є зосереджені включення різних типів [6], з огляду на лінійність задачі асоційовані матриці ділянок можуть бути отримані, користуючись принципом суперпозиції. При цьому рівняння частот, які описують ту чи іншу систему, будуть мати один і той же вигляд (18). Для складніших випадків необхідно укладати інші таблиці переходів із кодами ПП, КП кожної ділянки пластини.

Для ще одного прикладу розглянемо власні коливання ортотропної плити з урахуванням сили інерції обертання, зсувів і поздовжніх сил. Для цього використаємо розв'язки [8] для покладеної на суцільну пружну основу сукупності з двох систем шарнірно опертих балок однакової довжини l_1 і l_2 , які між собою перетинаються:

$$\frac{\sigma_1 + 2\beta_i^2 q_1}{\lambda_{1i}^4 \sigma_1 + 2\beta_i^2 v_1 - \beta_i^4} + \frac{B_2}{B_1} \left[\frac{\sigma_2 + 2\beta_j^2 q_2}{\lambda_{2j}^4 \sigma_2 + 2\beta_j^2 v_2 - \beta_j^4} \right] = 0, \quad (26)$$

де $B_1 = l_1^3 / E_1 J_1$, $B_2 = l_2^3 / E_2 J_2$ – коефіцієнти, які характеризують жорсткості на згин поздовжніх і поперечних балок; σ_s, v_s, q_s – параметри, що враховують інерцію обертання, зсуви і поздовжні сили [8].

Для створення механічної моделі ортотропної плити подамо систему взаємно перпендикулярних регулярних балок [8] як набір взаємно ортогональних балочок-смужок прямокутного перерізу висоти h , зв'язаних між собою розподіленими пружними зв'язками у вигляді звичайної вінклерівської основи. Частотний параметр λ_{se}^4 містить, крім коефіцієнта зв'язку $\mu_s \omega_{ij}^2$, що при вільних коливаннях виникає від сил інерції і надає поштовху, ще й коефіцієнт k_n пружної основи [9], який набуває того чи іншого знака залежно від того, який із напрямків балок буде таким, що підтримує балки іншого напрямку.

Після переходу від жорсткості балки при згині до циліндричної жорсткості пластини $D_s = E_s h^3 / 12 (1 - v_1' v_2')$, а також з урахуванням того, що $\mu_s = h\rho/2$, $l_2 = l_1 = l$, рівняння (26) при $\sigma_s = 1$, $v_s = 0$, $q_s = 0$ набуде вигляду

$$\frac{\beta_j^4 - \frac{h\rho\omega_{ij}^2 l_1^4}{2D_2} + \beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 \frac{D_3 l_1^4}{D_2}}{\frac{h\rho\omega_{ij}^2 l_2^4}{2D_1} - \beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 \frac{D_3 l_2^4}{D_1} - \beta_i^4} = \frac{B_2}{B_1}, \quad (27)$$

де v_1', v_2' – коефіцієнти Пуассона в осьових напрямках плити; ρ – густина матеріалу плити; $D_3 = D_1 v_2' + 2D_k$, $D_k = Gh^3/12$; G – модуль пружності при зсуві; $\beta_{1i} = \pi i/ml$, $\beta_{2j} = \pi j/nl$.

Розв'язуючи рівняння (27) відносно ω_{ij}^2 , приходимо до відомого результату [9] для власних коливань ортотропної плити

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left(\beta_{1i}^4 D_1 + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 + \beta_{2j}^4 D_2 \right). \quad (28)$$

Якщо в серединній площині плити діють поздовжні сили, то

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[\beta_{1i}^4 D_1 + \beta_{2j}^4 D_2 + \beta_{1i}^2 \left(\beta_{2j}^2 D_3 \pm N_1 \right) + \beta_{2j}^2 \left(\beta_{1i}^2 D_3 \pm N_2 \right) \right]. \quad (29)$$

Аналогічно із рівняння (26) отримаємо вирази (30), (31) для визначення кругової частоти ω_{ij} з урахуванням відповідно інерції обертання та деформації зсуву

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{\beta_{1i}^4 D_1 + \beta_{2i}^4 D_2}{1 + \frac{r^2}{2} (\beta_{1i}^2 + \beta_{2j}^2)} + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 \right]; \quad (30)$$

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[\frac{\beta_{1i}^4 D_1}{1 + \beta_{1i}^2 \frac{D_1 k h^2}{12 D_k}} + \frac{\beta_{2i}^4 D_2}{1 + \beta_{2j}^2 \frac{D_2 k h^2}{12 D_k}} + 2\beta_{1i}^2 \beta_{2j}^2 D_3 \right], \quad (31)$$

де k – коефіцієнт, залежний від форми поперечного перерізу.

Оскільки наведені результати отримані шляхом граничного переходу для двох систем взаємно перпендикулярних балочок-смужок, то за допомогою такого ж підходу можна розв'язати і деякі інші окремі задачі комбінацій нерозрізних балок: плит, підкріплених регулярною сіткою ребер, нерозрізних плит або пакетів плит, з'єднаних між собою лінійно-пружними безінерційними зв'язками однакової жорсткості.

Висновки. Стисло викладено загальну методологію аналізу поперечних коливань прямокутних багатопрогонових ізотропних і трансверсально ізотропних пластин з дискретно змінюваною в одному паралельному до якоїсь пари сторін напрямі згинальної жорсткістю та при використанні перпендикулярних до цього напрямку пружних щодо вертикальних переміщень та кутів повертання лінійних опор з рівномірним розподілом уздовж них зосереджених мас (включень, накладок).

Аналіз часткових прикладів підтвердив коректність, надійність і продуктивність запропонованого підходу. Його застосування створює широкі можливості для ефективного застосування матричних підходів, реалізації паралельних обчислень при дослідженні складних пластинчастих систем та розв'язуванні задач оптимізації відповідних конструкцій.

Conclusions. The paper briefly describes the general methodology for the analysis of transverse vibrations of rectangular isotropic and transversely isotropic multispan plates with the bending rigidity, which discretely varies in parallel towards to an arbitrary pair of sides, and using linear bearings perpendicular to this direction, which are elastic towards the vertical displacements and rotation angles, with uniform distribution of the concentrated masses along them (inclusions, stringers).

Analysis of particular examples proved correctness, reliability and efficiency of the proposed approach. Its application provides wide opportunities for effective usage of matrix approaches, implementation of parallel computing in the analysis of complex systems of

plates and solution of optimization problems for corresponding structures.

Список використаної літератури

1. Коренев, Б.Г. Справочник по динамике сооружений [Текст] / Б.Г. Коренев, И.М. Рабинович. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
2. Справочник по строительной механике корабля: в 3 т. [Текст]; под ред. Г.В. Бойцова. – Л.: Судостроение, 1982. – 320 с.
3. Ивович, В.А. Переходные матрицы в динамике упругих систем: справочник [Текст] / В.А. Ивович. – М.: Машиностроение, 1981. – 183 с.
4. Распопов, А.С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций [Текст] / А.С. Распопов // Вісн. Дніпр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вип. 19. – С. 125–133.
5. Новацкий, В. Динамика сооружений [Текст] / В. Новацкий. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376 с.
6. Распопов, О.С. Поперечні коливання континуально-дискретних балок на суцільній пружній основі [Текст] / О.С. Распопов // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. Зб. наук. пр. / Фіз.-мех. ін-т. ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2008. – Вип. 10. – С. 183–193.
7. Распопов, О.С. Особливості моделювання вимушених коливань нерозрізних конструкцій в системі скінчених автоматів [Текст] / О.С. Распопов // Дороги і мости: Зб. наук. пр. – К.: ДерждорНДІ, 2008. – Вип. 8. – С. 229–236.
8. Распопов, А.С. К расчету поперечных колебаний пересекающихся балок с распределенными параметрами [Текст] / А.С. Распопов // Вопросы динамики мостов и теории колебаний: Межвуз. сб. науч. тр. – ДИИТ. 1993. – С. 90–94.
9. Варвак, П.М. Справочник по теории упругости [Текст] / П.М. Варвак, А.Ф. Рябов. – К.: Будівельник. – 1971. – 418 с.

Отримано 25.09.2012