Михайлович Т. Метод інтервального прогнозування водоспоживання із використанням моделі періодичної авторегресії / Михайлович Т., Фриз М. // Вісник ТНТУ. — 2012. — Том 66. — № 2. — С.249-257. — (математичне моделювання, математика. фізика).

УДК 519.876.5

Т. Михайлович; М. Фриз, канд. техн. наук

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МЕТОД ІНТЕРВАЛЬНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ ВОДОСПОЖИВАННЯ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МОДЕЛІ ПЕРІОДИЧНОЇ АВТОРЕГРЕСІЇ

Резюме. *Здійснено статистичний аналіз похибок прогнозу водоспоживання на основі моделі періодичної авторегресії з метою встановлення їх ймовірнісного розподілу. Проведено верифікацію моделі водоспоживання. Встановлено некорельованість похибок прогнозу, чим підтверджено адекватність моделі водоспоживання у вигляді послідовності періодичної авторегресії. Розроблено метод інтервального прогнозування водоспоживання на основі методів непараметричної статистики.*

Ключові слова: *водоспоживання, водопостачання, прогноз, модель, інтервал, похибка, авторегресія, періодичний.*

T. Mykhailovych, M. Fryz

METHOD OF INTERVAL WATER DEMAND FORECASTING USING PERIODIC AUTOREGRESSION MODEL

The summary. *Among the problems of water supply systems, the most significant are: zoning of water supply systems, pressure normalizing, selection of the optimal parameters for water consumption meters control. These problems can be solved by means of water consumption forecasting.*

The actual task is the development of water forecasting method for detection of water supply system emergency conditions: water leaks and poor service. This method must allow to estimate forecasting errors. Interval forecast is most useful in practical application. As a result they provide intervals which contain forecasting values with pre-specified probability.

Conventional methods for water supply forecasting do not meet the requirements as to the stochastic and daily-cyclic nature of hourly water consumption process. This article describes new mathematical model and forecasting method, which contributes to the solution of the tasks, concerning water supply systems.

The objective of this article is to show the developed method of water consumption operative interval forecasting.

Hourly water consumption process has been modeled as the periodic autoregression time series, after which, forecasting errors were estimated by performing the forecasting in the known time interval.

Statistical analysis of water consumption forecasting errors has been performed using periodic autoregression model. It allowed to identify probabilistic distribution of water consumption process.

New model of water consumption has been verified using the Ljung-Box Q-test. Miscorrelation of water consumption errors series has been found. Thus, adequacy of the proposed water consumption model as periodic autoregression series was proved. The method of water consumption interval forecasting has been developed using the methods of nonparametric statistics.

The method of water consumption interval forecasting was tested on a computer. The results of the experimental forecasting were compared with the real water consumption values for the appropriate time points. Probability of falling out of the intervals was estimated. These probability values are very close to those probability ones, specified as the input argument to the interval estimation function. Thus, the validity of this method for solving tasks of water consumption interval forecasting, has been concluded.

Keywords: *water consumption, water supply, forecast, forecasting, model, interval, error, autoregression, periodic.*

Постановка проблеми. Вирішення проблем, пов'язаних із енерго- та ресурсозбереженням у системах водопостачання [1–7], зокрема, зонування водопостачальної мережі, зниження тисків та підбір діаметрів будинкових лічильників водопостачальної системи, можна здійснити шляхом прогнозування водоспоживання.

Актуальним є розроблення методів прогнозування водоспоживання як засобу визначення аварійних станів системи водопостачання. Зокрема, методи прогнозування повинні дозволяти оцінювання похибки прогнозу. Найбільш корисним у практичних застосуваннях є інтервальний прогноз водоспоживання. З його допомогою можна отримати довірчі інтервали, які накривають прогнозовані значення водоспоживання із певною заданою довірчою ймовірністю [8].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Водоспоживанням називається процес споживання води користувачами системи питного водопостачання. Об'єктом дослідження у даній статті є погодинна інтенсивність водоспоживання – об'єм води у літрах, спожитий певною групою користувачів за одну годину.

Розрізняють три види прогнозу водоспоживання:

- оперативний – прогноз водоспоживання на наступну годину;
- короткотерміновий – прогноз водоспоживання на наступну добу;
- довготерміновий – прогноз водоспоживання на наступний тиждень чи місяць.

Серед математичних моделей, методів аналізу та оперативного прогнозу водоспоживання найвідомішими є моделі експоненційного згладження Тейлора [2], узагальненої авторегресійної умовної гетероскедастичності [2], штучної нейронної мережі [3–6], регресійна модель [5], модель Міяу [7].

Недоліком методу прогнозування на основі моделі експоненційного згладження Тейлора є те, що він не дозволяє здійснювати погодинний прогноз водоспоживання.

Метод прогнозу на основі регресійної моделі використовувався авторами [2, 5] лише для прогнозування добових відліків водоспоживання.

Метод прогнозування водоспоживання на основі моделі штучної нейронної мережі [3] не враховує стохастичний характер водоспоживання; процес «навчання» нейронної мережі моделі може бути невизначено тривалим до досягнення найточніших вагових коефіцієнтів; модель не дозволяє оцінити похибку отриманого прогнозу; впровадження системи керування водопостачанням на основі моделі штучної нейронної мережі вимагає великих економічних затрат порівняно з іншими методами.

Також вищезгадані моделі не враховують добову циклічність водоспоживання, а відповідні методи прогнозування водоспоживання не дозволяють здійснювати інтервальний прогноз.

В [9] розроблено метод довготермінового інтервального прогнозу стохастичних періодичних навантажень енергосистем, який, однак, не дозволяє здійснювати оперативне прогнозування.

Метою роботи є розроблення методу інтервального прогнозування водоспоживання.

Постановка завдання. Для досягнення мети необхідно:

1. Запропонувати метод оперативного прогнозування водоспоживання на основі моделі періодичної авторегресії.

2. Здійснити статистичний аналіз похибок прогнозу водоспоживання на основі моделі періодичної авторегресії з метою встановлення їх ймовірнісного розподілу.

3. Розробити метод інтервального прогнозування водоспоживання.

Результати дослідження. На основі результатів [9, 10] у роботі [1] побудовано математичну модель водоспоживання у вигляді періодичного умовного лінійного випадкового процесу $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$, для якого будь-яка n-вимірна ($n = 1, 2, ...$) функція розподілу $F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$ є T-періодичною ($T > 0$) за сукупністю своїх часових аргументів, тобто

$$F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1 + T, t_2 + T, ..., t_n + T).$$

Моментні функції T-періодичного випадкового процесу також є T-періодичними за сукупністю часових аргументів. Для моделі водоспоживання $T = 24$ год [1]. У задачі оперативного прогнозу використовується послідовність $\tilde{\xi}_t, t \in \mathbf{Z}$ погодинних відліків водоспоживання, яка є T-періодичною випадковою послідовністю.

Математичне формулювання задачі оперативного прогнозу має такий вигляд: необхідно найкращим чином (в розумінні мінімуму середньоквадратичного відхилення) оцінити значення випадкової величини $\tilde{\xi}_t$ на основі спостереження випадкових величин $\tilde{\xi}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-p+1}, ..., \tilde{\xi}_{t-1}$, $p > 0$. Тобто потрібно знайти таку функцію $f(\tilde{\xi}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-p+1}, ..., \tilde{\xi}_{t-1})$, яка б забезпечила мінімум величини $\mathbf{M}\left(\tilde{\xi}_t - f(\tilde{\xi}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-p+1}, ..., \tilde{\xi}_{t-1})\right)^2$. Відомо, що оптимальний у цьому розумінні прогноз має вигляд: $f\left(\tilde{\xi}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-p+1}, ..., \tilde{\xi}_{t-1}\right) = \mathbf{M}\left(\tilde{\xi}_t \middle| (\tilde{\xi}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-p+1}, ..., \tilde{\xi}_{t-1})\right)$ [11], де $\mathbf{M}\left(\tilde{\xi}_t \middle| (\tilde{\xi}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-p+1}, ..., \tilde{\xi}_{t-1})\right)$ – умовне математичне сподівання, яке в загальному випадку є нелінійною функцією від спостережуваних випадкових величин $\tilde{\xi}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-p+1}, ..., \tilde{\xi}_{t-1}$. Використання такого підходу до прогнозування на практиці пов'язане з суттєвими труднощами, оскільки виникає необхідність оцінювання багатовимірних розподілів досліджуваного процесу.

Інший підхід – лінійне прогнозування, при якому функція $f(\tilde{\xi}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-p+1}, ..., \tilde{\xi}_{t-1})$, що забезпечує оптимальний прогноз, шукається лише в класі лінійних функцій. Теорія лінійного прогнозу стаціонарних випадкових процесів розроблена у працях А.М. Колмогорова, Н. Вінера [11, 12]. Такий підхід досить просто реалізується практично, оскільки потребує оцінювання лише моментних функцій першого і другого порядку досліджуваного процесу.

На сьогодні, методи лінійного прогнозування розроблені також і для періодичних випадкових процесів [13] (в [13] ці процеси називаються іншим дуже поширеним терміном – циклостаціонарні (cyclostationary) процеси). Причому, як зазначають автори [13], задача лінійного прогнозу періодичної випадкової послідовності є еквівалентною задачі її зображення у вигляді послідовності періодичної авторегресії.

Таким чином, перш за все розглянемо зображення періодичної послідовності $\tilde{\xi}_t, t \in \mathbf{Z}$ погодинних відліків водоспоживання у вигляді моделі періодичної авторегресії. Зауважимо, що термін «періодична авторегресія», очевидно, є найпоширенішим у літературі [13], зустрічаються також назви «процес авторегресії з

періодично змінними параметрами» [14], «процес авторегресії з періодичними структурами» [15].

Математична модель послідовності погодинних відліків водоспоживання у вигляді послідовності періодичної (з періодом $T = 24$ год.) авторегресії зображується

$$\tilde{\xi}_t = m_t + \xi_t, t \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

де $m_t = \mathbf{M}\tilde{\xi}_t$ – математичне сподівання послідовності $\tilde{\xi}_t$, детермінована функція, що задовольняє умову $m_t = m_{t+T}$;

ξ_t – центрована ($\mathbf{M}\xi_t = 0$) послідовність періодичної авторегресії, яку можна зобразити у вигляді

$$\xi_t = \sum_{k=1}^{p} a_k(t)\xi_{t-k} + \eta_t, \tag{2}$$

де p – порядок авторегресії;

$a_k(t)$ – періодичні параметри авторегресії, $a_k(t) = a_k(t+T), k = \overline{1,p}$;

η_t – центрований білий шум з дисперсією σ_η^2.

Згідно з [13] послідовність періодичної авторегресії є періодичною в розумінні періодичності її скінченновимірних функцій розподілу за сукупністю часових аргументів. Останнє недавно показано також у [15] методом характеристичних функцій для випадку послідовності періодичної авторегресії з безмежно подільним породжуючим білим шумом.

Оцінка періодичного математичного сподівання послідовності (1) на основі вибірки $\tilde{\xi}_t, t = \overline{1,N}$, обсягом N, має вигляд

$$\hat{m}_t = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} \tilde{\xi}_{t+kT}, t = \overline{1,T}, \tag{3}$$

де $q = [N/T]$;

Для решти значень t $\hat{m}_t = \hat{m}_{((t-1)\bmod T)+1}, t = T+1, T+2, \ldots$.

Оцінювання параметрів $\hat{a}_k(t)$ послідовності авторегресії (2) здійснюється методом найменших квадратів або еквівалентним йому методом Юла-Уокера [14]

$$\hat{\mathbf{A}}_t = \left(\hat{\mathbf{W}}_t^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{W}}_t\right)^{-1}\hat{\mathbf{W}}_t^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{X}}_t, t = 1,2,\ldots,T, \tag{4}$$

де

$$\hat{\mathbf{A}}_t = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p+t) \\ \hat{a}_2(p+t) \\ \cdots \\ \hat{a}_p(p+t) \end{pmatrix}; \ \hat{\mathbf{X}}_t = \begin{pmatrix} \xi_{p+t} \\ \xi_{p+t+T} \\ \cdots \\ \xi_{p+t+(q-1)T} \end{pmatrix}; \ \hat{\mathbf{W}}_t = \begin{pmatrix} \xi_{t+p-1}, & \xi_{t+p-2}, & \cdots & \xi_t \\ \xi_{t+T+p-1}, & \xi_{t+T+p-2}, & \cdots & \xi_{t+T} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{t+(q-1)T+p-1}, & \xi_{t+(q-1)T+p-2}, & \cdots & \xi_{t+(q-1)T} \end{pmatrix}.$$

Тоді оцінка дисперсії білого шуму η_t обчислюється як

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = \frac{1}{p+qT-1}\sum_{t=1}^{T}\sum_{x=0}^{q-1}\left(\xi_{p+xT+t} - \sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i(p+t)\xi_{p+xT+t-i}\right)^2. \tag{5}$$

Метод оперативного прогнозу водоспоживання випливає з обґрунтованої його математичної моделі. А саме, прогнозоване значення $\hat{\xi}_t$ на основі попередніх відомих значень водоспоживання $\xi_{t-p}, \xi_{t-p+1}, \ldots, \xi_{t-2}, \xi_{t-1}$ обчислюється таким чином:

$$\hat{\xi}_t = \hat{m}_t + \sum_{k=1}^{\hat{p}} \hat{a}_k(t)\, \xi_{t-k}. \tag{6}$$

Із використанням критерію «довжини мінімального опису» [16] можна отримати порядок моделі авторегресії $p = 24$.

На рисунку 1 наведено реалізацію водоспоживання та реалізацію прогнозу водоспоживання при $p = 24$.

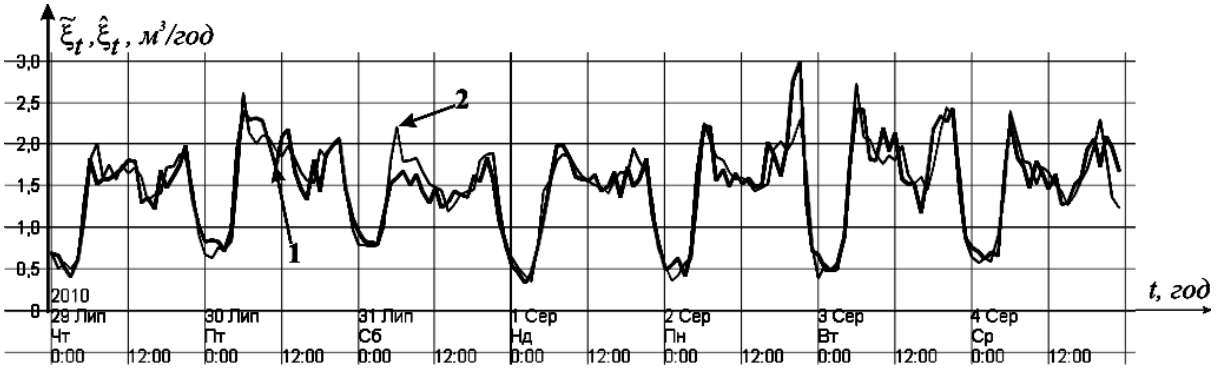

Рисунок 1. Результати прогнозу водоспоживання:

1 – реалізація водоспоживання ($\tilde{\xi}_t$); 2 – реалізація прогнозу водоспоживання ($\hat{\xi}_t$)

Figure 1. Water consumption forecasting results:

1 – water consumption implementation ($\tilde{\xi}_t$); 2 – water consumption forecast implementation ($\hat{\xi}_t$)

З метою верифікації моделі погодинного водоспоживання у вигляді періодичної авторегресії та розроблення методу інтервального прогнозування проведено статистичний аналіз послідовності похибок прогнозу, яка має вигляд

$$\varepsilon_t = \tilde{\xi}_t - \hat{\xi}_t, t = \overline{1, N}, \tag{7}$$

де N – обсяг вибірки прогнозованої послідовності.

На рисунку 2 наведено приклад реалізації послідовності похибок прогнозування водоспоживання.

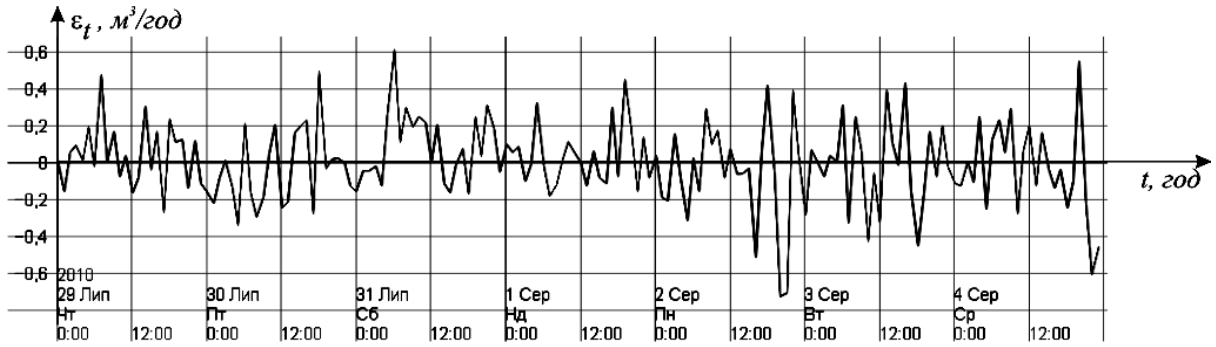

Рисунок 2. Реалізація послідовності похибок прогнозу водоспоживання

Figure 2. Forecast error series implementation of water consumption process

Оскільки математичне сподівання послідовності ε_t дорівнює нулю, оцінка кореляційної функції послідовності ε_t має вигляд [8]

$$\hat{R}_\varepsilon(\tau) = \frac{1}{N-\tau}\sum_{k=1}^{N-\tau}\varepsilon_k\varepsilon_{k+\tau},\ \ \tau = \overline{0, N_1}\,. \tag{8}$$

Оцінка нормованої кореляційної функції послідовності ε_t має вигляд

$$\hat{\rho}_\varepsilon(\tau) = \frac{\hat{R}_\varepsilon(\tau)}{\hat{R}_\varepsilon(0)}. \tag{9}$$

На рисунку 3 наведено реалізацію оцінки нормованої кореляційної функції послідовності ε_t.

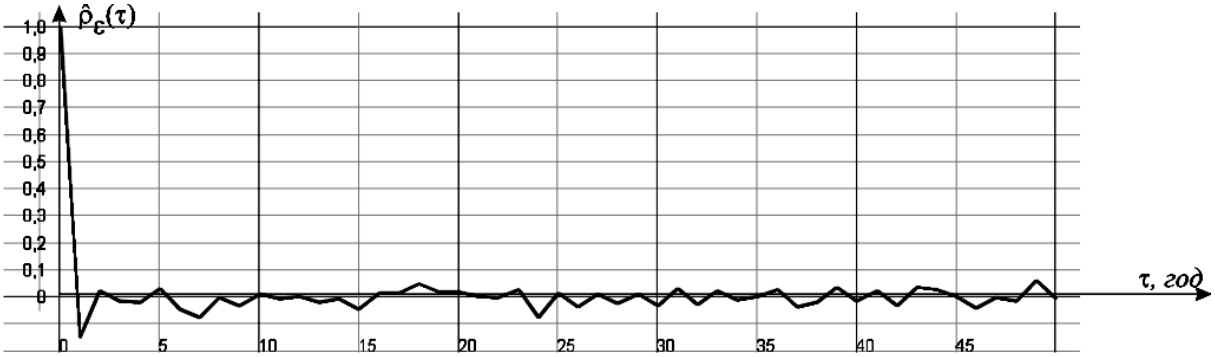

Рисунок 3. Оцінка нормованої кореляційної функції реалізації послідовності похибок прогнозу
Figure 3. Estimation of the normalized correlation function of forecast error series implementation

На основі рисунка 3 можна висунути гіпотезу про некорельованість відліків послідовності $\varepsilon_t, t \in \mathbf{Z}$. Цю гіпотезу можна перевірити з використанням відомого Q-тесту Льюнга-Бокса [17]. Статистика Льюнга-Бокса має вигляд

$$Q = N(N+2)\sum_{\tau=1}^{N_1}\frac{\hat{\rho}_\varepsilon^2(\tau)}{N-\tau}. \tag{10}$$

Гіпотеза про некорельованість відліків послідовності ε_t приймається у випадку

$$Q < \chi^2_{1-\alpha, N_1}, \tag{11}$$

де $\chi^2_{1-\alpha, N_1}$ – квантиль χ^2-розподілу рівня $1-\alpha$ з N_1 ступенями вільності ($\alpha = 0,05$ – рівень значущості).

Можна встановити, чи буде послідовність похибок прогнозу водоспоживання некорельованою. Для цього потрібно здійснити Q-тест Льюнга-Бокса над кількома вибірками статистичних даних водоспоживання.

У таблицю 1 зведено результати тестування кількох вибірок водоспоживання.

Таблиця 1. Результати Q-тесту Льюнга-Бокса на некорельованість
Table 1. Results of the Ljung-Box Q-test on miscorrelation

Номер тесту	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Обсяг вибірки	768	1200	384	744	1272	984	336	2184	1104	384
Q	55,4	144,1	38,7	52,3	120,2	60,7	25,9	94,2	221,1	27,0
$\chi^2_{1-\alpha, N_1}$	67,4	146,2	43,6	61,5	90,1	67,9	31,3	131,0	124,2	43,3

Результат тесту	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+

Таким чином, можна зробити висновок, що послідовність ε_t являє собою білий шум, що є підтвердженням адекватності моделі водоспоживання у вигляді періодичної авторегресії.

Для обґрунтування методу інтервального прогнозування водоспоживання на основі моделі періодичної авторегресії необхідно мати інформацію щодо властивостей імовірнісного розподілу послідовності ε_t.

Перш за все, перевіримо гіпотезу про те, що розподіл послідовності ε_t є гауссівський. Для цього скористаємося критерієм згоди χ^2 [8].

У таблицю 2 зведено результати перевірки нормальності розподілу для деяких довільних вибірок водоспоживання (різні вибірки відповідають різним об'єктам водоспоживання).

Таблиця 2. Результати перевірки нормальності розподілу
Table 2. Results of distribution identification

Номер тесту	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Обсяг вибірки	1344									
Значення статистики критерію	100,3	64,1	85,8	84,4	85,3	78,9	51,0	50,3	47,7	62,1
Критичне значення статистики	27,587									
Нормальність	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Таким чином, розподіл послідовності ε_t не можна вважати гауссівським.

Оскільки розподіл послідовності ε_t є відмінним від нормального, то метод прогнозу будемо будувати з використанням непараметричного підходу. А саме, для заданої довірчої ймовірності γ інтервал прогнозу водоспоживання будемо будувати таким чином:

$$L_t = \hat{\xi}_t + \varepsilon_{\left(\left[N\frac{1-\gamma}{2}\right]+1\right)}$$
$$H_t = \hat{\xi}_t + \varepsilon_{\left(\left[N\frac{1+\gamma}{2}\right]+1\right)}, \qquad (12)$$

де L_t – нижня межа; H_t – верхня межа;

$\varepsilon_{\left(\left[N\frac{1-\gamma}{2}\right]+1\right)}$ – непараметрична оцінка квантилю розподілу послідовності ε_t рівня $\frac{1-\gamma}{2}$;

$\varepsilon_{\left(\left[N\frac{1+\gamma}{2}\right]+1\right)}$ – непараметрична оцінка квантилю розподілу послідовності ε_t рівня $\frac{1+\gamma}{2}$.

Зрозуміло, що для послідовності ε_t (7): $\varepsilon_{\left(\left[N\frac{1-\gamma}{2}\right]+1\right)} < 0$ та $\varepsilon_{\left(\left[N\frac{1+\gamma}{2}\right]+1\right)} > 0$.

На рисунку 4 наведено приклад побудови інтервального прогнозу водоспоживання ($\gamma = 0,95$).

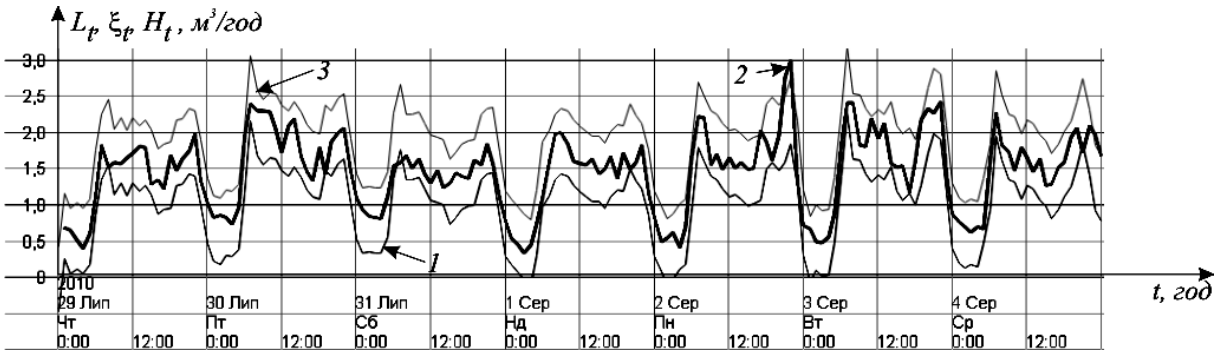

Рисунок 4. Реалізація інтервального прогнозу водоспоживання:
1 – нижня межа прогнозу водоспоживання (L_t); 2 – реалізація водоспоживання (ξ_t);
3 – верхня межа прогнозу водоспоживання(H_t)

Figure 4. Implementation of the interval water consumption forecast:
1 – lower bound of forecast (L_t); 2 –water consumption implementation (ξ_t);
3 – higher bound of forecast (H_t).

Висновки. Здійснено математичне моделювання процесу водоспоживання з використанням моделі періодичної авторегресії, що дозволило обґрунтувати методи статистичного аналізу та оперативного прогнозу водоспоживання з урахуванням його циклічності. На основі Q-тесту Льюнга-Бокса перевірено гіпотезу про некорельованість похибок прогнозу водоспоживання з використанням моделі періодичної авторегресії, що підтверджує адекватність цієї моделі. На базі критерію згоди χ^2 Пірсона відхилено гіпотезу про нормальність похибок прогнозу, на основі чого вирішено будувати метод інтервального прогнозування водоспоживання з використанням непараметричного підходу. Розроблено метод інтервального прогнозування водоспоживання на основі моделі періодичної авторегресії, що дозволяє здійснювати виявлення аварійних станів водопостачальної мережі.

Conclusion. Mathematical modeling of hourly water consumption process has been carried out. Periodic autoregression model has been used to model hourly water consumption. It allowed interpret the methods of statistical analysis and operative forecasting of water consumption process considering its cyclicity. The Ljung-Box Q-test was used to testify the hypothesis of miscorellation of water consumption forecast errors on application of the periodic autoregression model. It confirmed the adequacy of the developed matematical model. The hypothesis of normal distribution of forecast errors has been rejected by the Pearson χ^2 criterion. Decision of building water consumption interval forecasting method using non-parametric approach has been taken. The water consumption interval forecasting method has been developed. It allows to detect emergency conditions of water supply systems and to solve the other actual tasks in water supply.

Список використаної літератури

1. Фриз, М.Є. Обґрунтування математичної моделі водоспоживання у вигляді умовного лінійного випадкового процесу [Текст] / М.Є. Фриз, Т.В. Михайлович // Електроніка та системи управління. – 2010. – №3(25). – С. 137–142.
2. Cadaio, J. Performance of combined double seasonal univariate time series models for forecasting water consumption [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://mpra.ub.uni-muenchen.de/15242.

3. Water Consumption Forecasting to Improve Energy Efficiency of Pumping Operations / AwwaRF. – U.S.A., Denver, CO: American Water Works Association, 2007. – 117 с.
4. Makridakis, S. Averages of forecasts: Some empirical results / S. Makridakis, R. Winkler. // Management Science. – 1983. – №29. – P. 987–996.
5. Jain, A. Short-Term Water Demand Forecast Modelling at IIT Kanpur Using Artificial Neural Networks / A. Jain, A. K. Varshney, U. C. Joshi // Water Resources Management. – 2001. – №15. – P. 299–321.
6. Кінчур, О.Ф. Перспективи використання штучних нейронних мереж при розробці систем керування [Текст] / О.Ф. Кінчур // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. – 2007. – №3(39). – Ч.2. – С. 313.
7. Miaou, S. P. A Class of Time Series Urban Water Demand Models With Nonlinear Climatic Effects / S. P. Miaou. // Water Resources Research. – 1990. – №2. – P. 169–178.
8. Бабак, В.П. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика [Текст] / В.П. Бабак, Б.Г. Марченко, М.Є. Фриз. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
9. Марченко, Б.Г. Побудова моделі та аналіз стохастичних періодичних навантажень енергосистем [Текст] / Б.Г. Марченко, М.В. Приймак // Праці Інституту електродинаміки НАН України. Збірник наукових праць. – 1999. – Вип. 1. – С. 129–153.
10. Марченко, Б.Г. Характеристична функція умовного лінійного випадкового процесу як математичної моделі газоспоживання [Текст] / Б.Г. Марченко, Н.В. Мулик, М.Є. Фриз // Електроніка та системи управління. – 2006. – №3 (9). – С. 40–46.
11. Гихман, И.И. Введение в теорию случайных процессов [Текст] / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1977. – 570 с.
12. Ширяев, А.Н. Вероятность [Текст] / А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
13. Gardner, W.A. Cyclostationarity: Half a century of research / W.A. Gardner, A. Napolitano, L. Paura // Signal Processing. – Elsevier, 2006. – no. 86 (4). – PP. 639–697.
14. Капустинскас, А. Идентификация линейных случайных процессов [Текст] / А. Капустинскас, А. Немура. – Вильнюс: Мокслас, 1983. – 160 с.
15. Марченко, Б.Г. Линейные процессы авторегрессии с периодическими структурами как модели вибрационных сигналов / Б.Г. Марченко, В.Н. Зварич // Электронное моделирование. – 2011. – Т. 33. – №2. – С. 25–32.
16. Марпл.-мл., С.Л. Цифровой спектральный аналииз и его приложения [Текст] / С.Л. Марпл.-мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
17. Brockwell, Peter J. Introduction to Time Series and Forecasting / Peter J. Brockwell and Richard A. Davis // Springer. – 2nd ed. – 2002.

Отримано 15.10.2011