

УДК 539.3

О. Трохимчук; А. Сяський, докт. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет

ТИСК ЖОРСТКОГО ШТАМПА З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ НА ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИЙ КОНТУР КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ

Побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта і логарифмічними ядрами в задачі про тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсилений криволінійний контур нескінченної ізотропної пластинки. Методом колокації досліджується вплив на стан пластинки форми отвору, величини зони контакту, жорсткості підсилювального ребра.

Ключові слова: контактна взаємодія, жорсткий штамп, ребро жорсткості, сингулярні інтегральні рівняння.

O. Trokhymchuk, A. Syasky

PRESSURE OF A STIFF PUNCH WITH ANGULAR POINTS ON PARTLY STRONGER CONTOUR OF CURVILINEAR HOLE IN AN INFINITE ISOTROPIC PLATE

The system of singular integral differential equations with Gilbert kernels and logarithmic kernels in problems of pressure of a stiff punch with angular points on partly stronger contour of curvilinear hole in an infinite isotropic plate is built. It is exploring influence of the hole's shape, the interface's size and the booster rib's stiffness on the plate's state by the collocation method.

Key words: contact interaction, rigid punch, stiffening rib, singular integral equations.

Задачі про визначення напружень і деформацій при контакті твердих тіл виникають в інженерній практиці щоразу, коли необхідно передати задане зусилля від одного елемента конструкції до іншого.

Найбільш повно контактні задачі досліджені для кругових циліндричних тіл [1, 2]. Загальна постановка задач про контактну взаємодію гладкого жорсткого штампа або штампа з кутовими точками з контуром криволінійного отвору нескінченної пластинки та розв'язки конкретних контактних задач наведені в [3-7].

Зростаючі вимоги до надійності і довговічності інженерних конструкцій приводять до необхідності якісно нових задач контактної взаємодії твердих тіл, зокрема узагальнених контактних для штампів з кутовими точками при наявності за межами зони контакту тонких підсилювальних ребер.

1. Постановка задачі. Система інтегрально-диференціальних рівнянь. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого Γ має вигляд правильного N -кутника із закругленими кутами. Систему прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат в середній площині пластинки оберемо таким чином, щоб початок відліку співпадав з центром отвору, а полярна вісь співпадала з віссю абсцис (рис.1).

В отвір пластинки вставлено симетричний відносно осі Ox абсолютно жорсткий штамп з кутовими точками. Кривини контурів штампа і пластинки в зоні контакту вважаємо однаковими. До штампа прикладено силу P_0 , яка діє вздовж осі симетрії отвору. Зовнішнє навантаження на пластинку відсутнє.

Контакт між пластинкою та штампом гладкий і здійснюється на ділянці $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$, де α_0^* – полярний кут, що визначає зону контакту.

За межами зони контакту на симетричній ділянці $[\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ ($\beta_0^* + \alpha_0^* \leq \pi$) контур отвору підсилено тонким ребром, яке будемо моделювати пружною лінією змінної жорсткості на розтяг (стиск).

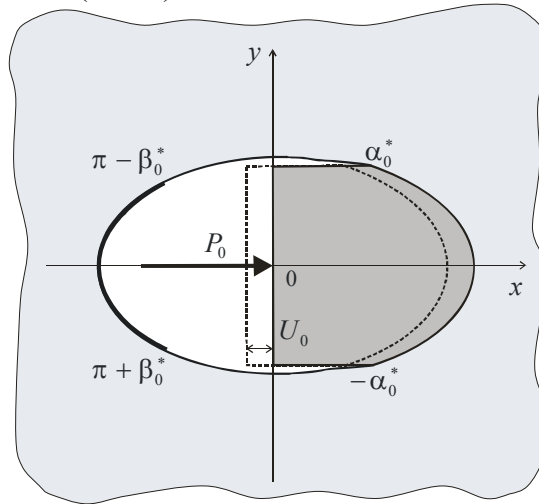


Рисунок 1 - Розрахункова схема пластинки

Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних зусиль $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ під штампом та на ділянці підсилення, а також кільцевих зусиль T_λ на контурі Γ .

Нехай раціональна функція [3]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає середня площина пластинки в комплексній площині $z = x + iy$. Тут R_0 – характерний розмір отвору (вважаємо, що $R_0 = 1$); ε – параметр, який визначає відхилення контуру заданого отвору від кола; $i = \sqrt{-1}$. При $N = 2$, $|\varepsilon| < 1$ функція (1) реалізує конформне відображення на зовнішність γ зовнішності еліпса в площині z ; при $N = 3$, $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$ – зовнішності трикутника із закругленими кутами.

Граничні умови в зоні контакту при відсутності сил тертя згідно з [5, 7] запишемо у вигляді

$$U + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} V = U_0; \quad S_{\rho\lambda}^0(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0], \quad (2)$$

де

$$a(\lambda) = \cos(\lambda) - \varepsilon(N-1) \cdot \cos(N-1)\lambda; \quad b(\lambda) = \sin(\lambda) + \varepsilon(N-1) \cdot \sin(N-1)\lambda;$$

$[-\alpha_0; \alpha_0]$ – образ ділянки $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$ при відображенні (1); U_0 – поступальне горизонтальне зміщення штампа.

У зоні підсилення граничні умови мають вигляд [8]

$$T_\rho = \frac{\Omega(\lambda)}{K^{\frac{3}{2}}(\lambda)} E_0 F(s) \varepsilon_\lambda;$$

$$S_{\rho\lambda} = -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial T_\rho}{\partial \lambda} - \frac{T_\rho (K(\lambda)(1-2N) + 3\alpha(\lambda)N)\beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]. \quad (3)$$

Тут

$$\Omega(\lambda) = K(\lambda)(1 - N) + \alpha(\lambda)N; \quad K(\lambda) = |\omega'(\sigma)|^2 = \alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda);$$

$$\alpha(\lambda) = 1 - \varepsilon(N - 1)\cos(N\lambda); \quad \beta(\lambda) = \varepsilon(N - 1)\sin(N\lambda);$$

$\sigma = e^{i\lambda}$; $E_0F(s)$ – змінна жорсткість підсилення на розтяг (стиск); $F(s) = 2h_0b_0(s)$; $b_0(s)$ – змінна ширина ребра, $2h_0$ – його товщина; s – дуга на контурі Γ ; $[\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ – образ ділянки $[\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ при відображенні (1).

Відносна осьова пружна деформація ε_λ контуру Γ на підставі [8] визначається за формулою

$$\begin{aligned} \varepsilon_\lambda = \frac{1}{2Eh \cdot K(\lambda)} & \cdot \left[(1 - \nu) \cdot K(\lambda) \cdot T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t) T_\rho^0(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} K_1(\lambda, t) \tilde{T}_\rho(t) dt + \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_2(\lambda, t) S_{\rho\lambda}^0(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} K_2(\lambda, t) \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_2(\lambda, t) T_\rho^0(t) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda - t}{2}\right) dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} K_2(\lambda, t) \tilde{T}_\rho(t) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda - t}{2}\right) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t) S_{\rho\lambda}^0(t) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda - t}{2}\right) dt + (4) \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} K_1(\lambda, t) \tilde{S}_{\rho\lambda}(t) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda - t}{2}\right) dt + \alpha(\lambda) \tilde{\varepsilon}^0 + \beta(\lambda) \tilde{V}^0 \right], \end{aligned}$$

де E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; e^{it} – точка на γ ;

$$T_\rho(t) = \begin{cases} T_\rho^0(t), & t \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{T}_\rho(t), & t \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \end{cases} \quad S_{\rho\lambda}(t) = \begin{cases} S_{\rho\lambda}^0(t), & t \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{S}_{\rho\lambda}(t), & t \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \end{cases}$$

$$K_1(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad K_2(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t);$$

$$\tilde{\varepsilon}^0 = \frac{P_0}{2\pi} [(3 - \nu) \cdot \cos(\lambda) - (1 + \nu)(N - 2)\varepsilon \cdot \cos(N - 1)\lambda]; \quad (5)$$

$$\tilde{V}^0 = \frac{P_0}{2\pi} [-(3 - \nu) \cdot \sin(\lambda) + (1 + \nu)(N - 2)\varepsilon \cdot \sin(N - 1)\lambda].$$

Компоненти вектора зміщення контурних точок при заданому навантаженні відповідно до [6, 7] запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} U|_\Gamma = \frac{1}{2Eh} & \left[(1 - \nu) \int_0^\lambda f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{\lambda - t}{2}\right)\right) dt + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{\lambda - \tilde{t}}{2}\right)\right) d\tilde{t} + \frac{P_0 \varepsilon (N - 2)(1 + \nu)}{2\pi} \cos(N - 2)\lambda + C_1 \right]; \\ V|_\Gamma = \frac{1}{2Eh} & \left[(1 - \nu) \int_0^\lambda f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{\lambda - t}{2}\right)\right) dt - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{\lambda - \tilde{t}}{2}\right)\right) d\tilde{t} + \frac{(1 - \nu)P_0\lambda}{2\pi} - \frac{P_0 \varepsilon (N - 2)(1 + \nu)}{2\pi} \sin(N - 2)\lambda + C_2 \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds; \quad e^{i\theta} = e^{i\lambda} \cdot \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}; \quad ds = \tilde{\rho} d\theta = |\omega'(\sigma)| d\lambda;$$

$$f'_j(t) = \begin{cases} f'_j(t), & t \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ 0, & t \notin [-\alpha_0; \alpha_0]; \end{cases} \quad f'_j(\tilde{t}) = \begin{cases} \tilde{f}'_j(\tilde{t}), & \tilde{t} \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \\ 0, & \tilde{t} \notin [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]; \end{cases} \quad j = 1, 2; \quad (7)$$

ds – елемент дуги; θ – кут між нормаллю до контуру Γ і віссю Ox ; $\tilde{\rho}$ – радіус кривини контуру Γ ; C_1, C_2 – сталі, які визначають зміщення контуру Γ як жорсткого цілого; $\tilde{t} = t - \pi$, $t \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$, $\tilde{t} \in [-\beta_0; \beta_0]$.

Підставивши співвідношення (4) – (6) в граничні умови (2), (3), отримаємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта та логарифмічними ядрами для визначення зусиль T_ρ^0 , \tilde{T}_ρ , $\tilde{S}_{\rho\lambda}$ в зоні контакту і на ділянці підсилення

$$\begin{aligned} & \left[(1-\nu) \int_0^\lambda f'_1(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \cdot \ln \left(\sin \left(\frac{\lambda-t}{2} \right) \right) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \cdot \ln \left(\cos \left(\frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right) \right) d\tilde{t} \right] + \\ & + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[(1-\nu) \int_0^\lambda f'_2(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \cdot \ln \left(\sin \left(\frac{\lambda-t}{2} \right) \right) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \cdot \ln \left(\cos \left(\frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right) \right) d\tilde{t} \right] - \\ - C^* & = - \frac{P_0 \varepsilon (N-2)(1+\nu)}{2\pi} \cos(N-2)\lambda + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[\frac{P_0 \varepsilon (N-2)(1+\nu)}{2\pi} \sin(N-2)\lambda - \frac{(1-\nu)P_0\lambda}{2\pi} \right]; \\ & S_{\rho\lambda}^0(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\rho(\lambda) & = \frac{\Omega(\lambda)}{K^{\frac{5}{2}}(\lambda)} \cdot \frac{E_0 F(s)}{2Eh} \left[(1-\nu) \cdot K(\lambda) \cdot \tilde{T}_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t) T_\rho^0(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0}^{\beta_0} K_3(\lambda, \tilde{t}) \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) d\tilde{t} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_0}^{\beta_0} K_5(\lambda, \tilde{t}) \tilde{S}_{\rho\lambda}(\tilde{t}) \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right) d\tilde{t} + \alpha(\lambda) \tilde{\varepsilon}^0 + \beta(\lambda) \tilde{V}^0 \right]; \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{\rho\lambda} = - \frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial T_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\tilde{T}_\rho(K(\lambda)(1-2N) + 3\alpha(\lambda)N)\beta(\lambda)N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0], \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0; \beta_0]$$

де позначено $C^* = 2EhU_0 - C_1$;

$$K_3(\lambda, \tilde{t}) = \alpha(\lambda)\alpha(\tilde{t}) + \beta(\lambda)\beta(\tilde{t}); \quad K_4(\lambda, \tilde{t}) = \alpha(\lambda)\beta(\tilde{t}) - \beta(\lambda)\alpha(\tilde{t});$$

$$K_5(\tilde{\lambda}, \tilde{t}) = \alpha(\tilde{\lambda})\alpha(\tilde{t}) + \beta(\tilde{\lambda})\beta(\tilde{t}); \quad K_6(\tilde{\lambda}, \tilde{t}) = \alpha(\tilde{\lambda})\beta(\tilde{t}) - \beta(\tilde{\lambda})\alpha(\tilde{t}).$$

Величини $f'_1, f'_2, \tilde{f}'_1, \tilde{f}'_2$ з контактними зусиллями $T_\rho^0, S_{\rho\lambda}^0, \tilde{T}_\rho, \tilde{S}_{\rho\lambda}$ зв'язані залежностями

$$\begin{aligned} T_\rho^0 & = \frac{a(\lambda)f'_1(\lambda) - b(\lambda)f'_2(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad S_{\rho\lambda}^0 = \frac{-a(\lambda)f'_1(\lambda) - b(\lambda)f'_2(\lambda)}{K(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0] \\ \tilde{T}_\rho & = \frac{a(\lambda)\tilde{f}'_1(\lambda) - b(\lambda)\tilde{f}'_2(\lambda)}{K(\lambda)}; \quad \tilde{S}_{\rho\lambda} = \frac{-a(\lambda)\tilde{f}'_1(\lambda) - b(\lambda)\tilde{f}'_2(\lambda)}{K(\lambda)}, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]. \end{aligned} \quad (9)$$

Крім системи (8), (9), повинні виконуватися умови рівноваги штампа і підсилення [3,8] як жорстких цілих

$$\int_{-\alpha_0^*}^{\alpha_0^*} (T_\rho + S_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = -P_0; \quad \int_{\pi-\beta_0^*}^{\pi+\beta_0^*} (T_\rho + S_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds = 0, \quad (10)$$

з яких випливає

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) dt = -P_0; \quad T_\rho(\pi - \beta_0) = T_\rho(\pi + \beta_0) = 0. \quad (11)$$

Якщо величини $T_\rho^0, \tilde{T}_\rho, \tilde{S}_{\rho\lambda}$ стануть відомі, то кільцеві зусилля T_λ визначаються за формулою [8]

$$T_\lambda = \nu T_\rho + 2Eh\varepsilon_\lambda. \quad (12)$$

Співвідношення (8), (9), (11), (12) визначають математичну модель задачі про тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсилений криволінійний контур нескінченної ізотропної пластинки.

Розглянемо граничні випадки задачі (8), (9), (11).

- Якщо $E_0 = 0$ (відсутнє пружне підсилення), то з (8), (9), (11) отримаємо систему рівнянь для задачі про тиск жорсткого симетричного штампа з кутовими точками на вільний криволінійний контур нескінченної ізотропної пластинки [7].
- При $\varepsilon = 0$ знаходимо розв'язок задачі для кругового отвору.
- Якщо $\alpha_0 \rightarrow 0$, то система (8), (9), (11) визначає розв'язок задачі про тиск зосередженої сили (клиноподібного штампа) на контур частково підсиленого криволінійного отвору в ізотропній пластинці.
- При збільшенні зони контакту можна досягнути граничного значення кута α_0^{cp} , при якому нормальні контактні напруження T_ρ^0 в кутових точках дорівнюють нулю. Це означає, що при такій зоні контакту штамп з кутовими точками визначає той самий напружений стан, що і гладкий штамп. Методика визначення граничного кута наведена в роботах [5-7].

2. Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (8), (9), (11) знайти не вдається. Для наближеного її розв'язку будемо використовувати числові методи. Оскільки характеристичні частини системи (8), (9) співпадають з відповідними характеристичними частинами систем, які визначають розв'язок контактної задачі без підсилення [5-7] і задачі про часткове підсилення контуру отвору [8], то наближений розв'язок задачі можна реалізувати модифікованим методом Мультиппа-Каландія [3-7].

Для прикладу досліджено вплив на напружений стан нескінченної ізотропної пластинки з частково підсиленням трикутним отвором ($N = 3, \varepsilon = \pm 0.2$) величини зони контакту при таких параметрах підсилення $\beta_0 = 45^\circ; \frac{E_0}{E} = 5; \frac{h_0}{h} = 1; \frac{b_0}{\rho_0} = 0.05; \nu = 0.3$.

На рис.2 зображено епюри розподілу нормальних T_ρ^0 (верхня частина) та кільцевих T_λ (нижня частина) зусиль при $\varepsilon = 0.2$. Аналогічні епюри $\varepsilon = -0.2$ зображено на рис.3.

В наведених прикладах при $\varepsilon > 0$ спостерігається зменшення нормальних зусиль T_ρ^0 в центрі зони контакту при збільшенні її величини. В той же час кільцеві зусилля T_λ в цій точці збільшуються.

При $\varepsilon < 0$ зусилля T_ρ^0 і T_λ зменшуються із збільшенням зони контакту.

Висновки

Якщо зона контакту менша від граничної, то нормальні T_ρ^0 і кільцеві T_λ зусилля на торцях цієї зони приймають необмежені значення.

Числовим експериментом встановлено відсутність впливу підсилення на напружений стан пластинки. При цьому контактні зусилля в зоні підсилення ($\tilde{T}_\rho, \tilde{S}_{\rho\lambda}$)

не перевищують 0.05% контактних зусиль під штампом (T_ρ^0), тому їх значення не наводяться. Всі розрахунки проводилися для різних значень N_0 до $N_0 = 33$. Слід відзначити, що значення компонент напруженого стану не змінюються, починаючи з $N_0 = 24$, що свідчить про задовільну збіжність методу колокації.

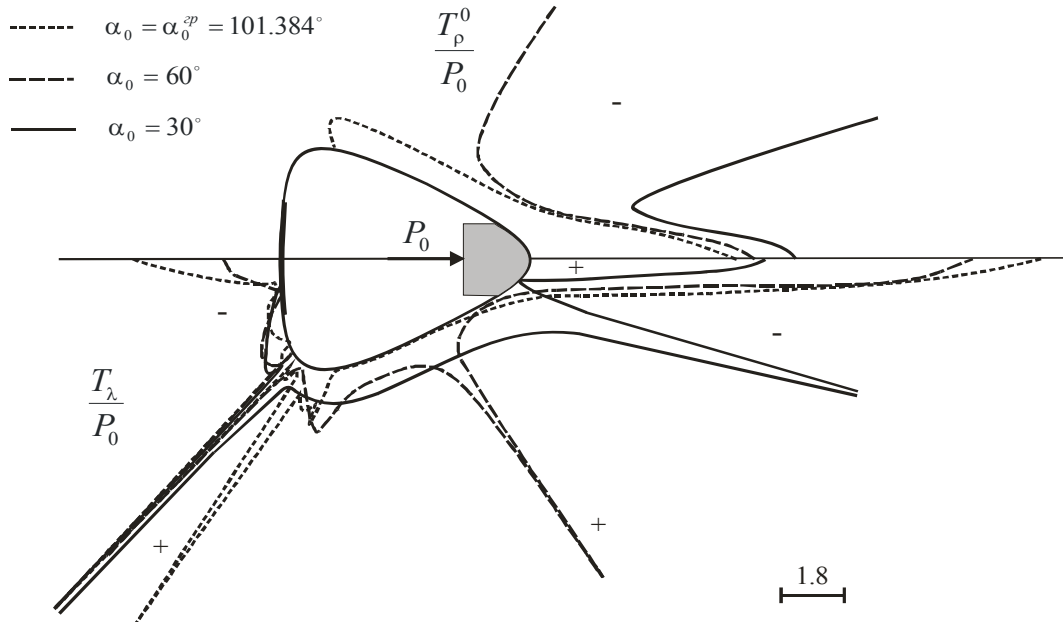


Рисунок 2 - Розподіл зусиль T_ρ^0 і T_λ на контурі отвору

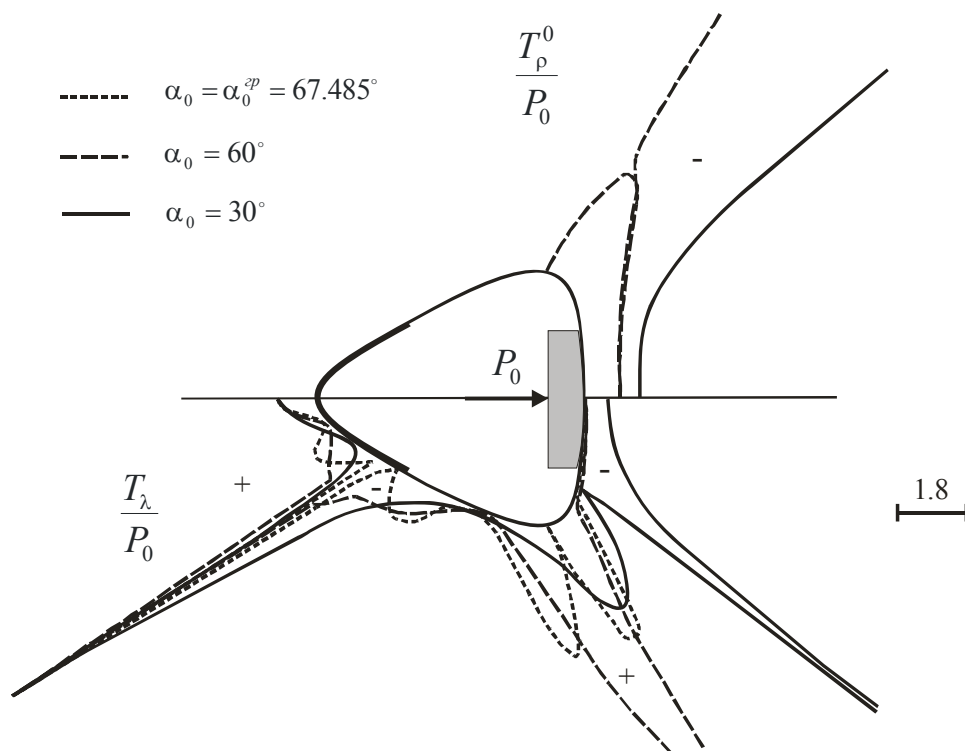


Рисунок 3 - Розподіл зусиль T_ρ^0 і T_λ на контурі отвору

Література

1. Панасюк В.В., Теплий М.Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – Київ: Наук. думка, 1975. - 195с.
2. Теплий М.И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. – Львов: Вища школа, Изд-во при Львов. ун-те, 1983. – 176 с.

3. Сяський А.А. Проблемы контакта жесткого диска с криволинейным вырезом в бесконечной пластинке. - Ровно, 1993. – 12 с.- Деп. в Укр ИНТЕІ 22.02.93, № 227 – Ук 93.
4. Сяський А.А. О контакте диска с криволинейным отверстием в бесконечной пластинке. - Ровно, 1988.- 10с. Деп. в УкрНИИИТИ 03.01.1989, №128-Ук 89.
5. Сяський А.О., Сяський В.А. Контактна взаємодія двозв'язного жорсткого штампа з кутовими точками і кругового отвору в ортоотропній пластинці // Фізика конденсованих високомолекулярних систем: Наукові записки Рівненського державного педагогічного інституту. - Рівне, 1998.- Вип. 4. - С. 99 - 101.
6. Сяський А.О., Сяський В.А. Двосторонній контакт двозв'язних симетричних гострокутних штампів з криволінійним отвором нескінченної пластини // Вісник Львівського університету. Серія фіз.-мат. – Львів, 2000. Вип. 57. – С. 166-169.
7. Сяський А.О., Сяський В.А. Контакт двозв'язного штампа з кутовими точками і криволінійного отвору нескінченної пластинки // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. - Львів, 2000. – Т. 2. - С. 122 - 125.
8. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці // Вісник ТДТУ. - Тернопіль, 2004. - Т. 9, № 2. - С. 5-12.

Одержано 28.04.2009 р.