

УДК 539.3

Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук; І. Габрусєва

*Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя*

СТИСНЕННЯ ДВОМА ЖОРСТКИМИ КІЛЬЦЕВИМИ ШТАМПАМИ ІЗОТРОПНОГО ШАРУ З НАЯВНИМИ ЗАЛИШКОВИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ

Резюме. Наведено розв'язання контактної задачі про стиснення попередньо напруженого ізотропного шару двома співвісними жорсткими кільцевими штампами. Розглянуто числовий приклад та побудовано функції розподілу контактних напружень для обох ділянок контакту. Проаналізовано вплив залишкових деформацій у шарі на розподіл контактних напружень.

Ключові слова: напруження, ізотропний шар, кільцевий штамп, залишкові деформації, попередні напруження.

B. Shelestovskiy, I. Gabruseva

PRESSING BY PRESSURE OF TWO HARD ANNULAR PUNCHES OF THE ISOTROPIC LAYER WITH THE RESIDUAL DEFORMATIONS

The summary. Increasing reliability and durability of structures and mechanisms is one of the most actual tasks of modern construction and engineering. As it is known [2], residual deformation is almost always available in the structural elements and machine parts. The nature of their appearance can be very different: irreversible deformation (plasticity, creep), structural changes in the material, changes of the aggregate state in some areas, mechanical, chemical and technological processes, etc. Resulted stress, can cause fracture and accelerate some phase transitions, corrosion.

Consideration of the residual strains under development of the important structural elements of machines and installations can estimate more accurately the material strength life and significantly reduce its costs, while maintaining the necessary functional characteristics of the elements in general. That is why the study of the contact interaction of the elastic bodies with residual deformations is up to date and will remain so in the future.

Research problems of the contact interaction of the preliminary stressed bodies in our country and abroad had appeared in the sufficient quantity only by the end of the last century. First of all it is due to the fact that the linear elasticity theory does not consider of residual stresses in bodies. In general, strict formulation of such problems requires the use of system of the nonlinear elasticity theory, however, for the sufficiently large values of the initial stresses its linearized version can be referred to.

Current level of linearized elasticity theory and mathematical techniques, combined with the rapid development of computer technology makes it possible to form effectively a variety of computational models in a wide range of tasks. Complete enough description and classification of works devoted to the theory of contact interaction of the preliminary stressed bodies with rigid punches can be found in [1]. But the interaction of the complex configuration circular punches with the residual deformation elastic half-space and layer stays not studied enough.

In the article the solution of the contact problem of compression of the preliminary stressed isotropic layer with two annular punches using the linearized theory of elasticity was built. All calculations are performed in the location of strain y_i , which are associated with the coordinates of the initial state relations $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2, 3$), where λ_i – coefficient of linear elongation element directed along the Cartesian axis x_i .

Using the basic relations of the linearized elasticity theory, the problem is treated as the construction of the solution of the triple integral equations with kernels involving the Bessel functions. The authors have developed a method of approximate solutions of this type. The main idea of this method is to represent the unknown distribution function of the contact stresses in the form of the Fourier series with unknown coefficients and to construct a system of the linear equations for finding them.

To demonstrate the proposed methods the numerical example of the construction of the contact stresses distribution function is presented in the paper.

Besides, the residual deformation field characteristics effect on the amount and nature of the contact stresses under punches has been analyzed.

Key words: *contact stresses, annular punch, isotropic layer, residual deformations.*

Постановка проблеми. Актуальним завданням сучасного машинобудування та будівництва є підвищення надійності та довговічності конструкцій і механізмів. Одним із вагомих факторів, який необхідно завжди враховувати в інженерних розрахунках, є залишкові деформації [1], що майже завжди наявні в елементах конструкцій та деталях машин. Нехтування залишковими деформаціями при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд, не дозволяє точно оцінювати реальний напружений стан, що може призвести до руйнування зразків або ж до невиправданого збільшення витрат матеріалу. Саме тому врахування залишкових деформацій при дослідженні контактної взаємодії пружних тіл є надзвичайно важливим завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Взаємодію жорстких штампів та пружних тіл із наявними залишковими деформаціями досліджували багато вітчизняних та закордонних вчених [2]. Контактні задачі для тіл із початковими напруженнями при конкретній формі пружного потенціалу розглядали Александров В.М., Філіпова Л.М., Арутюнян Н.Х., Сметаніна Б.І. та інші. Розв'язок задач кручення для пружних тіл із початковими напруженнями, а також плоских та просторових контактних задач для пружних тіл з початковими напруженнями наведено у працях Гузя О.М., Бабича С.Ю., Глухова Ю.П., Рудницького В.Б.

У загальному випадку строга постановка задач, що враховують наявність у тілах залишкових напружень, потребує застосування апарата нелінійної теорії пружності. Проте при достатньо великих значеннях початкових напружень можна обмежитись її лінеаризованим варіантом.

Сучасний рівень лінеаризованої теорії пружності та математичних методів, у сукупності з бурхливим розвитком комп'ютерної техніки, дають можливість ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі стосовно широкого кола задач. У працях [5, 6] апарат лінеаризованої теорії пружності успішно використовується для побудови тривимірної моделі скінченого елемента та вивчення з її допомогою ефектів взаємодії волокон під час мікродеформацій у з'єднаннях, підсилених ізотропними та анізотропними волокнами.

Проте все ще недостатньо вивченим залишається питання взаємодії жорстких кільцевих та параболоїдальних штампів складної конфігурації із пружним ізотропним шаром, у якому наявні залишкові деформації.

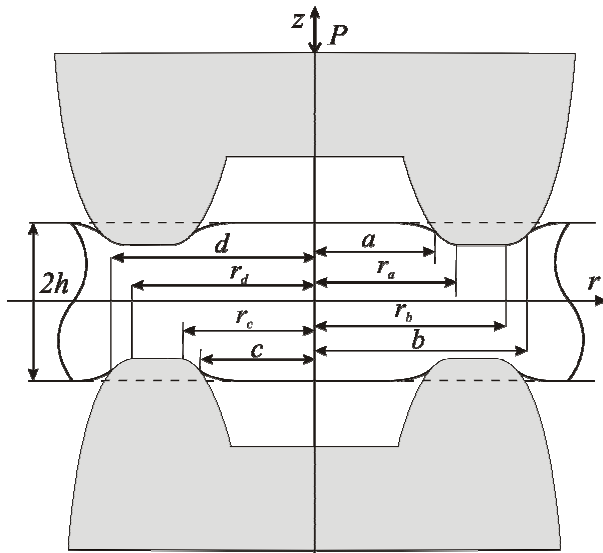


Рисунок 1. Схема контактної взаємодії

Figure 1. Scheme of contact interaction

Постановка задачі. Розглянемо осесиметричну задачу про стиснення попередньо напруженого ізотропного шару товщиною $2h$ двома співвісними жорсткими кільцевими штампами.

Для розв'язання задачі застосовано лінеаризовану теорію пружності. Вважається, що пружні потенціали є неперервними, двічі диференційовними функціями алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [3]. Всі розрахунки проведено у координатах деформованого стану y_i , які пов'язані з координатами початкового стану співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2, 3$), де λ_i – коефіцієнти видовження лінійного

елемента, направлено вздовж декартової осі x_i . Також вважається, що дія штампа викликає у шарі малі збурення основного однорідного напружено-деформованого стану, для якого виконуються умови $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$; $S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}$, де S_0^{ii} – складові тензора початкових напружень.

Розглядатимемо циліндричну систему координат (O, r, θ, z) . Координатну площину (O, r, θ) направимо по серединній площині шару, а координатну вісь Oz – по лінії дії сили P (рис. 1).

Отже, матимемо такі граничні умови:

$$\sigma_{zz}(r, h) = 0, 0 \leq r \leq a, b \leq r; \quad (1) \quad \sigma_{zz}(r, -h) = 0, 0 \leq r \leq c, d \leq r; \quad (4)$$

$$\sigma_{rz}(r, h) = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (2) \quad \sigma_{rz}(r, -h) = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (5)$$

$$u_z(r, h) = w_1(r), a \leq r \leq b; \quad (3) \quad u_z(r, -h) = w_2(r), c \leq r \leq d. \quad (6)$$

Функції $w_1(r)$ та $w_2(r)$ описують форму верхнього та нижнього штампів:

$$w_1(r) = \begin{cases} w_1(a) - \frac{1}{2R_1} \left[(r_a - a)^2 - (r_a - r)^2 \right], & a \leq r \leq r_a; \\ w_1(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2, & r_a < r \leq r_1; \\ w_1(b) - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2, & r_1 < r \leq r_b; \\ w_1(b) - \frac{1}{2R_2} \left[(r_b - b)^2 - (r_b - r)^2 \right], & r_b < r \leq b; \end{cases}$$

$$w_2(r) = \begin{cases} w_2(c) + \frac{1}{2R_3} [(r_c - c)^2 - (r_c - r)^2], & c \leq r \leq r_c; \\ w_2(c) + \frac{1}{2R_3} (r_c - c)^2, & r_c < r \leq r_2; \\ w_2(d) + \frac{1}{2R_4} (r_d - d)^2, & r_2 < r \leq r_d; \\ w_2(d) + \frac{1}{2R_4} [(r_d - d)^2 - (r_d - r)^2], & r_d < r \leq d; \end{cases}$$

де $r_1 = \frac{r_a + r_b}{2}$, $r_2 = \frac{r_c + r_d}{2}$; R_1 , R_2 , R_3 та R_4 – радіуси кривини парабол, якими обмежено штампи.

Результати дослідження. Згідно із [2] компоненти тензора контактних напружень та вектора переміщень точок шару в осесиметричному випадку можна записати у вигляді

$$\sigma_{zz}(r, z) = c_{33} n_1 \int_0^{\infty} \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha z) + A_2 [s \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] + B_1 sh(\alpha z) + B_2 [s \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (7)$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = -c_{31} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{ A_1 sh(\alpha z) + A_2 [s_0 \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] + B_1 ch(\alpha z) + B_2 [s_0 \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] \} J_1(\alpha r) d\alpha. \quad (8)$$

$$u_r(r, z) = -\int_0^{\infty} \alpha^2 \{ A_1 ch(\alpha z) + A_2 [ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] + B_1 sh(\alpha z) + B_2 [sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] \} J_1(\alpha r) d\alpha, \quad (9)$$

$$u_z(r, z) = m_1 \int_0^{\infty} \alpha^2 \{ A_1 sh(\alpha z) + A_2 [s_1 \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] + B_1 ch(\alpha z) + B_2 [s_1 \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (10)$$

Співвідношення (7)–(10) записано у загальному вигляді для випадку теорії великих (скінчених) деформацій, а також різних варіантів теорії малих початкових деформацій та враховують наявність пружного потенціалу довільної структури. Вони побудовані для стискуваних і нестискуваних тіл без будь-яких обмежень. Коефіцієнти c_{31} , c_{33} , m_1 , n_1 , s , s_0 , s_1 залежать від характеру пружного потенціалу і підбираються у кожному окремому випадку, відповідно до [3].

Застосувавши граничні умови (2) та (5), із співвідношення (8) отримуємо вирази для функцій A_1 та B_1 через A_2 та B_2 відповідно

$$A_1 = \frac{-A_2}{sh(\alpha h)} [s_0 \cdot sh(\alpha h) + \alpha h \cdot ch(\alpha h)], \quad B_1 = \frac{-B_2}{ch(\alpha h)} [s_0 \cdot ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)]. \quad (11)$$

Вимагаючи також виконання граничних умов (1) та (4) із рівностей (7) отримуємо:

$$c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha h) + A_2 [s \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)] + B_1 sh(\alpha h) + B_2 [s \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r \leq a, b \leq r; \quad (12)$$

$$c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha h) + A_2 [s \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)] - B_1 sh(\alpha h) - B_2 [s \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r \leq c, d \leq r. \quad (13)$$

Для продовження співвідношень (12) та (13) на всю додатну піввісь введемо на відрізках $[a, b]$ та $[c, d]$ невідомі функції $x(r)$ та $y(r)$ відповідно. Функція $x(r)$ визначатиме розподіл контактних напружень під верхнім, а $y(r)$ – під нижнім штампом. Врахувавши їх неперервність та рівність нулю на границі області контакту, представимо $x(r)$ та $y(r)$ у вигляді відрізків узагальненого ряду Фур'є за функціями

$$L_n^{(1)}(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) Y_0(\gamma_n) - Y_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) J_0(\gamma_n) \quad \text{та} \quad L_n^{(2)}(r) = J_0\left(\frac{\lambda_n}{c} r\right) Y_0(\lambda_n) - Y_0\left(\frac{\lambda_n}{c} r\right) J_0(\lambda_n),$$

де γ_n та λ_n – додатні корені рівнянь

$$J_0\left(\frac{b}{a} x\right) Y_0(x) - Y_0\left(\frac{b}{a} x\right) J_0(x) = 0 \quad \text{та} \quad J_0\left(\frac{d}{c} x\right) Y_0(x) - Y_0\left(\frac{d}{c} x\right) J_0(x) = 0$$

відповідно. Тобто у вигляді

$$x(r) = \sigma_{zz}(r, h) = \sum_{n=1}^N a_n L_n^{(1)}(r), \quad y(r) = \sigma_{zz}(r, -h) = \sum_{n=1}^N b_n L_n^{(2)}(r), \quad (14)$$

де a_n та b_n – невідомі коефіцієнти.

Із урахуванням представлення (14), застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношень (12), (13), разом із виразами (11) отримуємо систему відносно невідомих функцій A_1 , B_1 , A_2 та B_2 .

Вимагаючи виконання граничної умови (3) та врахувавши вирази для функцій A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , отримаємо

$$-\omega_1 \int_0^{\infty} \left(\varphi_1(\alpha) \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n^{(1)}(\alpha) + \varphi_2(\alpha) \sum_{n=1}^N b_n \Phi_n^{(2)}(\alpha) \right) \times J_0(\alpha r) d\alpha = w_1(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (15)$$

де $\varphi_1(\alpha) = \Delta_5(\alpha) + \Delta_6(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha) = \Delta_5(\alpha) - \Delta_6(\alpha)$, $\omega_1 = \frac{m_1(s_0 - s_1)}{2c_{33}n_1}$,

$$\Delta_5(\alpha) = \frac{(s_1 - s_0) sh^2(\alpha h)}{(s - s_0) ch(\alpha h) sh(\alpha h) - \alpha h}, \quad \Delta_6(\alpha) = \frac{(s_1 - s_0) ch^2(\alpha h)}{(s - s_0) ch(\alpha h) sh(\alpha h) + \alpha h},$$

$$\Phi_n^{(1)}(\alpha) = \int_a^b r \cdot L_n^{(1)}(r) J_0(\alpha r) dr, \quad \Phi_n^{(2)}(\alpha) = \int_c^d r \cdot L_n^{(2)}(r) J_0(\alpha r) dr.$$

Помноживши ліву та праву частини співвідношення (15) на $r \cdot L_q^{(1)}(r)$ та проінтегрувавши отримані вирази по r від a до b , отримаємо

$$\sum_{n=1}^N a_n K_{nq}^{(1)}(\alpha) + \sum_{n=1}^N b_n K_{nq}^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{2\omega_1 R_1} T_q^{(1)} + \frac{1}{2\omega_1 R_2} T_q^{(2)}, \quad (16)$$

$$\text{де } T_q^{(1)} = (r_a - a)^2 \int_a^{r_1} r L_q^{(1)}(r) dr - \int_a^{r_a} r (r_a - r)^2 L_q^{(1)}(r) dr,$$

$$T_q^{(2)} = (r_b - b)^2 \int_{r_1}^b r L_q^{(1)}(r) dr - \int_{r_b}^b r (r_b - r)^2 L_q^{(1)}(r) dr,$$

$$K_{nq}^{(i)} = \int_0^\infty \Phi_n^{(i)}(\alpha) \varphi_i(\alpha) [\Phi_q^{(i)}(\alpha) - J_0(\alpha a) \int_a^{r_1} r L_q^{(1)}(r) dr - J_0(\alpha b) \int_{r_1}^b r L_q^{(1)}(r) dr] d\alpha,$$

$$i = \overline{1, 2}, \quad q = \overline{1, N}.$$

Аналогічно до (16) із граничної умови (6) отримаємо

$$\sum_{n=1}^N a_n K_{nq}^{(3)}(\alpha) + \sum_{n=1}^N b_n K_{nq}^{(4)}(\alpha) = \frac{-1}{2\omega_1 R_3} T_q^{(3)} + \frac{-1}{2\omega_1 R_4} T_q^{(4)}, \quad (17)$$

$$\text{де } T_q^{(3)} = (r_c - c)^2 \int_c^{r_2} r L_q^{(2)}(r) dr - \int_c^{r_c} r (r_c - r)^2 L_q^{(2)}(r) dr,$$

$$T_q^{(4)} = (r_d - d)^2 \int_{r_2}^d r L_q^{(2)}(r) dr - \int_{r_d}^d r (r_d - r)^2 L_q^{(2)}(r) dr,$$

$$K_{nq}^{(i+2)} = \int_0^\infty \Phi_n^{(i)}(\alpha) \psi_i(\alpha) [\Phi_q^{(2)}(\alpha) - J_0(\alpha c) \int_c^{r_2} r L_q^{(2)}(r) dr - J_0(\alpha d) \int_{r_2}^d r L_q^{(2)}(r) dr] d\alpha,$$

$$\psi_1(\alpha) = -\varphi_2(\alpha), \quad \psi_2(\alpha) = -\varphi_1(\alpha).$$

Використавши метод суперпозиції та ввівши позначення

$$a_n = \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=1}^4 z_i a_n^{(i)}, \quad b_n = \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=1}^4 z_i b_n^{(i)} \quad z_i = \frac{1}{2R_i}, \quad (18)$$

із (16) та (17), отримуємо системи відносно невідомих $a_n^{(i)}$ та $b_n^{(i)}$, $i = \overline{1, 4}$.

Величини z_i у співвідношеннях (18) знаходимо з умов рівноваги штампів

$$2\pi \int_a^b r \sigma_{zz}(r, h) dr = -P, \quad 2\pi \int_c^d r \sigma_{zz}(r, -h) dr = -P$$

та рівності вертикальних переміщень граничних площин шару при $r = r_a$ та $r = r_b$, а також при $r = r_c$ та $r = r_d$

$$u_z(r_a, h) = u_z(r_b, h), \quad u_z(r_c, -h) = u_z(r_d, -h).$$

Отже, остаточно отримуємо формули для знаходження розподілу контактних напружень під штампамі

$$\sigma_{zz}(r, h) = \omega_1 \cdot \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=1}^4 (z_i a_n^{(i)}) \right] L_n^{(1)}(r), \quad \sigma_{zz}(r, -h) = \omega_1 \cdot \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=1}^4 (z_i b_n^{(i)}) \right] L_n^{(2)}(r).$$

За допомогою розв'язаної задачі досліджено вплив форми жорсткого штампа, а також наявності залишкових деформацій у шарі на характер розподілу контактних напружень. Числовий аналіз проведено для випадку, коли шар є стискуваним тілом із наявним пружним потенціалом гармонічного типу.

На рис. 2 зображено графіки безрозмірної функції $\sigma_{zz}^* = \frac{2\pi}{P} \sigma_{zz}(r, h)$ для випадку, коли прямолінійна ділянка в основі верхнього штампа відсутня. Пунктирна

крива відповідає відсутності у шарі залишкових деформацій ($\lambda_1 = 1$), крива 1 – наявності залишкових деформацій стиску ($\lambda_1 < 1$), а крива 2 – розтягу ($\lambda_1 > 1$).

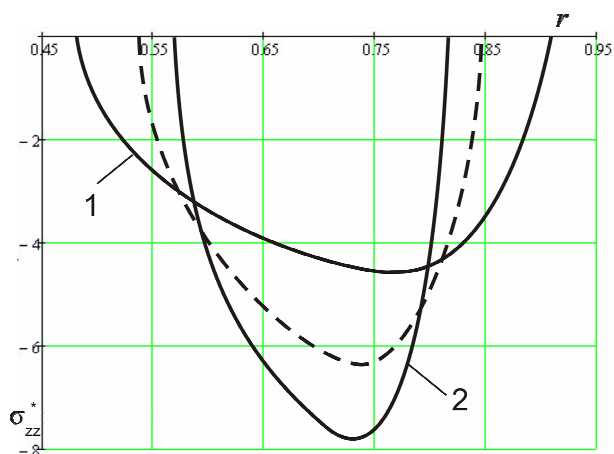


Рисунок 2. Розподіл контактних напружень під верхнім штампом

Figure 2. Distribution of contact stresses under the upper punch

$$r_a = r_b = 0.7, R_1 = \frac{\pi}{14} \frac{1}{\omega_1 P}, R_2 = \frac{\pi}{24} \frac{1}{\omega_1 P}.$$

analysis allows to state that the appearance of the residual tensile strain in the body causes a narrowing of the contact area and increasing of the absolute value of the contact stresses. Appearance of the compression strains causes the broadening of contact area and reduces the absolute value of the contact stresses. Reliability of conclusions confirms their agreement with the results obtained by other authors [4].

Список використаної літератури

1. Бабич, С.Ю. Контактные задачи для упругих тел. С начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам [Текст] / С.Ю. Бабич, А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41–69.
2. Гузь, А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницький, 2006. – 710 с.
3. Гузь, А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [Текст] / Александр Николаевич Гузь. – Киев: Наукова думка, 1983. – 296 с.
4. Гузь, О.М. Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями [Текст] / О.М. Гузь, В.Б. Рудницкий // Проблеми математичного моделювання сучасних технологій: зб. наук. пр. за матеріалами міжнар. наук.-техн. конф. – Хмельницький: ХДУ, 2004. – С. 5–35.
5. Lapusta, Y. Three-dimensional FE model for fiber interaction effects during microbuckling in composites with isotropic and anisotropic fibers / Lapusta Y., Harich J., Wagner W. // Communications in numerical methods in engineering – 2008 – Volume: 24 – Issue: 12. – P. 2206–2215.

Висновки. Проведений числовий аналіз дає можливість стверджувати, що наявність у тілі залишкових деформацій розтягу викликає звуження ділянки контакту та збільшення абсолютного значення контактних напружень. Існування деформацій стиску спричиняє розширення ділянки контакту та зменшення абсолютного значення контактних напружень. Достовірність зроблених висновків підтверджує їх узгодження із результатами отриманими іншими авторами [4].

Conclusions. Numerical example of searching components of contact stresses for both contact areas is considered. Numerical

6. Harich, J. 3D FE-modeling of surface and anisotropy effects during micro-buckling in fiber composites / Harich J., Lapusta Y., Wagner W. // Composite structures – 2009 – Volume: 89 – Issue: 4 – P. 551–555.

Отримано 01.06.2012