

УДК 539.3

**В. Максимович, докт. фіз.-мат. наук;  
Я. Пастернак, канд. фіз.-мат. наук;  
О. Приходько**

*Луцький національний технічний університет*  
**ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОБМЕЖЕНОЇ ПЛАСТИНКИ  
З М'ЯКИМ ЕЛІПТИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ**

**Резюме** Розглянуто пружно-пластичну задачу для обмеженої пластинки із м'яким еліптичним включенням. Визначення напруженого стану проведено за допомогою методів граничних елементів та змінних параметрів. Досліджено напружено-деформований стан пластинок залежно від розміщення включення та прикладеного навантаження з урахуванням зміцнення матеріалу.

**Ключові слова:** напруження, включення, пружно-пластичний стан, метод змінних параметрів.

**V. Maksymovych, Ia. Pasternak, O. Prykhod'ko**

**ELASTO-PLASTIC PROBLEM FOR A FINITE PLATE WITH SOFT  
ELLIPTIC INCLUSION**

**The summary.** Experimentally it is found that most of the materials are more or less macroscopically inhomogeneous. In particular, structural elements contain many inclusions, which can induce crack initiation. When the stress is sufficient to deform permanently the material of a solid or an inclusion, elasto-plastic deformations should be also accounted for, because plastic deformation involves the breaking of a limited number of atomic bonds by the movement of dislocations. Thus, determination of the elasto-plastic state in the vicinity of inclusion tips is essential in the study of the plate-like structural elements strength. Similar studies were provided mainly for the truly elastic case, or for the infinite plates. However, in practice the size of inclusions are often comparable with the size of the structural element. This significantly influences stress field and stress concentration inside the inclusion and near it. This type of problems can be solved numerically; however, for complex geometry it will require high computational performance and large amount of time. On the other hand, the solution of elasto-plastic problem for a soft inclusion in the infinite plate is quite simple and is easy-to-use in the engineering applications. Therefore, it is of considerable interest to test whether the latter can be applied to the calculation of finite plates with inclusions.

This paper provides the analysis of elasto-plastic state of a soft inclusion embed into a finite square plate and the stress/strain field of inclusion and a plate using the boundary element method combined with the method of variable elastic parameters. In this approach, the problem of elastic-plastic deformation of the inclusion is reduced to the solution of the sequence of linear algebraic equations for Mises stress inside the inclusion, which is obtained based on the boundary element method, in which the kernels are related to that Mises stress by constitutive relations of the method of variable elastic parameters. Based on the obtained numerical solution the elastic-plastic state of plates with inclusions of different size and placement is analyzed. Stress/strain state of the plate is studied depending on the position of inclusion and the applied load. Material hardening is accounted for. Obtained results are compared with the solutions for infinite plates under the same input data.

It is found that for the inclusion, which dimensions are two or more times smaller than that of a plate, the divergence of the numerical results and the closed-form solution for infinite plate does not exceed 1%, which is quite acceptable for engineering calculations. Critical load and orientation of the inclusion are studied as well. Thus, it is found that the calculation of Mises stress inside the inclusion under relatively low loads can be provided based on the solution for infinite plates. It is also found that the nature of the stress distribution in the inclusion and the plate is different. In particular, the maximal Mises stress inside the inclusion are the greatest for tension of the plate at an angle of  $\sim 55^\circ$  relatively to the bigger semi-axis of the inclusion, and in the matrix for the transverse tension.

*Key words: stress, inclusion, elasto-plastic state, variable parameter method.*

**Постановка проблеми.** Відомо, що в елементах конструкцій присутні включення, біля яких, як правило, зароджуються тріщини. Визначення пружно-пластичного стану в околі місць можливого зародження цих тріщин є необхідним при дослідженні міцності пластинчастих елементів конструкцій.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Дослідження напруженого стану пластинок із включеннями здійснені у роботі [1]. Зазначимо, що більшість виконаних у цьому напрямку досліджень проведені на основі пружного аналізу напружень. У праці [2] запропоновано аналітичний підхід до дослідження пружно-пластичного стану безмежних пластинок із м'якими еліптичними включеннями. На практиці часто виникають випадки, коли розміри включень співмірні з розмірами самої пластинки або включення розміщені біля межі тіла. У зв'язку з цим виникає необхідність дослідження впливу обмеженості розмірів пластинок на напруження біля м'якого пружно-пластичного включення. При цьому, з огляду на простоту розв'язку [2], значний інтерес становить з'ясувати можливість його застосування в інженерних розрахунках для обмежених пластинок.

**Мета роботи.** Дослідити пружно-пластичний стан включення у пластинках обмежених розмірів в околі пластичного еліптичного включення. Встановити можливість використання розв'язку, запропонованого у [2] в інженерних розрахунках для обмежених пластинок.

**Постановка задачі.** Розглянемо плоску задачу (плоский напружений стан) для скінченного тіла, що містить еліптичне включення. Виберемо систему координат  $Ox_1x_2$  так, щоб її центр і центр включення збігалися, більша піввісь була нахилена під кутом  $\alpha$  до осі  $Ox_2$ . Прийемо, що тіло навантажене одновісними розтягувальними зусиллями  $N$ , що діють у напрямі осі  $Ox_2$  (див. рис. 1). Позначимо коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву і модуль Юнга, включення та пластинки через  $\mu', \nu', E'$  і  $\mu'', \nu'', E''$  відповідно.

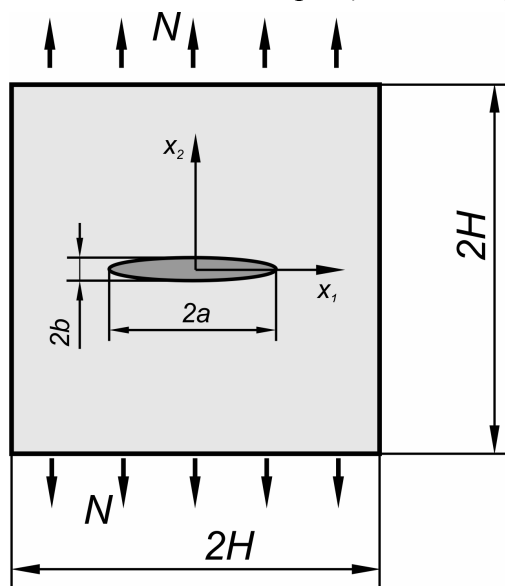


Рисунок 1

Figure 1

Вважатимемо, що границя текучості включення є меншою за границю текучості тіла, а тому приймемо, що у тілі виникатимуть лише пружні деформації, а у включенні може мати місце пружно-пластичне деформування. Задачу розв'язуватимемо за допомогою методу змінних параметрів Біргера. При цьому задача зводиться до знаходження пружних розв'язків, які базуються на врахуванні змінних механічних характеристик включення, що залежать від напружень.

Згідно з цим методом [7] включення можна розглядати пружним, в якому модуль зсуву  $\mu$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , модуль Юнга  $E$  визначатимемо за формулами

$$\mu = \mu' + \frac{1-2\mu'}{2}(1-\gamma), \quad \nu = \frac{E'\gamma}{3-(1-2\mu')\gamma} \quad \text{та} \quad E = E'\gamma, \quad (1)$$

де

$$\gamma = \gamma(\sigma_i) = \frac{\sigma_i}{E'g(\sigma_i)}, \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2};$$

$\sigma_i$  – інтенсивність напружень. Тут вважається, що діаграма деформування при розтягу стрижня описується залежністю  $\varepsilon = g(\sigma)$ , де  $\sigma$  і  $\varepsilon$  – напруження й відносна деформація в стрижні.

Для нескінченного тіла з еліптичним включенням при пружному деформуванні напруження у включенні є сталими. Тому на основі співвідношень (1) випливає, що і при пружно-пластичному деформуванні напруження у включенні будуть також сталими. У зв'язку з цим розв'язування задачі пластичності проводимо шляхом послідовного розв'язування задач теорії пружності зі сталими характеристиками для включення, які знаходимо методом послідовних наближень. Виконані розрахунки напружень у включенні показали, що пружні напруження в м'якому еліптичному включенні є практично сталими і у випадку обмежених пластинок. Таку особливість задачі враховано у побудованому нижче алгоритмі: приймається, що включення і в процесі пружно-пластичного деформування є пружним, в якого механічні характеристики є незалежними від координат, значення яких визначають далі на основі відомих ітераційних процедур.

Для визначення пружних напружень за умов ідеального механічного контакту включення і середовища (матриці) розв'язок поставленої задачі зводиться до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь (див., наприклад, [3])

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} [U_{ij}^m(\mathbf{x}, \xi) t_i(\mathbf{x}) - T_{ij}^m(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = c_{ij}(\xi) u_i(\xi), \\ \int_{\Gamma^i} [U_{ij}^i(\mathbf{x}, \xi) t_i(\mathbf{x}) + T_{ij}^i(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = c_{ij}(\xi) u_i(\xi) \end{cases} \quad \forall \mathbf{x}, \xi \in \Gamma \quad (2)$$

щодо визначення невідомих компонент векторів контактних напружень  $t_i$  та переміщень  $u_i$  на межі включення  $\Gamma^i$  та тіла  $\Gamma^h$  за заданих крайових умов (у формі Діріхле чи Неймана) на межі тіла. Тут  $\Gamma = \Gamma^i \cup \Gamma^h$ ;  $U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \sim O(\ln \|\mathbf{x} - \xi\|)$ ,  $T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \sim O(1/\|\mathbf{x} - \xi\|)$  – фундаментальні розв'язки для переміщень і напружень, інтеграли від яких обчислюють у сенсі головного значення;  $c_{ij}(\xi) = 0.5$  для гладкої межі. Індексом „m” позначено величини, що стосуються матриці, а „i” – включення.

Розв'язування інтегральних рівнянь для включень еліптичної форми проведено з використанням розроблених у [3] підходів. Для практики значний інтерес становить

також випадок тонких включень, коли відношення півосей включення є малим ( $\sim 1/100$ ). Для такого випадку за числового інтегрування (2) необхідно враховувати не тільки сингулярні, а й майже сингулярні інтеграли [4, 5]. Для усунення сингулярних і майже сингулярних інтегралів застосуємо до системи рівнянь (2) процедуру регуляризації, описану в [5]. Для цього окремо для матриці та включення підберемо такий простий напружений стан, за якого переміщення двох точок межі  $\xi$  та  $y$ , що лежать близько одна до одної, дорівнюють відповідним переміщенням  $u_i(\xi)$  та  $u_i(y)$  для задачі (2). Легко пересвідчитися, що поле переміщень

$$u_j^a(x) = u_j(\xi) + \Delta u_j \alpha_k r_k(x, \xi), \quad (3)$$

де  $\Delta u_j = u_j(\xi) - u_j(y)$ ;  $r_k(x, \xi) = x_k(x) - x_k(\xi)$ , а коефіцієнти  $\alpha_k$  означені

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0 & (r_1(y, \xi) = 0), \\ -1/[2r_1(y, \xi)] & (r_1(y, \xi) \neq 0), \\ -1/r_1(y, \xi) & (r_2(y, \xi) = 0); \end{cases} \quad \alpha_2 = \begin{cases} 0 & (r_2(y, \xi) = 0), \\ -1/[2r_2(y, \xi)] & (r_1(y, \xi) \neq 0), \\ -1/r_2(y, \xi) & (r_1(y, \xi) = 0). \end{cases}$$

задовольняє рівняння рівноваги та сумісності, а також поставлені умови. Накладемо інтегральне подання (3) окремо для включення та матриці на рівняння системи (2). В результаті, як і в роботі [3], отримаємо систему

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} [U_{ij}^m(x, \xi) t_i(x) - T_{ij}^m(x, \xi) [u_i(x) - u_i(\xi)]] d\Gamma(x) + \Delta u_i R_{ij}^m(\xi, y) = 0, \\ \int_{\Gamma^i} [U_{ij}^i(x, \xi) t_i(x) + T_{ij}^i(x, \xi) [u_i(x) - u_i(\xi)]] d\Gamma(x) - \Delta u_i R_{ij}^i(\xi, y) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Тут  $R_{ij}(\xi, y) = \int [T_{ij}(x, \xi) \alpha_k r_k(x, \xi) - U_{kj}(x, \xi) L_{ki}(x)] d\Gamma(x)$  – доданок, що є поправкою під час числового інтегрування майже сингулярних інтегралів за допомогою звичайних квадратурних формул;  $L_{ij}(x) = \mu \left[ \frac{2\nu}{1-2\nu} n_i(x) \alpha_j + \delta_{ij} \alpha_k n_k(x) + \alpha_i n_j(x) \right]$ ;  $\mu$ ,  $\nu$  – відповідно модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона;  $n_i(x)$  – компоненти вектора зовнішньої нормалі у точці  $x$ .

Для обчислення криволінійних інтегралів розіб'ємо лінію  $\Gamma$  на  $s$  дуг  $\Gamma_i$  (граничних елементів):  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^s \Gamma_i$ . На кожній з них виберемо  $n$  вузлових точок  $x^{i,p}$  ( $p = \overline{1, n}$ ), причому  $x^{i,n} = x^{i+1,1}$ . Криві  $\Gamma_i$  апроксимуємо за допомогою параметрично заданих дуг  $\tilde{\Gamma}_i$ :

$$\Gamma_i \sqsubset \tilde{\Gamma}_i = \left\{ \xi^i : \xi_j^i(t) = \sum_{p=1}^n x_j^{i,p} N^p(t), t \in [-1; 1] \right\}, \quad (5)$$

де  $N^p(t)$  – поліноми Лагранжа, означені на проміжку  $-1 \leq t \leq 1$ . Здійснивши також інтерполяцію шуканих і заданих на межі функцій

$$\tilde{t}_i(x^q) = \sum_{p=1}^n t_i^{q,p} N^p(t), \quad \tilde{u}_i(x^q) = \sum_{p=1}^n u_i^{q,p} N^p(t), \quad (6)$$

отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно вузлових значень шуканих величин

$$\begin{cases} \sum_{q,k,i} t_i^{q,k} U_{ij}^{m,qkpr} - \sum_{\substack{q,k,i \\ \mathbf{x}^{q,k} \neq \xi^{p,r}}} [u_i^{q,k} - u_i^{p,r}] T_{ij}^{m,qkpr} + \sum_i \Delta u_i R_{ij}^m = 0, \\ \sum_{q,k,i} t_i^{q,k} U_{ij}^{i,qkpr} + \sum_{\substack{q,k,i \\ \mathbf{x}^{q,k} \neq \xi^{p,r}}} [u_i^{q,k} - u_i^{p,r}] T_{ij}^{i,qkpr} - \sum_i \Delta u_i R_{ij}^i = 0 \quad \forall \mathbf{x}^{q,k}, \xi^{p,r} \in \Gamma^i. \end{cases} \quad (7)$$

для системи вузлів  $\xi^{p,r}$ . Тут  $\{U, T\}_{ij}^{qkpr} = \int_{-1}^1 \{U, T\}_{ij}(\mathbf{x}^q(t), \xi^{p,r}) N^k(t) J_q(t) dt$ ;  $J_q(t)$  – якобіан заміни змінних на елементі  $\Gamma_q$ . Поправкові величини  $R_{ij}$  можна визначати як за значеннями  $\{U, T\}_{ij}^{qkpr}$ , так і в окремій процедурі.

За розв'язком (7) переміщення та напруження в матриці визначаються за саморегуляризованими залежностями [6]

$$u_j(\xi) = u_j(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[ U_{ij}(\mathbf{x}, \xi) \tilde{t}_i(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) (\tilde{u}_i(\mathbf{x}) - \tilde{u}_i(\mathbf{y})) \right] d\Gamma(\mathbf{x}),$$

$$\sigma_{ij}(\xi) = \sigma_{ij}(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[ D_{kij}(\mathbf{x}, \xi) (\tilde{t}_k(\mathbf{x}) - t_k^L(\mathbf{x})) - S_{kij}(\mathbf{x}, \xi) (\tilde{u}_k(\mathbf{x}) - u_k^L(\mathbf{x})) \right] d\Gamma(\mathbf{x}),$$

де  $\xi$  – точка всередині матриці;  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$ ;  $\mathbf{y}$  – найближча до  $\xi$  точка межі  $\Gamma$ ;  $u_k^L(\mathbf{x}) = \tilde{u}_k(\mathbf{y}) + \tilde{u}_{k,m}(\mathbf{y}) [x_m(\mathbf{x}) - x_m(\mathbf{y})]$ ;  $t_k^L(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}(\mathbf{y}) n(\mathbf{x})$ .

**Розв'язування пружно-пластичної задачі.** З огляду на те, що напруження є практично сталими всередині еліптичного включення, то відповідно до (7) ядра  $U_{ij}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  та  $T_{ij}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  залежатимуть також від інтенсивності напружень  $\sigma_{ij}^i$  у включенні.

Отже, за пружно-пластичного деформування включення задача зводиться до розв'язування нелінійної системи рівнянь стосовно напружень у включенні. Для її розв'язування вибрано покроковий алгоритм розв'язування послідовності систем лінійних рівнянь з фіксованими параметрами жорсткості включення, який дає можливість прослідкувати процес деформування та отримувати розв'язок із контрольованою точністю. З цією метою покладали, що прикладене зусилля монотонно збільшується, набуваючи значення

$$(\lambda_1 N), (\lambda_2 N), \dots, (\lambda_n N),$$

де  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = 1$ .

Значення множника  $\lambda_1$  вибирали таким, щоб напруження у включенні були пружними, а величина  $\sigma_i$  досягала границі текучості  $\sigma_T$ . Для знаходження цього параметра використовували формулу (1), в якій покладали  $E = E'$ ,  $G = G'$ ,  $\nu = \nu'$ ,  $\sigma_i = \sigma_T$ . Позначимо знайдені у включенні напруження через  $\sigma_{ij}^{(1)}$ .

Далі напруження  $\sigma_{ij}^{(2)}$  у включенні, які відповідають множнику  $\lambda_2$ , знаходили із наведених вище співвідношень методом послідовних наближень [7], коли в якості початкового наближення для пружних сталей у формулах (7) покладали  $\sigma_{ij}^{(1)}$ . Аналогічно отримували напруження у включенні  $\sigma_{ij}^{(k)}$  ( $k = 3, 4 \dots n$ ) на наступних кроках.

**Результати досліджень.** Розрахунки виконані для випадку, коли пружні характеристики матриці та включення при пружному деформуванні однакові, а границя текучості включення значно менша за величиною, ніж у матриці.

У пружно-пластичній області функцію  $\gamma$  у формулі (1), що відповідає діаграмі деформування матеріалу з лінійним зміцненням, вибирали у вигляді

$$\gamma(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{при } \sigma < \sigma_T \\ \frac{\sigma}{k\sigma + (1-k)\sigma_T}, & \text{при } \sigma > \sigma_T \end{cases}, \quad (8)$$

де  $k$  – коефіцієнт, який характеризує зміцнення матеріалу. Цей коефіцієнт дорівнює 1 для пружного матеріалу та  $k = \infty$  – для ідеально пластичного.

Розрахунки виконано для квадратної пластинки із центральним нахиленим включенням. Навантаження на краях пластинки приймали рівним 220 МПа, при межі текучості для включення  $\sigma_T = 200$  МПа. Результати розрахунків інтенсивності напружень для тонкостінного включення з відношенням півосей  $b/a = 100$  залежно від кута нахилу включення  $\alpha$  наведені на рис. 2. Кривим 1, 2, 3 відповідають значення коефіцієнта зміцнення  $k = 2$ , відношення  $H/a$ , що дорівнює відповідно 5, 2, 1.1. Аналогічні результати розрахунків для коефіцієнта зміцнення матеріалу  $k = 5$  зображено кривими 5, 6, 7. Для порівняння на графіках наведено результати розрахунків для пластинки нескінченних розмірів: крива 4 – при  $k = 2$  та крива 8 – для  $k = 5$ .

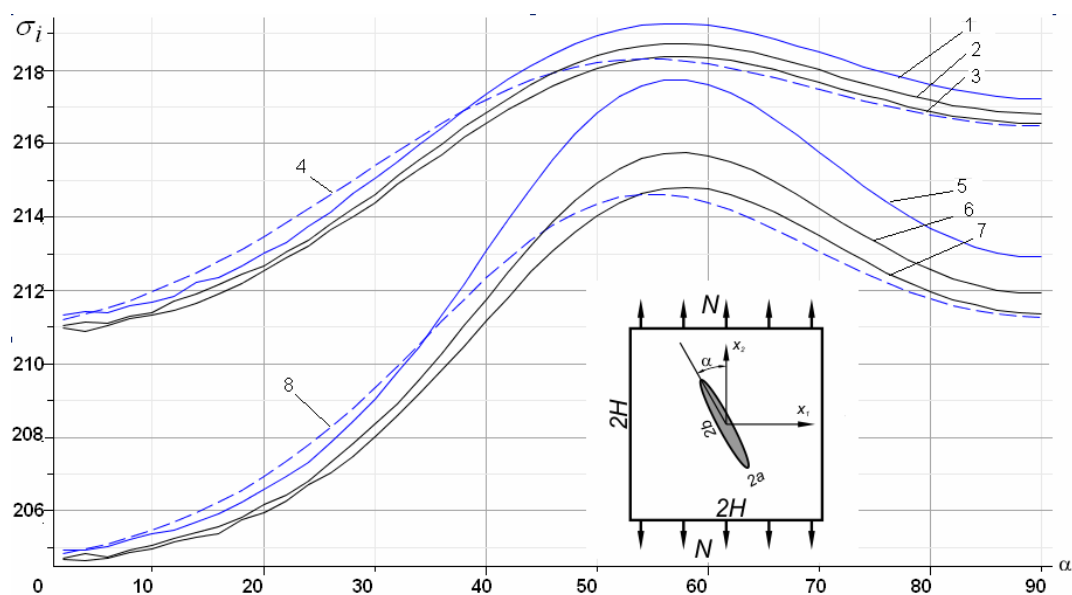


Рисунок 2. Залежність інтенсивності напружень у включенні від його нахилу  
Figure 2. Plots of Mises stress inside the inclusion versus its inclination

Із рис. 2 випливає, що максимальна інтенсивність напружень у включенні досягається при його нахилі під кутом  $\approx 55^\circ$  до осі  $Ox_2$ . При зменшенні розмірів пластинки інтенсивність напружень у включенні також зменшується. При збільшенні коефіцієнта зміцнення вплив розмірів пластинки на напруження у включенні зростає.

Із наведених графіків бачимо, що при  $H/a > 2$  напруження в обмеженій пластинці близькі до напружень у пластинці нескінченних розмірів. При малих розмірах пластинки (при  $H/a < 2$ ) розбіжність результатів є також незначною (не перевищує 1%). Таким чином з'ясовано, що розрахунок інтенсивності напружень у включенні при відносно невисоких навантаженнях може проводитися на основі розгляду пластинками нескінченних розмірів.

Виконано розрахунки інтенсивності напружень  $\sigma_i$  у матриці біля кінця гострого краю тонкостінного включення при  $k=5$ . Розраховані значення залежно від кута нахилу  $\beta$  включення до осі  $Ox_1$  для відношень  $H/a=1.5$  та  $H/a=5$  зображено на рис. 3 кривими 1 і 2. На цьому ж рисунку кривими 3 і 4 зображено значення інтенсивності напружень у включенні.

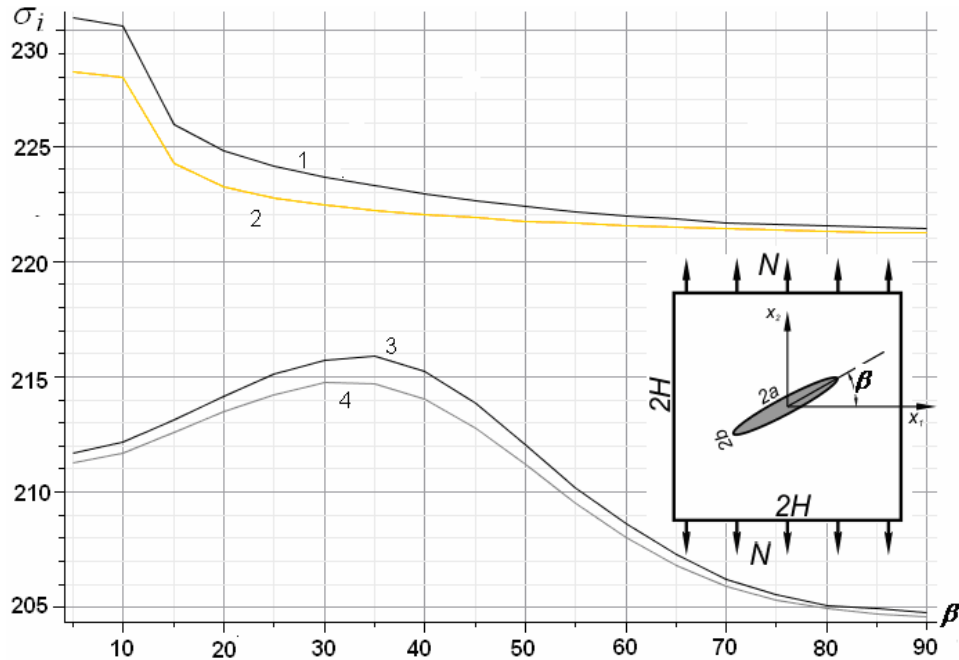


Рисунок 3. Інтенсивність напружень у матриці біля кінця включення

Figure 3. Mises stress in matrix near the tips of the inclusion

На основі наведених на рис. 3 даних можна зробити висновок про те, що характер розподілу напружень у включенні й матриці є різним. Зокрема, максимальна інтенсивність напружень у включенні найбільша за розтягу пластинки під кутом  $\sim 55^\circ$  відносно більшої півосі включення, а в матриці – за поперечного розтягу (при  $90^\circ$ ).

**Висновки.** Розроблено алгоритм визначення напружень у обмежених пластинках із м'яким пружно-пластичним включенням за допомогою методу граничних елементів та методу змінних параметрів Біргера. Напруження біля включення для широкого діапазону розмірів пластинки із прийнятною для інженерних розрахунків точністю можуть бути знайдені на основі розгляду матриці нескінченних розмірів. При збільшенні зміцнення матеріалу вплив розмірів пластинки на напруження у включенні зростає. Максимальна інтенсивність напружень у включенні найбільша за розтягу пластинки під кутом  $\sim 55^\circ$  відносно більшої півосі включення, а в матриці – за поперечного розтягу.

**Conclusion.** This paper presents the approach for determination of stresses in finite plates with soft elasto-plastic inclusions using the boundary element method and the Birger's variable parameters method. It is proved that stress near the inclusion can be evaluated with acceptable engineering accuracy using the analytical formulae derived from the solution for infinite plate. With increase of inclusion's material hardening the influence of the size of the plate on stress inside the inclusion also increases. Maximal Mises stresses inside the inclusion are obtained when the plate is stretched at an angle of  $\sim 55^\circ$  to the bigger semi-axis of the inclusion. Maximal stresses in the plate are observed for the transverse stretching.

**Список використаної літератури**

1. Юхим, Р. Міцність пружно-пластичних тіл із періодичними системами паралельних та колінеарних включень [Текст] / Р. Юхим, П. Горбач // Вісник ТДТУ. – 2010. – Том 15. – № 2. – С. 67–72.
2. Божидарнік, В.В. Напружений стан біля м'якого пружно-пластичного включення в пластинці [Текст] / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович, О.С. Приходько // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб.наукових праць. Вип. 10. – Д.: Наука і освіта, 2008. – С. 61–71.
3. Бреббия, К. Методы граничных элементов [Текст] / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
4. Mukherjee, S., Mukherjee Y. Boundary methods: elements, contours, and nodes. – New York: Taylor&Francis, 2005. – 217 p.
5. Сулим, Г. Регуляризована тотожність Сомільяни для задач теорії пружності з тонкостінними структурами [Текст] / Г. Сулим, Я. Пастернак // Вісник Львівського університету. – 2007. – Вип. 13. – С. 142–150.
6. Cruse, T.A., Richardson J.D. Non-singular Somigliana stress identities in elasticity // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996. – 39. – P. 3273–3304.
7. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение. – 1968. – 400с.

*Отримано 27.03.2012*