

УДК 539.3

А. Сяський, докт. техн. наук; К. Музичук

Рівненський державний гуманітарний університет

ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ РОЗРІЗОМ ЗА УМОВИ КОНТАКТУВАННЯ ЙОГО БЕРЕГІВ

Резюме. Побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь для задачі про згин нескінченної кусково-однорідної пластинки з криволінійним розрізом за умови контактування його берегів. Розрахунок напруженого стану здійснено числовими методами механічних квадратур і колокації.

Ключові слова: нескінченна пластинка, інтегрально-диференціальні рівняння, зона спаю, напружений стан, циліндричний згин.

A. Syasky, K. Muzychuk

BENDING OF PIECEWISE HOMOGENEOUS PLATE WITH ONE CURVILINEAR CUT UNDER CONTACTING OF ITS EDGES

The summary. Mixed contact problem for the piecewise homogeneous lamellar construction which contains the infinite isotropic plate with the curvilinear hole and the complete hard disk, which are partly soldered between each other on the line of delimiting, is considered. The edges of the cut between the plate and the disk are contacting along the line providing bending load in the plate which is acting on the infinity in the direction of the coordinates. As a result of it the plate is in the conditions of the generalized two-dimensional stress state and the cylindrical bending. The solving of the problem includes the determination of the components of stress state on the contour of the hole of the plate, the size and the position of the contact zone.

The boundary conditions of the problem on the smooth contact zone of the plate and the disk are formulated as the equality of the normal displacements of contour points on one of the faces. Thus, it was considered that the contact stress is brought in the mean plane of the plate with the addition of the corresponding bending moment. In the zone of the soldered joint the boundary conditions of the problem are formulated as the equality of contact stresses and moments and also as the equality of the displacement vector components and the rotation angle of normal line up to the mean plane of the plate and the disk.

The dependencies between the displacement vector components and the rotation angle of normal line in the plate contour points and the stresses contact are presented in the form of the integral relations with the logarithmic kernels. Their substitution in the boundary conditions leads to the system of singular integral-differential equations for the determination of the functions through which the contact stresses and the moments are determined. Finding an exact solution for this system makes great mathematical problems, so the solution is found approximately. The decision structure for this system at the contact zones and soldered joint was determined for the case of the non-full contact of cut banks. As the contact between the plate and the disk is smooth the normal stresses and the moments are limited in the contact zone and are equal to zero. At the ends of the zone of the soldered joint the contact stresses and the moments have the root feature on which the local oscillation is superposed.

The numerical realization of this problem has been conducted by the methods of mechanical quadratures and the collocation by which the influence upon the size of contact zone and the shape of the hole on the stress state components allocation at the triangular contour hole of plate have been analyzed. The size and the position of the contact zone are determined by the method of dichotomy. The results of the numerical calculation of stress state components are illustrated on the graphs. At the top of the graphs was built distributions of the contact stresses and the hoop stresses and at the bottom of graphs – distributions of the contact moments, the hoop and the rotational moments were built. According to the results the size of the contact

zone considerably depends on its curvature. The values of the contact zone for these examples are presented in the article.

This problem is new for the formulation and the solution method. In scientific literatures there are only some published works in which by the reduction to the problem of the linear conjugation the stress state of the complete infinite isotropic plate with one or two cuts on the arc of the circle, the edges of which are contacting in the process of the flexible deformation, is researched.

Key words: infinite isotropic plate, integral-differential equations, zone of the soldered joint, the stress state, cylindrical bending, generalized two-dimensional stress state, displacement vector, rotation angle of normal line, smooth contact zone.

Вступ. Кусково-однорідні пластинки, як тонкостінні елементи конструкцій, широко використовуються в інженерній практиці. Під час експлуатації у них на поверхні розмежування матеріалів можуть виникнути дефекти у вигляді розрізів або тріщин. Вони є потужними концентраторами напружень і саме біля них зароджуються та розвиваються осередки пластичної деформації та руйнування. За дії згинального навантаження береги тріщин, які перебувають у зоні стиснених волокон, будуть контактувати. Огляд публікацій та аналіз стану досліджень засвідчує, що практично всі наукові праці, де враховано контакт берегів, стосуються прямолінійних тріщин.

Дослідження напружено-деформованого стану у пластинчастих елементах конструкцій за наявності в них наскрізних криволінійних (по дузі кола) тріщин, береги яких контактують по всій довжині під дією рівномірно розподілених чи зосереджених згинальних моментів, наведено в [1, 2].

Метою роботи є розв'язання мішаної задачі про циліндричний згин кусково-однорідної пластинки з криволінійним розрізом на поверхні розділу матеріалів за умови контактування його берегів.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого Γ має форму правильного N -кутника із заокругленими кутами. В середній площині пластинки декартову систему координат $Oxuz$ виберемо так, щоб початок її відліку співпадав з центром отвору пластинки, а вісь Oz була напрямлена вниз перпендикулярно до середньої площини пластинки. Введемо комплексну змінну $z = x + iy = re^{i\delta}$, де (x, y) – декартові координати точки середньої площини пластинки, (r, δ) – її полярні координати (рис. 1). В отвір пластинки вставлено абсолютно жорсткий диск такої ж форми і розмірів, який на ділянці $[\pi + \alpha_1^*; \pi + \beta_1^*]$ контуру Γ спаяно з пластинкою. На решті контуру між пластинкою і диском наявний розріз. Під дією рівномірно розподілених моментів M_1, M_2 , що діють на нескінченності в напрямках координатних осей, на верхній лицьовій поверхні конструкції береги розрізу на ділянці $[\alpha_0^*; \beta_0^*]$ приходять у гладкий контакт. Тут $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*$ – полярні кути межових точок зон контакту і спаю.

Розв'язок задачі полягає у визначенні компонентів напруженого стану на контурі отвору пластинки, величини і положення зони контакту.

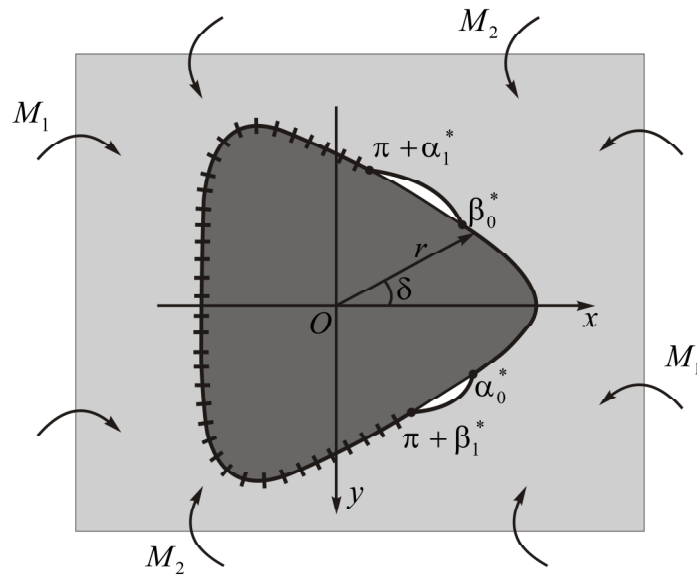


Рисунок 1. Розрахункова схема задачі

Figure 1. Analytical model of the problem

Математична модель задачі. Нехай раціональна функція [3]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає середня площина пластинки у площині z . Тут R_0 – характерний розмір отвору (вважаємо, що $R_0 = 1$); ε – параметр, який характеризує відхилення контуру заданого отвору від кола; (ρ, λ) – полярна система координат в площині ξ ; $i = \sqrt{-1}$. При $N = 2$, $|\varepsilon| < 1$ функція (1) здійснює конформне відображення на зовнішність γ зовнішності еліпса; при $N = 3$, $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$ – зовнішності трикутника із заокругленими кутами.

Умову контактування берегів розрізу при $\tilde{z} = -h$ оберемо у вигляді рівності нормальних зміщень контурних точок пластинки і диска. При цьому будемо вважати, що контактне зусилля N знесене в середню площину пластинки з додаванням відповідного згинального моменту величиною Nh .

Якщо допустити, що в зоні спаю має місце ідеальний механічний контакт, а в зоні контакту відсутні сили тертя, то граничні умови поставленої задачі на підставі [1, 4] можна записати у вигляді

$$a(\lambda) \left(U + h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + b(\lambda) \left(V + h \frac{\partial w}{\partial y} \right) = a(\lambda) \left(U_0 + h \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + b(\lambda) \left(V_0 + h \frac{\partial w_0}{\partial y} \right);$$

$$S_{\rho\lambda} = P = 0; M_\rho = -hT_\rho; T_\rho = -N, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \quad (2)$$

$$U = U_0; V = V_0; \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}, \lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]. \quad (3)$$

Тут $a(\lambda) = \cos \lambda - \varepsilon(N-1) \cos[(N-1)\lambda]$; $b(\lambda) = \sin \lambda + \varepsilon(N-1) \sin[(N-1)\lambda]$; U, V – компоненти вектора зміщення точок контуру Γ , які належать середній площині пластинки; $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ – кути повороту нормалі до середньої площини пластинки в цих точках; $U_0, V_0, \frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}$ – компоненти лінійного зміщення і повороту диска як жорсткого цілого; $T_\rho, S_{\rho\lambda}, M_\rho, P$ – силові й моментні контактні напруження на контурі отвору в пластинці; w – прогин пластинки; $[\alpha_0; \beta_0], [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]$ – образи проміжків $[\alpha_0^*; \beta_0^*], [\pi + \alpha_1^*; \pi + \beta_1^*]$ при відображенні (1).

Величини $U, V, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ на контурі Γ згідно з [4, 5] визначаються за формулами

$$U = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_4'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + C_1;$$

$$V = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_3'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + C_2;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{k}{3+\nu} \left[(1+\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_5'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_6'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_8'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + R_0(\lambda) \right] + C_3;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{k}{3+\nu} \left[(1+\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_6'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_5'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_7'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + Q_0(\lambda) \right] + C_4;$$

$$\lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \quad (4)$$

$$U = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + (1-\nu) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_3'(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} \right| dt + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_4'(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + C_1;$$

$$V = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + (1-\nu) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_4'(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} \right| dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_3'(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \Big] + C_2; \\
 \frac{\partial w}{\partial x} = & \frac{k}{3+\nu} \left[(1+\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_5'(t) dt + (1+\nu) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_7'(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_6'(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} \right| dt - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_8'(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + R_0(\lambda) \right] + C_3; \\
 \frac{\partial w}{\partial y} = & \frac{k}{3+\nu} \left[(1+\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_6'(t) dt + (1+\nu) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_8'(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_5'(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda} - t}{2} \right| dt + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_7'(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + Q_0(\lambda) \right] + C_4, \quad (5) \\
 & \lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]; \quad \tilde{\lambda}, \tilde{t} \in [\alpha_1; \beta_1],
 \end{aligned}$$

де введено позначення

$$\begin{aligned}
 R_0(\lambda) = & -\frac{5+3\nu}{1+\nu} M_1 \cos \lambda - \frac{1-\nu}{1+\nu} M_2 \cos \lambda - \frac{1-\nu}{1+\nu} \varepsilon (M_1 + M_2) \cos[(N-1)\lambda] - \\
 & - (1-\nu) \varepsilon \tilde{C}_1 \sin[(N-1)\lambda] - (3+\nu) \tilde{C}_1 \sin \lambda; \\
 Q_0(\lambda) = & -\frac{1-\nu}{1+\nu} M_1 \sin \lambda - \frac{5+3\nu}{1+\nu} M_2 \sin \lambda + \frac{1-\nu}{1+\nu} \varepsilon (M_1 + M_2) \sin[(N-1)\lambda] - \\
 & - (1-\nu) \varepsilon \tilde{C}_1 \cos[(N-1)\lambda] + (3+\nu) \tilde{C}_1 \cos \lambda; \\
 f_1' + if_2' = & ih(T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{i\lambda}; \quad f_5' + if_6' = i(M_\rho^* + iP^*) e^{i\lambda}, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \\
 f_3' + if_4' = & ih(T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{i\lambda}; \quad f_7' + if_8' = i(M_\rho^* + iP^*) e^{i\lambda}, \quad \lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]; \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad M_\rho^* + iP^* = (M_\rho + iP) \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda}; \quad k = \frac{1}{D(1-\nu)};$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}; \quad E, \nu - \text{модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки}; \quad C_1, C_2,$$

C_3, C_4, \tilde{C}_1 – довільні сталі.

Підставляючи (4), (5) у граничні умови (2), (3), отримаємо систему восьми сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій f_j' , ($j = \overline{1,8}$)

$$a(\lambda) \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_4'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_1^0 \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + b(\lambda) \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_3'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_2^0 \right] + \\
 & + q \left(a(\lambda) \left[(1+\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_5'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_6'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_8'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_3^0 \right] + \right. \\
 & \left. + b(\lambda) \left[(1+\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_6'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_5'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_7'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_4^0 \right] \right) = \\
 & = -q(a(\lambda)R_0(\lambda) + b(\lambda)Q_0(\lambda)); \quad a(\lambda)f_1'(\lambda) + b(\lambda)f_2'(\lambda) = 0; \\
 & a(\lambda)f_5'(\lambda) + b(\lambda)f_6'(\lambda) = 0; \quad a(\lambda)(hf_2'(\lambda) + f_6'(\lambda)) - b(\lambda)(hf_1'(\lambda) + f_5'(\lambda)) = 0, \\
 & \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]; \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + (1-\nu) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_3'(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_4'(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_1^0 &= 0; \\
 (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + (1-\nu) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_4'(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_3'(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_2^0 &= 0; \\
 (1+\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_5'(t) dt + (1+\nu) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_7'(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_6'(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} \right| dt - \\
 - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_8'(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_3^0 &= -R_0(\lambda); \\
 (1+\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_6'(t) dt + (1+\nu) \int_{\alpha_1}^{\tilde{\lambda}} f_8'(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_5'(t) \ln \left| \cos \frac{\tilde{\lambda}-t}{2} \right| dt + \\
 + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_7'(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + C_4^0 &= -Q_0(\lambda), \quad \lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1]; \quad \tilde{\lambda}, \tilde{t} \in [\alpha_1; \beta_1]. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Тут $q = \frac{3(1+\nu)}{(3+\nu)}$; $C_1^0 = 2EhU_0 - C_1$; $C_2^0 = 2EhV_0 - C_2$; $C_3^0 = \frac{3+\nu}{k} \frac{\partial w_0}{\partial x} - C_3$;
 $C_4^0 = \frac{3+\nu}{k} \frac{\partial w_0}{\partial y} - C_4$.

Крім системи (7), (8) повинні виконуватися силові та моментні умови рівноваги [4, 6]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_3'(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_4'(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0;$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_5(t)dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f'_7(\tilde{t})d\tilde{t} = 0; \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_6(t)dt + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f'_8(\tilde{t})d\tilde{t} = 0. \quad (9)$$

Сталу \tilde{C}_1 визначаємо з умови однозначності прогину пластинки [7], яку для даної задачі можна записати так:

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_1(\varepsilon^2(N-1) + \chi) - \frac{\chi}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (f'_5(t)\cos t + f'_6(t)\sin t)dt + \\ & + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} (f'_5(t)\cos(N-1)t - f'_6(t)\sin(N-1)t)dt + \frac{\chi}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (f'_7(\tilde{t})\cos \tilde{t} + f'_8(\tilde{t})\sin \tilde{t})d\tilde{t} + \\ & + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (-1)^{N-1} (f'_7(\tilde{t})\cos(N-1)\tilde{t} - f'_8(\tilde{t})\sin(N-1)\tilde{t})d\tilde{t} = 0, \quad \chi = \frac{3+\nu}{1-\nu}. \end{aligned} \quad (10)$$

Якщо функції f'_j , ($j = \overline{1,8}$) стануть відомі, то контактні зусилля і моменти на контурі Γ визначаються за формулами (6), які можна перетворити до вигляду

$$hT_\rho + ihS_{\rho\lambda} = \frac{(f'_2(\lambda) + if'_1(\lambda))(a(\lambda) - ib(\lambda))}{|\omega'(\sigma)|^2}; \quad M_\rho + iP = \frac{(f'_6(\lambda) + if'_5(\lambda))(a(\lambda) - ib(\lambda))}{|\omega'(\sigma)|^2},$$

$$\lambda \in [\alpha_0; \beta_0];$$

$$hT_\rho + ihS_{\rho\lambda} = \frac{(f'_4(\lambda) + if'_3(\lambda))(a(\lambda) - ib(\lambda))}{|\omega'(\sigma)|^2}; \quad M_\rho + iP = \frac{(f'_8(\lambda) + if'_7(\lambda))(a(\lambda) - ib(\lambda))}{|\omega'(\sigma)|^2},$$

$$\lambda \in [\pi + \alpha_1; \pi + \beta_1], \quad (11)$$

де $|\omega'(\sigma)| = \alpha + i\beta$; $\alpha(\lambda) = 1 - \varepsilon(N-1)\cos(N\lambda)$; $\beta(\lambda) = \varepsilon(N-1)\sin(N\lambda)$.

Кільцеві зусилля T_λ і моменти M_λ та крутні моменти $H_{\rho\lambda}$ на контурі Γ визначаються за формулами, наведеними в [4, 6].

Залежності (7)–(10) визначають математичну модель поставленої задачі. При $\varepsilon = 0$ вони визначають розв'язок задачі для пластинки з круговим отвором.

Наближений розв'язок задачі. Знайти точний розв'язок системи (7)–(10) неможливо. Для побудови її наближеного розв'язку необхідно встановити структуру функцій f'_j , ($j = \overline{1,8}$) на кінцях зон контакту і спаю. Оскільки контакт між пластинкою і диском гладкий, тому величини T_ρ і M_ρ , а отже і функції f'_1 , f'_2 , f'_5 , f'_6 обмежені в зоні контакту і на кінцях цієї зони дорівнюють нулю. На кінцях зони спаю контактні зусилля T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ і моменти M_ρ , P , а також функції f'_3 , f'_4 , f'_7 , f'_8 мають кореневу особливість, на яку накладається локальна осциляція.

На підставі [3] наближений розв'язок задачі можна визначити методом механічних квадратур і колокації. При цьому величина зони контакту і її положення встановлюється методом дихотомії.

Для нескінченної ізотропної пластинки з трикутним ($N = 3$; $\varepsilon = \pm 0.2$) отвором досліджено вплив на її напружений стан величини і положення зони спаю. Результати числового розрахунку при $M_1 = M_1$; $M_2 = 0$, $\alpha_1 = -\pi/6$, $\beta_1 = \pi/6$ наведено на рис. 2, 3. У верхній частині рисунків побудовано епюри розподілу зусиль, а в нижній частині –

моментів. Розміри зони контакту для розглянутого випадку такі: $-\alpha_0 = \beta_0 = 74.9817$ (град.) при $\varepsilon = 0.2$; $-\alpha_0 = \beta_0 = 57.4928$ (град.) при $\varepsilon = -0.2$.

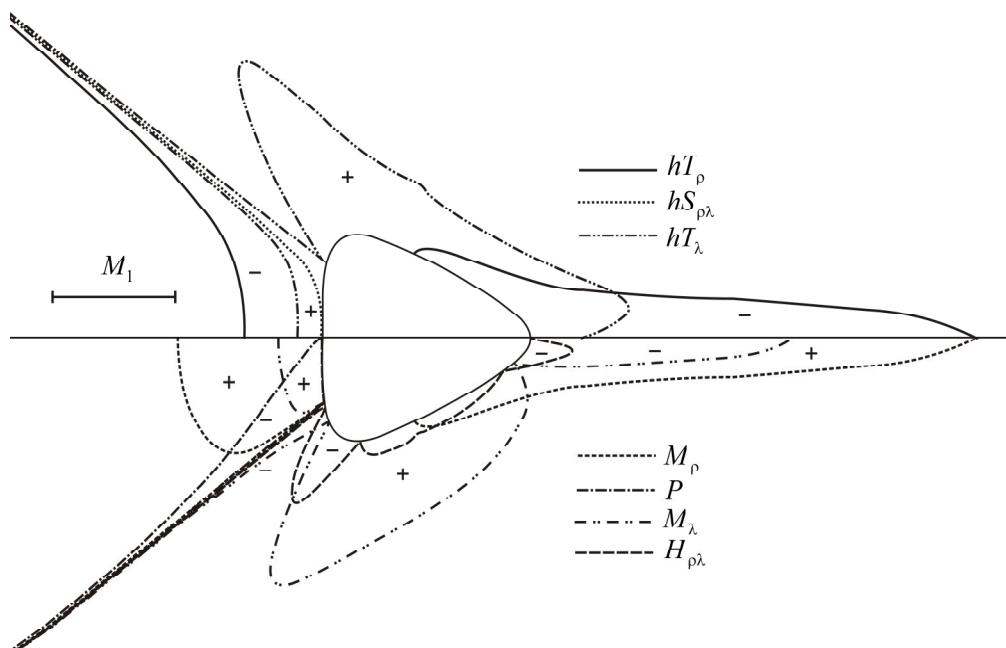


Рисунок 2. Розподіл компонентів напруженого стану на контурі отвору ($\varepsilon = 0.2$)

Figure 2. Components distribution of the stress state on the contour of the hole ($\varepsilon = 0.2$)

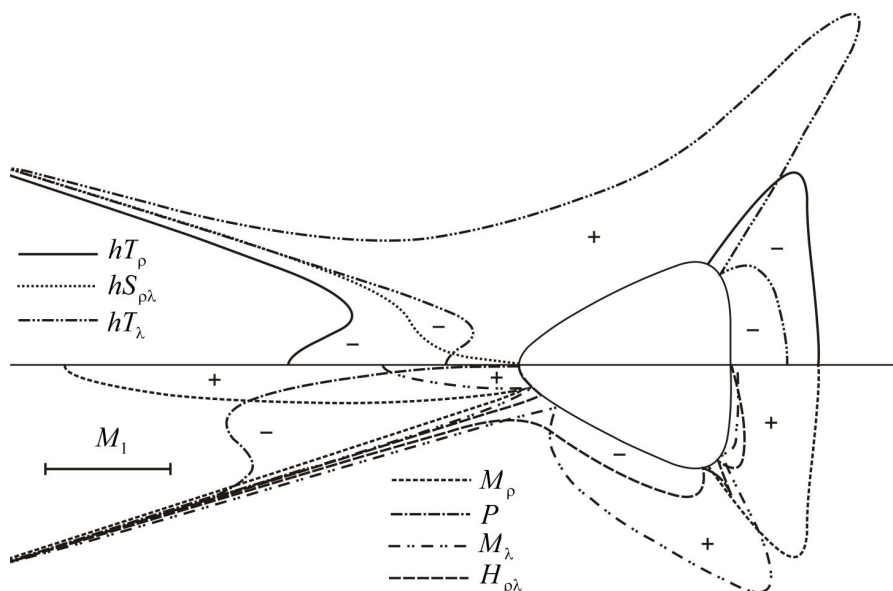


Рисунок 3. Розподіл компонентів напруженого стану на контурі отвору ($\varepsilon = -0.2$)

Figure 3. Components distribution of the stress state on the contour of the hole ($\varepsilon = -0.2$)

Висновки. Величина зони контакту суттєво залежить від її кривини. Зі збільшенням кривини в центрі зони контакту її величина і відповідно контактні зусилля та моменти зростають. При віддаленні від кінців зони спаю вплив зони контакту на

величину компонентів напруженого стану незначний. На торцях зони спаю всі зусилля та моменти необмежені. Кільцеві зусилля, моменти та крутні моменти набувають необмежених значень при підході до кінців зони спаю від кінців зони контакту.

Запропонований метод може бути використаний при розв'язуванні аналогічної задачі для ортотропної пластинки з еліптичним отвором.

The conclusions. The size of the contact zone considerably depends on its curvature. The size of the contact zone and the contact stresses and moments, respectively, are increasing in its center with the increase of the contact zone curvature. The influence of the contact zone on the size of the components of the stress state is insignificant if the distance from the ends of zone of the soldered joint is increased. In the zone of the soldered joint faces all stresses and moments are unlimited. The hoop stresses, moments and toques are getting unlimited when approaching the ends of the zone of soldered joint from the ends of the contact zone.

The proposed method can be used in the solving of the similar problems for the orthotropic plate with the elliptical hole.

Список використаної літератури

1. Божидарнік, В. Згин ізотропної пластинки, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами [Текст] / В. Божидарнік, В. Опанасович, П. Герасимчук // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С.7-16.
2. Божидарнік, В.В. Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів [Текст] / В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук // Проблеми прочності. – 2006, №5 (383). – С.135-141.
3. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966.-708 с.
4. Сяський, А. Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска [Текст] / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Том 16, №1. – С.16-21.
5. Сяський, А. Напружений стан пластинки з частково підсиленим криволінійним контуром при її циліндричному згині [Текст] / А. Сяський, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т. 16, №2. – С.30-36.
6. Шевцова, Н. Контактна взаємодія пластин з криволінійними контурами і розімкнених пружних ребер при їх несиметричному сполученні [Текст] / Н. Шевцова, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. –2009. – Т. 14, №2. – С.14-22.
7. Сяський, А. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами [Текст] / А. Сяський, С. Гаврюсев // Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2006. – Т. 11, №1. – С.12–17.

Отримано 02.03.2012