***І.Благун. Моделювання управління виробництвом багаторівневих інтегрованих структур лісопромислового комплексу / І.Благун, Н.Судук // Галицький економічний вісник. — 2012. — №5(38). — с.11-20 - (економіка та управління національним господарством та суб'єктами господарювання)***

**УДК 519.86+33.630*6**

**Іван БЛАГУН, Наталія СУДУК**

# МОДЕЛЮВАННЯ УПРАВЛІННЯ ВИРОБНИЦТВОМ БАГАТОРІВНЕВИХ ІНТЕГРОВАНИХ СТРУКТУР ЛІСОПРОМИСЛОВОГО КОМПЛЕКСУ

***Резюме.*** *Розроблено модель управління виробництвом багаторівневих інтегрованих структур лісопромислового комплексу, реалізація якої дозволяє забезпечити узгодження агрегованих показників роботи підприємств із загальним критерієм ефективності виробничо-економічного характеру. Запропонована модель включає групу виробничих задач вибору технологій, пов'язаних системою транспортних задач перевезення сировини, готової продукції. Запропонований метод розв'язання лінійного варіанта багатоетапної транспортно-виробничої задачі, заснований на блоковій структурі зв'язків між обмеженнями з використанням схем подвійної декомпозиції, при якій отримані часткові задачі зберігають свою вихідну структуру і зміст, оскільки блочні задачі повністю відповідають задачам виробничого планування підсистеми, а "центральна", хоча і втрачає властивості транспортної, але залишається близькою до неї.*

***Ключові слова:*** *багаторівневі інтегровані структури, лісопромисловий комплекс, моделювання, транспортно-виробнича задача.*

**Ivan BLAGUN, Nataliya SUDUK**

# MODELING OF PRODUCTION MAMAGEMENT OF MULTILEVEL INTEGRATED STRUCTURES OF FORESTRY INDUSTRY

***Summary.*** *The model of production management of multilevel integrated structures of forestry industry, implementation of which ensures the coordination of aggregate performance of companies with a common criterion of efficiency of production and economic nature was developed. The proposed model includes a group of production problems regarding the selection of technologies that are related by the system of raw materials and finished products transportation problems, of rational distribution and functioning of securing enterprises and industries (forest resources, energy, transportation, construction, etc.), to optimize the management of material and transport flows. Complex problems and models in the planning and management of multilevel integrated timber complex structures have distinct hierarchical structure. Problems are solved at a higher level, then are detailed on the lower level, while the class used models are usually stored, and the model becomes more detailed (the principle of "continuously-variable planning"). Information communications tasks form the circuit, causing the problem of decomposition of complex problems and study the convergence of the solution, which can be eliminated by successive approvals solutions. The method of solving linear version of a multi-transport-production task based on the block structure of relations between constraints with the use of dual decomposition scheme in which obtained partial tasks retain their original structure and meaning was proposed, because block tasks fully meet the objectives of subsystem production planning and "central" one, although losing transport properties, remains close to it. Implementation of the obtained from a multi-transport-production tasks unifying model that corresponds to the system process control top-level guarantees a high economic impact, identifies the "weaknesses" and the state of the production structure, and prospects of its development.*

***Key words:*** *multilevel integrated structures, forestry industry, modeling, transport-production task.*

**Постановка проблеми**. Дослідження структури і систем управління багаторівневих інтегрованих структур (БІС) показує, що транспортно-виробничі задачі займають одне із центральних місць в плануванні й управлінні підприємствами. Будучи достатньо складними для розв'язку і недостатньо вивченими, транспортно-виробничі задачі здатні забезпечити високий економічний ефект, виявити "вузькі" місця і стан виробничої структури, а також перспективи її розвитку.

Одна із особливостей діяльності БІС полягає в "розумній спеціалізації" дочірніх підприємств, що в сукупності з комплексною переробкою сировини і можливістю узгодженого планування діяльності підрозділів БІС може суттєво підвищити ефективність діяльності структури в цілому. При цьому в процесі планування потрібно розв'язати цілий комплекс взаємопов'язаних задач, що призводить до необхідності дослідження класу багатоетапних транспортно-виробничих задач (БТВЗ).

Багаторівневі інтегровані структури лісопромислового комплексу (ЛПК) можуть включати крім основних (одного або кількох) виробництв переробки лісосировини низку лісозаготівельних підприємств, стан лісопромислової бази яких неоднаковий, нерівнозначні інфраструктура, система лісоперевізних доріг, склад лісозаготівельної техніки і кадровий потенціал. Існує значна кількість видів лісопродукції, а також напрямків її переробки. Значним може бути й число способів (технологій) обробки сировини. Основними переробками в лісовому комплексі є круглий ліс, технологічна щепа, папір, картон та інші види продукції деревообробки. Більшість цих продуктів підлягає подальшій переробці, їх баланс можна розраховувати окремо.

Існують проблеми зниження якості готової продукції підприємства через зберігання її в місцях тимчасового складування в результаті порушення графіка перевезення. Транспортно-виробничий план БІС ЛПК складається в розрахунку на наявні й замовлені транспортні засоби. Управління транспортними потоками також залежить від виконання графіка постачання сировини і хімікатів, погодних і дорожньо-транспортних умов, високої аварійності виробництва. Однак ефективного управління транспортними потоками можна досягти за рахунок планування на певний термін часу з урахуванням усіх перелічених обставин.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблемам теорії та практики управління лісовим господарством, формування ефективної лісової політики присвячено праці таких науковців, як А.М. Бобко [1], І.Ф. Букша [2], С.А. Генсірук [3], Е.О. Салмінен [6,7], І.М. Синякевич, І.П. Соловій, А.М. Дейнека [8,9] та інших. Теоретичні засади моделювання управління ринком лісової продукції представлено у праці Ю.М. Кільчицького [5]. Щодо моделювання менеджменту лісів у контексті вимог сталого розвитку відзначимо статтю Д. Загвойської, А.В. Мельника [3]. Деякі застосування моделей загальної рівноваги для аналізу лісової політики розглянуто А.М. Польовським [10].

Однак, зважаючи на неможливість розв'язання в рамках однієї математичної моделі задач планування, розподілу і вибору технологій виробництв БІС ЛПК через причину неможливості опису всіх чинників і зв'язків між ними, проблем інформаційного наповнення, залишається актуальним розробленням комплексу взаємопов'язаних математичних моделей, що охоплює всі аспекти функціонування БІС ЛПК, особливості як технологічних, так і інформаційних проблем.

**Метою статті** є побудова моделі управління виробництвом багаторівневих інтегрованих структур лісопромислового комплексу, що включає групу виробничих задач вибору технологій, пов'язаних системою транспортних задач перевезення сировини, готової продукції, здатних забезпечити узгодження агрегованих показників роботи підприємств БІС у цілому за заданими критеріями ефективності виробничо-економічного характеру.

**Виклад основного матеріалу.** Нехай $p \in P$ – множина територіально розподілених виробничих підприємств. Кожне виробниче підприємство цієї множини може організувати роботу у відповідності з виробничим завданням БІС, використовуючи наявні внутрішні ресурси множини $M_p$. Будемо вважати, що множини $M_p$ не перетинаються і визначимо $M = \cup_{p \in P} M_p$.

Позначимо $N_p \subset N$ – підмножину технологічних операцій (технологій), які виконує виробниче підприємство з індексом $p \in P$, їх об'єднання позначимо $N = \cup_{p \in P} N_p$. Множини $N_p$ також будемо вважати такими, що не перетинаються для різних $p \in P$. Оскільки розв'язання виробничої задачі може бути пов'язане з використанням різних технологій, введемо основні керовані чинники – інтенсивність використання відповідних технологій, яким поставимо у відповідність змінні $x_j$ $(j \in N)$. Будемо вважати ці змінні обмеженими зверху невід'ємними величинами $d_j$, а їх сукупність, в міру низки внутрішніх виробничих умов, знаходяться в деякій множині $\Omega_p$. Витрати, пов'язані з використанням технологій, відображає функціонал $F_p(x\lfloor N_p \rfloor)$: $\Omega_p \to R^1$.

Крім власних ресурсів, виробнича програма різних підприємств $p \in P$ може бути пов'язана з обробкою множини $S$ зовнішніх, існуючих з погляду задачі планування БІС в цілому, ресурсів технологічної системи. Припустимо, що кожен ресурс $s \in S$ пов'язаний щонайменше з двома виробничими ланками.

Кожен із використовуваних ресурсів розглядають як деякий ресурс, взаємозамінний і рівнозначний як для виробника, так і для споживача.

Інтенсивність технологій виробництва $p \in P$ визначають обсяги використання цих ресурсів: $w_p[S] = \left(w_p^1, w_p^2, ..., w_p^{|S|}\right)$, що відображає оператор $G_p(x\lfloor N_p \rfloor)$: $\Omega_p \to R^{|S|}$, тобто $w_p[S] = G_p(x\lfloor N_p \rfloor)$. Відзначимо, що $w_p[S] \geq 0$ – для пункту виробництва $p$ продукту $s$, $w_p[S] \leq 0$ – для пункту споживання $p$ продукту $s$, $w_p[S] = 0$ – якщо виробництво $p$ не пов'язане з використанням або виробництвом продукту $s$.

Будемо вважати сумарне використання ресурсів кожного виду обмеженим зверху і знизу значеннями $H_s \geq h_s$ $(s \in S)$. Значення $H_s$ і $h_s$ можуть бути близькими або дорівнювати нулю для $s \in S$ – виробничої переділу, додатними, якщо $s$ – індекс виробленої продукції, і від'ємними у випадку $s$ – деякого зовнішнього (ввізного) споживаного ресурсу.

В рамках даної моделі можна розглядати зовнішніх постачальників сировини і споживачів продукції як деякі "фіктивні" виробництва, технологія яких – постачання (споживання) продукту, що дозволяє замкнути тим самим транспортну систему з урахуванням відповідних транспортних витрат. Проте на рівні постановки задачі зручніше просто ввести границі використання $H_S$ і $h_s$.

У зв'язку з просторовим розподілом, потоки матеріальних ресурсів є транспортними потоками $y_{pq}^s$ ($p, q \in P$, $s \in S$). Ці потоки є невід'ємними, витрати пов'язані з транспортуванням ресурсів будемо вважати лінійними і пропорційними значенням $\sigma_{pq}^s$, при $p, q \in P$, $s \in S$.

Об'єднавши транспортні потоки і використання ресурсів рівняннями балансу, отримаємо таку математичну модель:

- допустимість інтенсивності технологій
$$x\lfloor N_p \rfloor \in \Omega_p, \ p \in P; \tag{1}$$
- зв'язок обсягів споживання (виробітку) ресурсів з інтенсивністю технологій
$$w_p[S] = G_p(x\lfloor N_p \rfloor), \ p \in P; \tag{2}$$
- збалансованість сумарних витрат і виробітку ресурсів
$$h_s \leq \sum_{p \in P} w_p^s \leq H_s, \ s \in S; \tag{3}$$

- збалансованість транспортних потоків виробництв

$$\sum_{q\in P}\left(y_{qp}^{s}-y_{pq}^{s}\right)=w_{p}^{s},\ p\in P,\ s\in S\ ; \tag{4}$$

- обмеженість інтенсивності технологій

$$0\le x_{j}\le d_{j},\ j\in N\ ; \tag{5}$$

- невід'ємність транспортних потоків

$$y_{pq}^{s}\ge 0,\ p,q\in P,\ s\in S\ . \tag{6}$$

Цільова функція

$$\sum_{p\in P}F_{p}\left(x\left[N_{p}\right]\right)+\sum_{s\in S}\sum_{p\in P}\sum_{q\in P}\sigma_{pq}^{s}y_{pq}^{s}\to\min \tag{7}$$

відображає мінімальні транспортно-виробничі витрати, необхідні для виконання виробничого плану.

Задача (1) – (7) – багатоетапна транспортно-виробнича задача (БТВЗ), що є об'єднуючою моделлю, ціль якої – узгодження планів роботи підприємств, забезпечення ефективної роботи БІС у цілому за заданими критеріями. Отримана модель відповідає системі управління виробничим процесом верхнього рівня, ціль якого – узгодження агрегованих показників роботи підприємств БІС із загальним критерієм ефективності виробничо-економічного характеру.

Обмеження (1) і (5) відображають внутрішні ресурси виробництва (виробничі блоки БТВЗ); (3), (4), і (6) – міжвиробничі продуктові зв'язки (транспортні блоки БТВЗ); (2) і (7) – пов'язують перелічені блоки між собою.

Рівняння (4) у випадку фіксованих значень $x\left[N_{p}\right]$ $\left(p\in P\right)$ разом з умовами (2) являють собою обмеження транспортної задачі відносно $w_{p}^{s}$, ( $p\in P$, $s\in S$ ). Виходячи із природного припущення про невід'ємність $\sigma_{pq}^{s}\ge 0$, ( $p,q\in P$, $s\in S$ ), частина змінних цієї задачі дорівнює нулю. Форма умов транспортних задач, за яких наявна можливість будь-яких перевезень, дозволяє розробити ефективніші алгоритми розв'язку БТВЗ у порівнянні, наприклад, з класичною задачею розміщення підприємств.

Нерівності (5) не включені у визначення множини $\Omega_{p}$, оскільки вони є спеціальними умовами у випадку лінійної моделі і не входять до складу її матриці обмежень. Однак для зручності спільного дослідження всіх обмежень, що пов'язують вектор $x\left[N\right]$, доцільно ввести множину

$$\Omega_{p}'=\Omega_{p}\cup\left\{x\left[N_{p}\right]\middle|0\le x_{j}\le d_{j}\right\},\ p\in P, \tag{8}$$

що об'єднує умови (1) і (5).

У лінійному випадку кожна технологія $j\in N_{p}$, $p\in P$ характеризується внутрішньою продуктивною структурою – вектор-стовпцем $A_{j}\left[M_{p}\right]$ і зовнішньою продуктивною структурою – вектор-стовпцем $B_{j}\left[S\right]$ споживання (або виробітку, залежно від знака) зовнішніх продуктів $S$. Функціонал $F_{p}\left(x\left[N_{p}\right]\right)$ є лінійною функцією відносно $x_{j}$ $\left(j\in N_{p}\right)$ з деякими коефіцієнтами $\left(c_{j}\right)_{j\in N}$ вектора $c\left[N\right]$. Будемо вважати, що стовпці $A_{j}\left[M_{p}\right]$ $\left(j\in N_{p}\right)$ утворюють матриці $A\left[M_{p},N_{p}\right]$, а стовпці $B_{j}\left[Q\right]$ $(j\in N)$ – матриці $B\left[Q,N\right]$.

Многогранник $\Omega_p$ для $p \in P$ можна описати набором лінійних обмежень

$$\Omega_p = \left\{ x\left[N_p\right] \sum_{j \in N_p} A_{ij} x_j \bullet \beta_i, i \in M_p \right\}, \tag{9}$$

де $\bullet$ – один зі знаків =, $\geq$, $\leq$.

У випадку лінійних умов задачі БТВЗ співвідношення (1), (2) і (7) запишемо таким чином:

$$\sum_{j \in N_p} A_{ij} x_j \bullet \beta_i \,,\; i \in M_p \,, \tag{1'}$$

$$w_p^s = \sum_{j \in N_p} B_{sj} x_j \,,\; s \in S \,, \tag{2'}$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in N_p} c_j x_j + \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} \sum_{q \in P} \sigma_{pq}^s y_{pq}^s \to \min. \tag{7'}$$

Багатоетапна транспортно-виробнича задача включає групу задач розподілу ресурсів, визначених співвідношеннями (1) (або (1') в лінійному випадку) і пов'язаних між собою безпосередньо рівняннями балансів (3) – (4) в транспортні задачі й продуктивних співвідношень (2) (або (2') у лінійному випадку). Весь блок задач об'єднує спільний функціонал (7) або (7').

Умови (3) і (4) є рівняннями балансу транспортної задачі в матричній постановці для повного транспортного графу, матриця суміжності якого складається із одиниць. На практиці іноді вдається скоротити кількість одиниць матриці суміжності транспортного графу, переходячи до сіткової транспортної задачі, яка не тільки має меншу розмірність, але й зручніше інтерпретується як на рівні формування вихідних даних, так і розшифрування результатів обчислень. Подібний варіант БТВЗ назвемо сітковим. Для його постановки введемо $G_s =< P, E_s >$ – транспортний граф продукту $s \in S$, вершини якого відповідають виробництвам БІС ЛПК, а дуги – магістралям транспортування ресурсів підприємства.

Визначимо $\sigma_u \geq 0$ – витрати транспортування по дузі $u \in E_s$, $y_u^s \geq 0$ – величина потоку. Тоді сумарні витрати на транспортування продукту $s \in S$ складуть $\sum_{u \in E_s} \sigma_u y_u^s$. Для складання рівнянь балансу сіткової транспортної задачі (ТЗ) визначимо $\Gamma_{sp}^+$ – множину дуг, які входять до вершини $p \in P$, множина $\Gamma_{sp}^-$ – множину дуг, які виходять з $p$. Тоді рівняння балансу (замість (4)) набуде вигляду

$$\sum_{u \in \Gamma_{sp}^+} y_u^s - \sum_{u \in \Gamma_{sp}^-} y_u^s = w_p^s \,. \tag{4'}$$

Визначимо цільову функцію сіткової БТВЗ

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in N_p} c_j x_j + \sum_{s \in S} \sum_{u \in E_s} \sigma_u y_u^s \to \min. \tag{7'}$$

Задача (1) – (7) і всі представлені її варіанти мають у собі як транспортні, так і виробничі блоки, що являють собою самостійні оптимізаційні задачі.

Складність алгоритму розв'язання принципово не залежить від вибору виду сіткових чи матричних допоміжних транспортних задач. Дослідження цих задач на практиці призводить до складної математичної задачі з тисячами змінних і обмежень, тому розв'язати задачі БТВЗ за допомогою класичних методів розв'язку оптимізаційних задач досить складно.

Для спрощення розв'язання даної задачі потрібно знайти певну послідовність розв'язання часткових задач, які, поступово деталізуючись, складуть загальний розв'язок вихідної задачі. Проте такий алгоритм потребує певного обґрунтування, доведення його збіжності до оптимального розв'язку загальної задачі.

Введемо низку означень. Нехай вихідна задача $P$ полягає у пошуку $\max f(x)$ при $x \in \Omega$. Тоді можливі такі випадки:

1. Множина допустимих розв'язків задачі оптимізації $\Omega = \emptyset$ – порожня.
2. Множина допустимих розв'язків задачі оптимізації $\Omega$ складається із єдиного елемента;
3. Оптимальне значення цільової функції $f(x)$ не досягається на $\Omega$ (наприклад, $\sup\{f(x) | x \in \Omega\} = \infty$ або множина $\Omega$ не замкнена). В цьому випадку можна розглядати тільки наближений розв'язок задачі.
4. Існує оптимальне значення $z^*$ цільової функції, яке досягається. Існує вектор $x^* \in \Omega : f(x^*) = z^* = \sup\{f(x) | x \in \Omega\} < \infty$, який назвемо оптимальним розв'язком вихідної задачі.

Оскільки перший і третій випадки зазвичай обумовлені прорахунками при побудові моделі або неправильним визначенням параметрів, а другий малоймовірний, то, якщо не обумовлено протилежне, будемо вважати, що задача оптимізації $P$ задовольняє останній умові, тобто має оптимальний розв'язок.

Для опису задачі введемо множину змінних $(x_j)_{j \in N}$ ($N = 1..n$) і обмежень ($M = 1..m$), матрицю обмежень $A = (A_{ij})_{i \in M, j \in N}$, вектор коефіцієнтів цільової функції $C = (c_j)_{j \in N}$ і вектор правих частин обмежень $(b_i)_{i \in M}$. Визначимо розширену матрицю обмежень як $A[M, N \cup \{0\}]$, ($A_{i0} = b_i$, $i \in M$). Для опису задачі в загальній формі необхідно також вказати напрям оптимізації, типи обмежень і знаки змінних. Розмір задачі позначимо $m \times n$.

Розглянемо задачу лінійного програмування $P$ у загальній формі

$$CX \to \max(\min),\ AX \bullet b,\ X\Diamond, \tag{10}$$

де символ $\bullet$ заміняє один із трьох можливих знаків =, $\geq$, $\leq$ символ $\Diamond$ означає , що відповідна змінна $x_j \geq 0$, $x_j \leq 0$ або $x_j$ будь-якого знака.

Розв'язок задачі (план) визначимо як вектор $X \in \Omega = \{X \geq 0 | A \cdot X = b\}$. Ціль розв'язання задачі $P$ – пошук $X^*$ – оптимального розв'язку (оптимального плану) задачі

$$X^* \in \Omega : C \cdot X = z^* = \max\{C \cdot X | A \cdot X = b; x \geq 0\}. \tag{11}$$

Якщо множина $\Omega$ необмежена, то $z^*$ будемо вважати рівним $\infty$, якщо $\Omega = \emptyset$, визначимо $z^* = -\infty$.

При розв'язанні задач лінійного програмування (ЛП) зручно використовувати обчислювальні схеми достатньо простого, надійного і обчислювально ефективного методу поступового покращення плану. Для складніших блочних задач оптимізації, коли збіжність методу в міру наближення до оптимального розв'язку знижується, ця обчислювальна схема може використовуватися для пошуку близького до оптимального розв'язку.

Теорія двоїстості в лінійному програмуванні пов'язує розв'язок задачі $P$

$$P : z = C \cdot X \to \max; A \cdot X = b; x \geq 0 \tag{12}$$

з двоїстою до неї задачею $D$ вигляду

$$D: w = \upsilon \cdot b \to \min;\ \upsilon \cdot A \ge c\,, \tag{13}$$

тобто пошуком

$$\upsilon^* : \upsilon^* \cdot b^* = w^* = \min\{\upsilon \cdot b | \upsilon \cdot A \ge c\}. \tag{14}$$

Згідно з теоремою двоїстості, якщо $P$ і $D$ – пара двоїстих задач, то $z^* = \upsilon^*$. Ця теорема справедлива для всіх можливих випадків $-\infty \le z^* = \upsilon^* \le \infty$. Якщо існує оптимальний розв'язок однієї з цих задач, то існує розв'язок і другої, причому значення цільових функцій для цих розв'язків однакові.

Нехай $X^*$ і $\upsilon^*$ – довільний оптимальний розв'язок задач $P$ і $D$. Тоді, якщо $X_i^* > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\upsilon_i^* = C_j$ і, навпаки, якщо $\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\upsilon_i^* > C_j$, то $X_i^* = 0$. Розв'язки прямої і двоїстої задач, які відповідають умовам даного твердження, називають узгодженими. Таким чином, знаючи $X^*$ – оптимальний розв'язок прямої задачі $P$, можна отримати інформацію про оптимальний розв'язок двоїстої $D$ у вигляді системи лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ij}x_i^* = C_j\,,\ \forall j : X_j^* > 0\,. \tag{15}$$

Якщо $X^*$ – допустимий базисний розв'язок, то рівняння системи (15) відповідають базисним змінним. Пару оптимальних розв'язків $x^*$ – прямої і $\upsilon^*$ – двоїстої задачі, які відповідають умовам (15), назвемо узгодженими.

Матрицю $A$ задачі ЛП називають блочною, якщо вона містить деяку сукупність $N_1, N_2, ..., N_k$ диз'юнктивних підмножин стовпців $(N_r \subset N)$ і $M_1, M_2, ..., M_k$ рядків $(M_s \subset M)$, таких, що $A[M_s, N_r] = 0$, якщо $s \ne r$. Визначимо $N_0 = N \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{k} N_s\right)$, $M_0 = M \setminus \left(\bigcup_{s=1}^{k} M_s\right)$. Тоді всі ненульові елементи містять підматриці $A[M_0, N]$, $A[M, N_0]$ і $A_s = A[M_s, N_s]$ $(s \in 1..k)$. Першу з них складають спільні рядки матриці $A$, другу – стовпці, які назвемо блоками цієї матриці.

Блочна задача ЛП – задача з блочною матрицею обмежень. Якщо пряма задача – задача розподілу ресурсів (складання виробничого плану) деякого виробничого об'єднання, яке складається з головної (управляючої) компанії і групи підприємств, то рядки $M_s$ і стовпці $N_s$ відповідають власним ресурсам і технологіям деяких виробництв $1 \le s \le k$, а матриця $A_s$ відображає використання ресурсів у технологіях виробництва $s$. Матриця $A[M_0, N]$ визначає використання спільних ресурсів множини $M_0$ компанії, $A[M, N_0]$ – спільних для всіх виробництв технологій.

Розглянута задача ЛП з $k$ обмеженнями має вигляд

$$c^1 \cdot x^1 + c^2 \cdot x^2 + ... + c^k \cdot x^k \to \max\,, \tag{16}$$

$$B^1 \cdot x^1 + B^2 \cdot x^2 + ... + B^k \cdot x^K = b^0\,, \tag{17}$$

$$A^q \cdot x^q = b^q,\ q \in 1, \dots, k\,, \tag{18}$$

$$x^q \ge 0,\ q \in 1, \dots, k\,, \tag{19}$$

де $x^q = x^q\left[N_q\right], q \in 1, \dots, k$ – інтенсивність технологій виробництва $q$;

$B = (B^1[M_0, N_1], B^2[M_0, N_2],...)$ – матриця використання спільних ресурсів;

$A = (A^1[M_1, N_1], A^2[M_2, N_2],...)$ – матриця використання ресурсів виробництв;

$b = (b^0[M_0], b^1[M_1],...)$ – вектор наявності ресурсів;

$c = (c^1[M_1], c^2[M_2],...)$ – коефіцієнти цільової функції.

Цільова функція задачі відображає дохід компанії, перша група обмежень – баланс загальних ресурсів виробництв, наступні – власних ресурсів.

Кожне виробництво функціонує у відповідності з власними технологіями, в результаті матриця $A$ має блочний характер при спільних обмеженнях. Для розв’язання цієї задачі можна використовувати метод декомпозиції, який допускає досить прозору економічну інтерпретацію.

Метод декомпозиції Данціга-Вулфа базується на розв’язанні прямої задачі в результаті послідовного виконання двох етапів, один з яких – розв’язок координуючої (“центральної”) задачі розподілу спільних ресурсів компанії, другий – побудова (на рівні алгоритму проміжних розрахунків) оптимального плану кожного із виробництв з урахуванням встановлених цін на спільні ресурси.

Ідея цього методу базується на переході до множини крайніх точок блочної задачі $P_q$, $q \in 1,\dots,k$ з умовами

$$\psi^q \cdot x^q \to \max , \tag{20}$$

$$A^q \cdot x^q = b^q , \tag{21}$$

$$x^q \geq 0 . \tag{22}$$

Алгоритм формулюється при умові існування оптимального розв’язку кожної із блочних задач при будь-якому значенні коефіцієнтів цільової функції $\psi^q$, що буде виконано, наприклад, якщо обмежені множини $\Omega^q = \left\{x^q \geq 0 \middle| A^q \cdot x^q = b^q\right\}$ допустимих розв’язків задач $P_q$, $q \in 1,\dots,k$.

Обґрунтування алгоритму складається із таких кроків:

1. Перехід до представлення розв’язку системи лінійних обмежень (18) через крайні точки множини $\alpha_s \in T^q ext(\Omega^q)$ допустимих розв’язків. Зручно вважати, що $T^p \cap T^q = \emptyset$ при $p \neq q$ і позначимо $T = \cup_{q \in 1..k} T^q$. Будь-який $x^q$ – допустимий розв’язок цієї системи обмежень представимо у вигляді лінійної комбінації

$$x^q = \sum_{t \in T^q} \alpha^t \cdot \lambda_t , \tag{23}$$

$$\lambda_t \geq 0, \quad \sum_{t \in T^q} \lambda_t = 1, \; q \in 1,\dots,k , \tag{24}$$

оскільки область, що визначається (20)-(21) – обмежена і замкнена многогранна множина.

2. Виконаємо заміну змінних і перейдемо до прямої задачі в термінах змінних $\lambda$. Отже, визначимо

$$W_t = B \cdot \alpha_t , \tag{25}$$

$$\eta_t = c \cdot \alpha_t \tag{26}$$

витрати ресурсів і дохід, пов’язані з розв’язком прямої задачі.

Тоді співвідношення (21) можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь

$$\sum_{q\in 1..k}\sum_{t\in T^q} W_t\cdot\lambda_t = b^0, \tag{27}$$

які, разом з (24) і цільовою функцією

$$\sum_{q\in 1..k}\sum_{t\in T^q} \eta_t\cdot\lambda_t \to \max \tag{28}$$

еквівалентні прямій задачі.

Будемо називати задачу (24), (27) – (28) "центральною", двоїсті змінні обмежень (24) позначимо через $z_q$, обмежень (27) – $\upsilon$.

Розглянута задача є задачею ЛП з $k$ додатковими обмеженнями (24) для $q\in 1,\ldots,k$. Двоїсті змінні цієї задачі – оцінки загальних ресурсів БІС ЛПК.

3. Запишемо умову оптимальності розглянутої задачі. Поточний базисний план оптимальний тоді і тільки тоді, коли справедливі всі нерівності

$$\upsilon\cdot W_t + z_q \ge \eta_t,\ \ q\in 1,\ldots,k. \tag{29}$$

Перепишемо це обмеження у формі

$$\upsilon\cdot W_t - \eta_t \ge -z_q, \tag{30}$$

зібравши все, що залежить від номера крайньої точки $t\in T$ в ліву частину співвідношення. Скористаємося співвідношеннями (25) – (26), щоб повернутися до умов блочної задачі. Перевірка оптимальності прямої задачі в даному випадку зводиться до перевірки співвідношень

$$\upsilon\cdot\left(B\cdot\alpha_t\right) - c\cdot\alpha_t \ge -z_q,\ \ t\in T_q, q\in 1..k \tag{31}$$

або записаних у зручнішій формі

$$\left(c-\upsilon\cdot B\right)\cdot\alpha_t \le z_q,\ \ t\in T_q, q\in 1..k, \tag{32}$$

де $\alpha_t$ – крайні точки многогранників $T_q$.

4. Відтак очевидно, що немає необхідності розглядати всі крайні точки, достатньо визначити тільки ту з них, для якої ліва частина досягає найбільшого значення, і порівняти з $z_q$. Проте пошук такої крайньої точки зводиться до розв'язання задачі ЛП з цільовою функцією

$$\left(c-\upsilon\cdot B\right)\cdot x \to \max \tag{33}$$

і обмеженнями (2.14) – (2.15). Позначимо через

$$\psi^q = \psi^q(\upsilon) = c^q - \upsilon\cdot B^q \tag{34}$$

вектор коефіцієнтів цієї допоміжної цільової функції для блочної задачі (21)-(22).

Таким чином, алгоритм розв'язання прямої задачі такий.

**Крок 0**. Побудувати допустимий розв'язок "центральної" задачі (24), (27) – (28). Для побудови такого розв'язку можна використати, наприклад, штучні змінні.

**Крок 1**. Розв'язати блочні задачі планування виробництва $q\in 1,\ldots,k$ з урахуванням двоїстих оцінок $\upsilon$.

**Крок 2**. Якщо оцінки кожного вектора коректування плану оптимального розв'язку однієї із блочних задач (20) – (22) задовольняють нерівності (32), робота алгоритму закінчена, отриманий план – оптимальний, а оцінки $\upsilon$ – двоїсті оцінки отриманого оптимального плану, інакше – перейти на **крок 3**.

**Крок 3**. Виконати чергову ітерацію розв'язання "центральної" задачі, розглядаючи знайдені розв'язки блочних задач як нові базисні елементи. Розрахувати вектор оцінок $\upsilon$ ресурсів $M_0$. Перейти на **крок 1**.

**Висновки**. Розроблено модель управління виробничим процесом БІС ЛПК, що забезпечує узгодження агрегованих показників роботи підприємств із загальним критерієм ефективності виробничо-економічного характеру. Запропонована модель та її модифікації містять у собі транспортні й виробничі блоки, які є взаємозв'язаними оптимізаційними задачами. Запропонований метод розв'язання лінійного варіанта багатоетапної транспортно-виробничої задачі, заснований на блоковій структурі зв'язків між обмеженнями з використанням схем подвійної декомпозиції. Специфіка декомпозиції полягає в розкладі вихідної задачі таким чином, що отримані часткові задачі зберігають свою вихідну структуру і зміст, оскільки блочні задачі повністю відповідають задачам виробничого планування підсистеми, а "центральна", хоча і втрачає властивості транспортної, але залишається близькою до неї.

**Conclusions.** Thus, the management model of production process of the multilevel integrated structures of forestry industry, that provides the coordination of aggregated performance of companies with a common criterion of efficiency of production and economic nature is developed. The proposed model and its modifications contains transport and production units, which are interrelated by the optimization problems. The method of solving linear version of a multi-transport-production task based on the block structure of relations between constraints using dual decomposition schemes was proposed. Specificity of decomposition is to schedule the initial problem so that the resulting partial tasks retain their original structure and meaning, because block tasks fully meet the objectives of subsystem production planning and "central" one, although losing the transport properties, remains close to it.

**Використана література**

1. Бобко, А.М. Окремі аспекти економіки сучасного лісівництва в Україні [Текст] / А.М. Бобко // Економіка України. – 2004. – № 7. – С. 41 – 48.
2. Букша, І.Ф. Стале управління лісами і моніторинг: огляд сучасних тенденцій [Текст] / І.Ф. Букша // Науковий вісник Національного аграрного університету. – Вип. 25. – Лісівництво. – К.: НАУ, 2000. – С. 123 – 129.
3. Генсірук, С.А. Ліс – проблема державна і світова [Текст] / С.А. Генсірук // Наукові праці: Лісівнича академія наук України. – 2002. – Випуск 1. – С. 22 – 26.
4. Загвойська, Л.Д. Моделювання менеджменту лісів у контексті вимог сталого розвитку [Текст] / Л.Д. Загвойська, А.В. Мельник // Вісник Львів, ун-ту. Серія екон. – Вип. 40. – 2008. – С. 105 – 108.
5. Кільчицький, Ю.М. Теоретичні засади моделювання управління ринком лісової продукції [Текст] / Ю.М. Кільчицький // Вісник Запорізького національного університету. Економічні науки: Збірник наукових статей. – № 1(5). – 2010. – С. 97 – 101.
6. Салминен, Э.О. Лесопромышленная логистика: учебное пособие [Текст] / Э.О. Салминен, А.А. Борозна, Н.А. Тюрин. – СПб.: ЛТА, 2001. – 188 с.
7. Салминен, Э.О. Информационные технологии и системы в лесопромышленном комплексе: учебное пособие [Текст] / Э.О. Салминен и др. – СПб.: ЛТА, 2002. – 180 с.
8. Синякевич, І.М. Лісове господарство України в двадцять першому столітті: стан, сценарії і проблеми сталого розвитку [Текст] / І.М. Синякевич., І.П. Соловій І.П., Дейнека А.М. // Економіка України. – № 9. –2007. – С. 72 – 81.
9. Соловій, І.П. Інституційні аспекти реформування лісової політики [Текст] /І.П. Соловій // Науковий вісник: Менеджмент природних ресурсів, екологічна і лісова політика. – Збірник науково-технічних праць. – Львів: УкрДЛТУ. – 2004. –Вип. 14.2. – С. 71 – 79.
10. Польовський, А.М. Застосування моделей загальної рівноваги для аналізу лісової політики [Текст] / А.М. Польовський // Науковий вісник: Екологізація економіки як інструмент сталого розвитку в умовах конкурентного середовища. – Вип. 15.7. – Львів: НЛТУ України, 2005. – С. 185 – 189.