Лучко Й. Напружений стан навантаженої внутрішнім тиском циліндричної оболонки кусково-сталої товщини / Лучко Й., Гнатів Ю. // Вісник ТНТУ. — 2012. — Том 65. — № 1. — С.13-18. — (механіка та матеріалознавство).

УДК 539.3

Й. Лучко, докт. техн. наук; Ю. Гнатів, канд. фіз.-мат. наук

Львівська філія Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна

НАПРУЖЕНИЙ СТАН НАВАНТАЖЕНОЇ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ КУСКОВО-СТАЛОЇ ТОВЩИНИ

Резюме. *Запропоновано методику визначення напруженого стану навантаженої внутрішнім тиском циліндричної оболонки кусково-сталої товщини, залежної від осьової координати. Методика базується на використанні сплайн-перетворення аргументу. Вихідне рівняння зводиться до диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною. Для побудови його розв'язку використовується інтегральне перетворення Фур'є. Досліджується залежність напружень від геометричних характеристик оболонки.*

Ключові слова: *напружений стан, циліндрична оболонка, кусково-стала товщина, внутрішній тиск, сплайн-перетворення аргументу.*

J. Luchko, Yu. Hnativ

STRESS STATE OF LOADED WITH INTRINSIC PRESSURE CYLINDRICAL SHELL OF PIECEWISE-PERMANENT THICKNESS

The summary. *The method of determination of the stress state of loaded with intrinsic pressure cylindrical shell of piecewise-permanent thickness, dependency upon an axial coordinate, have been designed. The method is based on the use of argument spline-transformation. The initial equation is reduced to a differential equation with constant coefficients and singular right part. For the construction of its solution the integral Fourier transformation is used. Dependence of stresses on geometrical descriptions of shell is investigated.*

Key words: *stress state, cylindrical shell, piecewise-permanent thickness, intrinsic pressure, argument spline-transformation.*

Постановка проблеми. Циліндричні оболонки є поширеними елементами машинобудівних конструкцій, точних приладів і будівельних споруд. У зв'язку з цим є актуальною проблема дослідження напруженого стану циліндричних оболонок, які перебувають під дією різних навантажень. Ці дослідження є основою оцінювання міцності та надійності оболонок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв'язування задач для оболонок у тривимірній постановці спряжене зі значними математичними труднощами, зумовленими складністю системи вихідних диференціальних рівнянь у часткових похідних і необхідністю задоволення крайових умов. Для уникнення цих труднощів користуються різними наближеними методами, які умовно поділяють на три групи. До першої групи відносять методи, які містять процес заміни розв'язування тривимірної задачі послідовністю розв'язувань двовимірних задач [1, 2], до другої – підходи, що ґрунтуються на прийнятті гіпотез, які спрощують задачу [1, 2], до третьої – числово-аналітичні методи [3–5].

У праці [6] запропоновано методику побудови рівнянь статики пружних товстостінних оболонок, яка ґрунтується на використанні розкладів напружень і переміщень за оптимальними базисними функціями, що визначаються з умови стаціонарності функціонала Рейсснера. Це дозволяє отримувати адекватні математичні моделі при утриманні невеликої кількості членів у розкладах.

У роботах [7, 8] для побудови розв'язків диференціальних рівнянь, що описують напружено-деформований стан тіл і оболонок кусково-сталої товщини, використовується співвідношення, яке зв'язує класичну та узагальнену похідні. У цій праці вихідне диференціальне рівняння, коефіцієнти якого є кусково-сталими функціями, зводиться за допомогою сплайн-перетворення аргументу до рівняння зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною.

Метою роботи є розроблення методики розрахунку навантаженої внутрішнім тиском циліндричної оболонки кусково-сталої товщини, яка залежить від осьової координати.

Методика визначення напруженого стану. Розглянемо пружну нескінченну циліндричну оболонку кусково-сталої товщини, навантажену внутрішнім тиском P. Нехай половина товщини оболонки визначається за формулою

$$h(z) = h_1 + \sum_{i=1}^{n} (h_{i+1} - h_i) S_-(z - z_i), \tag{1}$$

де $S_-(z - z_i) = \begin{cases} 1 \text{ при } z \geq z_i, \\ 0 \text{ при } z < z_i; \end{cases}$ z – осьова координата.

Для визначення напруженого стану оболонки використаємо співвідношення теорії оболонок, яка базується на гіпотезі Кірхгофа – Лява [9]. Вихідні співвідношення у цьому разі зводяться до рівняння відносно функції прогинів w

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[h^3(z) \frac{d^2 w}{dz^2} \right] + \frac{3(1-\nu^2)h(z)}{R^2} w = \frac{3(1-\nu^2)P}{2E}. \tag{2}$$

Тут R – радіус серединної поверхні оболонки; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона.

Якщо відома функція w, то відмінні від нуля осьові та кільцеві напруження можна визначити за формулами

$$\sigma_1 = -\frac{E\gamma}{1-\nu^2} \frac{d^2 w}{dz^2}, \quad \sigma_2 = \frac{Ew}{R} + \nu\sigma_1,$$

де γ – координата, напрямлена вздовж нормалі до серединної поверхні оболонки.

Із рівняння (2) випливає, що

$$w(z),\, h^3(z) \frac{d^2 w}{dz^2} \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}), \tag{3}$$

де $\mathrm{C}^1(\mathbf{R})$ – простір функцій неперервно-диференційовних на множині дійсних чисел $\mathbf{R}$. Із цієї властивості функцій $w(z)$ і $h^3(z)\dfrac{d^2 w}{dz^2}$ випливають умови ідеального механічного контакту сусідніх областей оболонки, які відрізняються товщиною.

Для розв'язування рівняння (2) використаємо сплайн-перетворення аргументу [10]

$$z = a_1 x + \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)(x - x_i) S_-(x - x_i). \tag{4}$$

Тут x – нова незалежна змінна, яка дорівнює x_i при $z = z_i$, тобто

$$x_1 = \frac{z_1}{a_1}, \quad x_j = x_{j-1} + \frac{z_j - z_{j-1}}{a_j} \quad \left(j = \overline{2, n}\right). \tag{5}$$

Параметри сплайн-перетворення a_k $\left(k = \overline{1, n+1}\right)$ будемо вибирати такими, щоб від рівняння (2) перейти до рівняння зі сталими коефіцієнтами (за винятком точок $x = x_i$, в яких коефіцієнти перетвореного рівняння будуть мати особливості).

Знайдемо похідні w по x. Беручи до уваги, що $w(z) \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$, отримаємо

$$\frac{dw}{dx} = \left[a_1 + \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i)S_-(x - x_i)\right]\frac{dw}{dz},$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \left[a_1^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(a_{i+1}^2 - a_i^2\right)S_-(x - x_i)\right]\frac{d^2w}{dz^2} + \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i)\frac{dw(z_i)}{dz}\delta_-(x - x_i), \tag{6}$$

де $\delta_-(x - x_i)$ – асиметрична дельта-функція.

Уведемо функцію

$$w^* = h^3(z)\frac{d^2w}{dz^2} \tag{7}$$

і запишемо рівняння (2) у вигляді

$$\frac{d^2w^*}{dz^2} + \frac{3\left(1-\nu^2\right)h(z)}{R^2}w = \frac{3\left(1-\nu^2\right)P}{2E}. \tag{8}$$

Використовуючи вираз (7) і те, що $x \le x_i$ $(x > x_i)$ при $z \le z_i$ $(z > z_i)$, перетворимо друге співвідношення (6) до вигляду

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \left[\frac{a_1^2}{h_1^3} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}^2}{h_{i+1}^3} - \frac{a_i^2}{h_i^3}\right)S_-(x - x_i)\right]w^* = \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i)\frac{dw(z_i)}{dz}\delta_-(x - x_i). \tag{9}$$

Двічі диференціюючи рівняння (9) по x та враховуючи, що $w^*(z) \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$, отримаємо

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \left[\frac{a_1^4}{h_1^3} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}^4}{h_{i+1}^3} - \frac{a_i^4}{h_i^3}\right)S_-(x - x_i)\right]\frac{d^2w^*}{dz^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_{i+1}^3}{h_{i+1}^3} - \frac{a_i^3}{h_i^3}\right)\frac{dw^*(z_i)}{dz}\delta_-(x - x_i) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a_{i+1}^2}{h_{i+1}^3} - \frac{a_i^2}{h_i^3}\right)w^*(z_i)\delta'_-(x - x_i) + (a_{i+1} - a_i)\frac{dw(z_i)}{dz}\delta''_-(x - x_i)\right]. \tag{10}$$

Підставляючи у співвідношення (10) вираз для $\dfrac{d^2w^*}{dz^2}$, знайдений із (8), отримаємо

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{3\left(1-\nu^2\right)}{R^2}\left[\frac{a_1^4}{h_1^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}^4}{h_{i+1}^2} - \frac{a_i^4}{h_i^2}\right)S_-(x - x_i)\right]w =$$

$$= \frac{3\left(1-\nu^2\right)P}{2E}\left[\frac{a_1^4}{h_1^3} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}^4}{h_{i+1}^3} - \frac{a_i^4}{h_i^3}\right)S_-(x - x_i)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{a_{i+1}^3}{h_{i+1}^3} - \frac{a_i^3}{h_i^3}\right)\frac{dw^*(z_i)}{dz}\delta_-(x - x_i) + \right. \tag{11}$$

$$\left. + \left(\frac{a_{i+1}^2}{h_{i+1}^3} - \frac{a_i^2}{h_i^3}\right)w^*(z_i)\delta'_-(x - x_i) + (a_{i+1} - a_i)\frac{dw(z_i)}{dz}\delta''_-(x - x_i)\right].$$

Виходячи із умов (3) і виразів (4), (7), знайдемо

$$\frac{dw^*(z_i)}{dz} = \frac{h_i^3}{a_i^3}\frac{d^3w(x_i - 0)}{dx^3}, \quad w^*(z_i) = \frac{h_i^3}{a_i^2}\frac{d^2w(x_i - 0)}{dx^2}, \quad \frac{dw(z_i)}{dz} = \frac{1}{a_i}\frac{dw(x_i - 0)}{dx}. \tag{12}$$

Будемо вимагати, щоб виконувалась умова

$$\frac{a_1^4}{h_1^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i+1}^4}{h_{i+1}^2} - \frac{a_i^4}{h_i^2}\right)S_-(x - x_i) = \frac{4R^2}{3(1-\nu^2)}. \tag{13}$$

Звідси випливає, що

$$a_i^4 = \frac{4R^2h_i^2}{3(1-\nu^2)} \quad \left(i = \overline{1,\, n+1}\right). \tag{14}$$

З урахуванням виразів (12) і (14) рівняння (11) запишемо у вигляді

$$\frac{d^4w_0}{dx^4} + 4w_0 = \frac{2RP}{Eh(x)} + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(H_i^{\frac{3}{2}} - 1\right)\frac{d^3w_0(x_i-0)}{dx^3}\delta_-(x-x_i) + \right.$$

$$\left. + \left(H_i^2 - 1\right)\frac{d^2w_0(x_i-0)}{dx^2}\delta'_-(x-x_i) + \left(H_i^{-\frac{1}{2}} - 1\right)\frac{dw_0(x_i-0)}{dx}\delta''_-(x-x_i)\right], \tag{15}$$

де $w_0 = \dfrac{w}{R}$; $H_i = \dfrac{h_i}{h_{i+1}}$.

Розв’язок рівняння (15), обмежений при $|x| \to \infty$, знайдений за допомогою інтегрального перетворення Фур’є, має вигляд

$$w_0 = \frac{P}{2E}\left\{\frac{R}{h(x)} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(H_i^{\frac{3}{2}} - 1\right)W_i^{(3)}f_{0i}(x) - \left(H_i^2 - 1\right)W_i^{(2)}f_{1i}(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(H_i^{-\frac{1}{2}} - 1\right)W_i^{(1)}f_{2i}(x) - \frac{R}{2}\left(\frac{1}{h_{i+1}} - \frac{1}{h_i}\right)f_{3i}(x)\right]\right\}. \tag{16}$$

Тут

$$W_i^{(k)} = \frac{E}{2P}\frac{d^k w_0(x_i-0)}{dx^k};\ f_{0i}(x) = e^{-|x-x_i|}\left[\cos(x-x_i) + \sin|x-x_i|\right];\ f_{1i}(x) = e^{-|x-x_i|}\sin(x-x_i);$$

$$f_{2i}(x) = e^{-|x-x_i|}\left[\cos(x-x_i) - \sin|x-x_i|\right];\ f_{3i}(x) = e^{-|x-x_i|}\cos(x-x_i)\operatorname{sgn}(x-x_i).$$

При цьому величини $W_i^{(k)}$ $\left(i = \overline{1,\, n};\ k = \overline{1,\, 3}\right)$ визначаються із системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(H_j^{\frac{3}{2}} - 1\right)f_{1j}(x_i)W_j^{(3)} + \left(H_j^2 - 1\right)f_{2j}(x_i)W_j^{(2)} - \right.$$

$$\left. - 2\left[\left(H_j^{-\frac{1}{2}} - 1\right)f_{3j}(x_i-0) - 2\delta_i^j\right]W_j^{(1)}\right\} = \frac{R}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{h_{j+1}} - \frac{1}{h_j}\right)f_{0j}(x_i),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(H_j^{\frac{3}{2}} - 1\right)f_{2j}(x_i)W_j^{(3)} - 2\left[\left(H_j^2 - 1\right)f_{3j}(x_i-0) - 2\delta_i^j\right]W_j^{(2)} + \right.$$

$$\left. + 2\left(H_j^{-\frac{1}{2}} - 1\right)f_{0j}(x_i)W_j^{(1)}\right\} = -R\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{h_{j+1}} - \frac{1}{h_j}\right)f_{1j}(x_i),$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\left(H_j^{\frac{3}{2}} - 1\right)f_{3j}(x_i-0) - 2\delta_i^j\right]W_j^{(3)} - \left(H_j^2 - 1\right)f_{0j}(x_i)W_j^{(2)} + \right.$$

$$\left. + 2\left(H_j^{-\frac{1}{2}} - 1\right)f_{1j}(x_i)W_j^{(1)}\right\} = \frac{R}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{h_{j+1}} - \frac{1}{h_j}\right)f_{2j}(x_i),$$

де $\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$

Приклад. Розглянемо випадок, коли $n = 2$, $h_1 = h_3 = h_*$, $h_2 = h_{**} < h_*$, $-z_1 = z_2 = l > 0$ $\left(x_1 = -\dfrac{l}{a_1},\ x_2 = \dfrac{2l}{a_2} - \dfrac{l}{a_1} \right)$. Числові дослідження проведені при $R = 510$ мм; $h_* = 7$ мм; $\nu = 0.3$ та різних значеннях величин h_{**} і l. Показано, що кільцеві напруження значно вищі, ніж осьові напруження. Кільцеві напруження мають максимальні значення $\sigma_{2\max}$ на зовнішній поверхні оболонки. Деякі значення $\sigma_{2\max}/(10P)$ наведено у табл. 1.

Таблиця 1. Значення $\sigma_{2\max}/(10P)$

l, мм\ h_{**}, мм	4.5	5.0	5.5
50	5.30	4.85	4.47
75	5.71	5.14	4.66
100	5.88	5.25	4.74

Висновки. Із отриманих даних бачимо, що зі збільшенням параметра h_{**} напружений стан оболонки зменшується, а зі зростанням l (при порівняно невеликих значеннях l) – збільшується. Напруження мають максимальні значення в околах зміни товщини оболонки. Кільцеві напруження значно вищі, ніж осьові напруження. Кільцеві напруження мають максимальні значення на зовнішній поверхні оболонки.

Список використаної літератури

1. Ворович, И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек [Текст] / И.И. Ворович // Механика твердого тела. – М.: Наука, 1966. – С. 116–136.
2. Гольденвейзер, А.Л. Методы обоснования и уточнения теории оболочек [Текст] / А.Л. Гольденвейзер // Прикл. математика и механика. – 1968. – 32, № 4. – С. 684–695.
3. Григоренко, Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках [Текст] / Я.М. Григоренко // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 6. – С. 3–39.
4. Григоренко, Я.М. Решение задач и анализ напряженно-деформированного состояния анизотропных неоднородных оболочек (обзор) [Текст] / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Прикл. механика. – 1997. – 33, № 11. – С. 3–37.
5. Савула, Я.Г. Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями [Текст] / Я.Г. Савула, Н.П. Флейшман. – Львов: Изд-во Львовского университета, 1989. – 172 с.
6. Бурак, Я.Й. Застосування варіаційно-моментного підходу до задач теорії пружності товстостінних оболонок [Текст] / Я.Й. Бурак, Ю.Д. Зозуляк, Ю.М. Гнатів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 1. – С. 42–45.
7. Коляно, Ю.М. Температурные напряжения от объемных источников [Текст] / Ю.М. Коляно, А.Н. Кулик. – К.: Наукова думка, 1983. – 288 с.
8. Подстригач, Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры [Текст] / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
9. Григолюк, Э.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин [Текст] / Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак. – К.: Наукова думка, 1979. – 364 с.
10. Лазарян, В.А. Обобщенные функции в задачах механики [Текст] / В.А. Лазарян, С.И. Конашенко. – К.: Наукова думка, 1974. – 190 с.

Отримано 02.09.2011