

УДК 519.63.4.001.57+517.54

А. Бомба, докт. техн. наук; В. Гаврилюк, А. Теробус

Рівненський державний гуманітарний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

Резюме. Метод числового розв'язання просторових модельних нелінійних крайових задач фільтрації на просторові квазіконформні відображення модифіковано для випадку, коли однією з ділянок границі області є невідома (вільна) поверхня. А саме, для випадку ґрунтової греблі за умови наявності проміжку типу «височування» та наявності води в нижньому б'єфі.

Ключові слова: вільна межа, ґрунтова гребля, просторове квазіконформне відображення.

A. Bomba, V. Gavryluk, A. Terebus

NONLINEAR FILTRATION PROCESSES MATHEMATICAL MODELING IN FREE BOUNDARY SPATIAL MEDIUMS

The summary. A method for numerical solution of spatial model nonlinear boundary-value filtration problems on spatial quasiconformal mappings is modified for the case, when one of boundary section is unknown (free) surface, notably for the case of soil dam in condition of gap with sop existence and tail-water existence.

Key words: free boundary, soil dam, spatial quasiconformal mapping.

Постановка проблеми. Захист територій і населених пунктів від затоплення і підтоплення ґрунтовими водами в результаті їх різкого підйому, регулювання водозаборів і рниження рівня підземних вод є надзвичайно актуальними завданнями сьогодення. Справді, досить згадати лише шкоду, заподіяну катастрофічними повеннями, що за останні десятиліття штурмом пройшли територією Українських Карпат. Відбулися змиви ґрунтів, руйнування загороджувальних дамб, гребель тощо. Важливе місце при моделюванні відповідних процесів у плоских областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, та числовому розв'язуванні відповідних нелінійних крайових задач займає метод конформних і квазіконформних відображень (див., напр., [1, 2]). При моделюванні ж реальних фізичних фільтраційних процесів методів побудови плоских динамічних сіток потенціальних і квазіпотенціальних полів часто буває недостатньо, адже течію в природних просторових областях не завжди можна розглядати як рух уздовж заданих плоскопаралельних прошарків. Це, зокрема, стосується й математичного моделювання фільтраційних процесів у деяких видах гребель (зокрема, арочні греблі, греблі у водоймах з нерівним дном тощо). В таких умовах узагальнення на простір методів конформних та квазіконформних відображень є надзвичайно актуальним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [3–6] для побудови динамічних сіток потенціальних і квазіпотенціальних полів, розрахунку різного виду профілів з одночасним знаходженням інших характеристик (витрат, величин перетоків тощо) розроблено метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень), де під терміном “обернення” розуміється, по-перше, перехід від конформного відображення фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу G_ω до більш вигідного оберненого відображення $G_\omega \rightarrow G_z$; по-друге, те, що

задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_\omega$ ($G_\omega \rightarrow G_z$) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про її розв'язок, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, граничні умови). Розроблену методика застосовано до розв'язування важливих та актуальних задач фільтрації в ґрунтових греблях, зокрема, у роботах [3, 4] за умов урахування зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища, а в [5] розглядається випадок її поєднання разом з методом фіктивних областей для випадку наявності проміжку типу «височування».

У роботі [7] на основі теорії побудови конформних сіток на просторових поверхнях та методики Голубевої О. В. [8], а в роботі [9] з використанням теорії В. О. Толпаєва [10] розв'язано задачу моделювання ідеальної (квазіідеальної) течії у просторово викривленому пласті, обмеженому екіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії. А в [11] для розв'язання такого виду задач в областях складнішої геометричної конфігурації було розроблено метод, що дозволяє безпосередньо розв'язувати просторові задачі, без зведення їх до плоских.

Метою роботи є модифікація методу числового розв'язання просторових модельних нелінійних крайових задач фільтрації на просторові квазіконформні відображення для випадку, коли однією з ділянок границі області є невідома (вільна) поверхня, а саме, для випадку ґрунтової греблі на непроникній основі за умови наявності проміжку типу «височування» та наявності води в нижньому б'єфі.

Постановка задачі. Розглянемо процес фільтрації в ґрунтовій греблі на непроникній основі. Відповідну фізичну область фільтрації G_τ $\tau = (x, y, z)$ зображено на рис. 1, де

$ABA^*B^* = \{\tau: z = F_*(x, y)\}$, $SDD^*S^* = \{\tau: z = F^*(x, y)\}$,
 $ABCD = \{\tau: G_*(x, y, z) = 0\}$, $A^*B^*C^*D^* = \{\tau: G^*(x, y, z) = 0\}$, $C_1CC^*C_1^* = \{\tau: z = h_*$,
 $x_1 \leq x \leq x_*$, $y_1 = f(x_1) \leq y \leq f(x_*) = y_*$, $DAA^*D^* = \{\tau: z = H_*(x, y)\}$, $BC_0CC^*C_0^*B^*$ – вільна (невідома) поверхня (поверхня депресії); $C_0C_1C_1^*C_0^*$ – проміжок височування; ADD^*A^* – непроникна основа греблі; H_Γ та H , h_* – відповідно висота греблі та напори на ній; $C_0C_1CC^*C_1^*C_0^*$ – фіктивна ділянка розглядуваної області фільтрації; (x_*, y_*) – шукані координати точок CC^* .

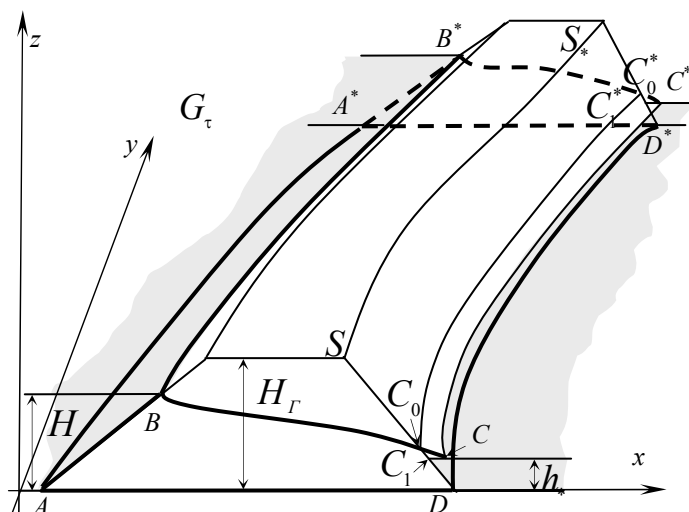


Рисунок 1. Схема області фільтрації

Процес фільтрації рідини описуватимемо рівнянням руху $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } h$ (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$ [1–5], де $\vec{v} = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ – швидкість фільтрації; $\kappa = \kappa(x, y, z)$ – обмежена неперервно-диференційована в області G_τ функція, що характеризує провідність середовища; $h = h(x, y, z)$ – напір у точці (x, y, z) , $h|_{BC_0CC^*C_0^*B^*} = h|_{BC_0C_1C_1^*C_0^*B^*} = z$; $\varphi = 1 - \frac{h - h_*}{H - h_*}$ – потенціал поля, такий, що $\varphi|_{ABA^*B^*} = 0$, $\varphi|_{C_1CDD^*C^*C_1^*} = 1$, $\frac{d\varphi}{dn}|_{BCC^*B^*} = \frac{d\varphi}{dn}|_{DAA^*D^*} = \frac{d\varphi}{dn}|_{ABCD} = \frac{d\varphi}{dn}|_{A^*B^*C^*D^*} = 0$; n – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області.

Задача на квазіконформне відображення $\omega = \omega(\tau) = (\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z))$ розглядуваної області G_τ на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega : 0 < \varphi < 1, 0 < \psi < Q_0, 0 < \chi < Q^0\}$ ($\psi = \psi(x, y, z)$, $\chi = \chi(x, y, z)$ – функції течії просторово квазікомплексно спряжені до $\varphi = \varphi(x, y, z)$) з невідомим параметром – повною питомою витратою $Q = Q^0 Q_0 = \iint_{(S)} \kappa(x, y, z, \varphi, \psi, \chi) \text{grad } \varphi \cdot \vec{n} dS$ матиме вигляд [11]

$$\begin{cases} \kappa \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi, \\ \text{grad } \psi \cdot \text{grad } \chi = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_*A_*} = 0, \quad \varphi|_{DCC_1C_1^*C_*D_*} = 1, \quad \psi|_{ADD_*A_*} = 0, \\ \psi|_{BCC_*B_*} = Q_0, \quad \chi|_{ADCB} = 0, \quad \chi|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^0. \end{cases} \quad (2)$$

Зауважимо, що хоч параметри Q_0 та Q^0 є невідомими, та знаходження їх значень у процесі розв’язку є непринциповим, тому визначатимемо лише потік через довільний переріз течії Q , а його перерозподіл уздовж горизонтального Q_0 та вертикального Q^0 одиничних прошарків здійснюватимемо умовно.

Відповідну (1)–(2) обернену задачу [4, 11] на відшукування просторового квазіконформного відображення $G_\omega \rightarrow G_\tau$ сформулюємо у такому вигляді:

$$\begin{cases} x_\varphi = \kappa(y_\psi z_\chi - z_\psi y_\chi), & \kappa x_\psi \cdot X^{-2} = y_\chi z_\varphi - z_\chi y_\varphi, & \kappa x_\chi \cdot \Psi^{-2} = y_\varphi z_\psi - z_\varphi y_\psi, \\ y_\varphi = \kappa(z_\psi x_\chi - x_\psi z_\chi), & \kappa y_\psi \cdot X^{-2} = z_\chi x_\varphi - x_\chi z_\varphi, & \kappa y_\chi \cdot \Psi^{-2} = z_\varphi x_\psi - x_\varphi z_\psi, \\ z_\varphi = \kappa(x_\psi y_\chi - y_\psi x_\chi); & \kappa z_\psi \cdot X^{-2} = x_\chi y_\varphi - y_\chi x_\varphi; & \kappa z_\chi \cdot \Psi^{-2} = x_\varphi y_\psi - y_\varphi x_\psi; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z(0, \psi, \chi) &= F_*(x(0, \psi, \chi), y(0, \psi, \chi)), & 0 \leq \psi \leq Q_0, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(1, \psi, \chi) &= F^*(x(1, \psi, \chi), y(1, \psi, \chi)), & 0 \leq \psi \leq Q_1, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(1, \psi, \chi) &= h_*, & Q_1 \leq \psi \leq Q_0, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(\varphi, Q_0, \chi) &= h_* + (1 - \varphi) \cdot (H - h_*), & 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(\varphi, 0, \chi) &= H_*(x(\varphi, 0, \chi), y(\varphi, 0, \chi)) & 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ G_*(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) &= 0 & 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \psi \leq Q_0, \\ G^*(x(\varphi, \psi, Q^0), y(\varphi, \psi, Q^0), z(\varphi, \psi, Q^0)) &= 0 & 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \psi \leq Q_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій $x = x(\varphi, \psi, \chi)$, $y = y(\varphi, \psi, \chi)$, $z = z(\varphi, \psi, \chi)$ у дивергентній формі мають вигляд

$$\begin{cases} (\kappa^{-1}x_\varphi)_\varphi + (\kappa X^{-2}x_\psi)_\psi + (\kappa\Psi^{-2}x_\chi)_\chi = 0, \\ (\kappa^{-1}y_\varphi)_\varphi + (\kappa X^{-2}y_\psi)_\psi + (\kappa\Psi^{-2}y_\chi)_\chi = 0, \\ (\kappa^{-1}z_\varphi)_\varphi + (\kappa X^{-2}z_\psi)_\psi + (\kappa\Psi^{-2}z_\chi)_\chi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $X = X(\varphi, \psi, \chi) = J^{-1} \sqrt{(y_\varphi z_\psi - z_\varphi y_\psi)^2 + (z_\varphi x_\psi - x_\varphi z_\psi)^2 + (x_\varphi y_\psi - y_\varphi x_\psi)^2}$, $\Psi = \Psi(\varphi, \psi, \chi) = J^{-1} \sqrt{(y_\chi z_\varphi - z_\chi y_\varphi)^2 + (z_\chi x_\varphi - x_\chi z_\varphi)^2 + (x_\chi y_\varphi - y_\chi x_\varphi)^2}$, $J = \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, \chi)}$ – якобіан

переходу.

Різницевий аналог. Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов "квазіконформної подібності в малому" відповідних чотирикутників, у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j, \chi_k) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n}; \quad \chi_k = \Delta\chi \cdot k, \quad k = \overline{0, l}; \Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*) / m, \quad \Delta\psi = Q_0 / n, \quad \Delta\chi = Q^0 / l, \quad \gamma = \Delta\varphi / (\Delta\psi \cdot \Delta\chi), \quad m, n, l \in \mathbf{N}\}$ запишемо у вигляді [11]

$$\begin{aligned} x_{i,j,k} &= \frac{2}{4\kappa_{i,j,k}^{-1} + \gamma^2 \kappa_{i,j,k}} \left(A_{i,j,k}^{-1} + B_{i,j,k}^{-1} \right) \left(\frac{1}{\kappa_{i,j,k}} (x_{i-1,j,k} + x_{i+1,j,k}) \right) + \\ &\frac{\gamma^2 \kappa_{i,j,k}}{4A_{i,j,k}} (x_{i,j-1,k} + x_{i,j+1,k}) + \frac{\gamma^2 \kappa_{i,j,k}}{4B_{i,j,k}} (x_{i,j,k-1} + x_{i,j,k+1}) - \frac{\kappa_{\varphi i,j,k}}{2\kappa_{i,j,k}^2} (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \\ &- \frac{\gamma^2 C_{i,j,k} \kappa_{i,j,k}}{2A_{i,j,k}^2} (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) + \frac{\gamma^2 \kappa_{\psi i,j,k}}{2A_{i,j,k}^2} (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) - \left| D_1^{(p+1)} / D_2^{(p+1)} - 1 \right| < \varepsilon \\ D_4 &= \frac{1}{mnl} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,l} \rho(\tau_{i-1,j,k}, \tau_{i,j-1,k-1}) \\ \frac{\gamma^2 \kappa_{i,j,k}}{4A_{i,j,k}} (y_{i,j-1,k} + y_{i,j+1,k}) &+ \frac{\gamma^2 \kappa_{i,j,k}}{4B_{i,j,k}} (y_{i,j,k-1} + y_{i,j,k+1}) - \frac{\kappa_{\varphi i,j,k}}{2\kappa_{i,j,k}^2} (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \\ &- \frac{\gamma^2 C_{i,j,k} \kappa_{i,j,k}}{2A_{i,j,k}^2} (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) + \frac{\gamma^2 \kappa_{\psi i,j,k}}{2A_{i,j,k}^2} (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) - \\ &- \frac{\gamma^2 D_{i,j,k} \kappa_{i,j,k}}{2B_{i,j,k}^2} (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) + \frac{\gamma^2 \kappa_{\chi i,j,k}}{2B_{i,j,k}^2} (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \Big), \\ z_{i,j,k} &= \frac{2}{4\kappa_{i,j,k}^{-1} + \gamma^2 \kappa_{i,j,k}} \left(A_{i,j,k}^{-1} + B_{i,j,k}^{-1} \right) \left(\frac{1}{\kappa_{i,j,k}} (z_{i-1,j,k} + z_{i+1,j,k}) \right) + \\ &+ \frac{\gamma^2 \kappa_{i,j,k}}{4A_{i,j,k}} (z_{i,j-1,k} + z_{i,j+1,k}) + \frac{\gamma^2 \kappa_{i,j,k}}{4B_{i,j,k}} (z_{i,j,k-1} + z_{i,j,k+1}) - \frac{\kappa_{\varphi i,j,k}}{2\kappa_{i,j,k}^2} (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \\ &- \frac{\gamma^2 C_{i,j,k} \kappa_{i,j,k}}{2A_{i,j,k}^2} (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + \frac{\gamma^2 \kappa_{\psi i,j,k}}{2A_{i,j,k}^2} (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \end{aligned}$$

$$-\frac{\gamma^2 D_{i,j,k} \kappa_{i,j,k}}{2B_{i,j,k}^2} (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + \frac{\gamma^2 \kappa_{i,j,k}}{2B_{i,j,k}^2} (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \Bigg), \quad (6)$$

де $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{1, l-1}$,

$$\begin{aligned} A_{i,j,k} &= \left\{ \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right)^2 + \right. \\ &+ \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right)^2 + \\ &+ \left. \left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) + (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right)^2 \right\} J_{i,j,k}^{-2}, \\ B_{i,j,k} &= \left\{ \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right)^2 + \right. \\ &+ \left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \right)^2 + \\ &+ \left. \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \right)^2 \right\} J_{i,j,k}^{-2}, \\ C_{i,j,k} &= J_{i,j,k}^{-3} \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \cdot \right. \\ &\cdot (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \Bigg) \left\{ J_{i,j,k} \left(0.25(y_{i+1,j+1,k} - y_{i-1,j+1,k} - y_{i+1,j-1,k} + y_{i-1,j-1,k}) \cdot \right. \right. \\ &\cdot (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - 2z_{i,j,k} + z_{i,j-1,k}) - \\ &- (y_{i,j+1,k} - 2y_{i,j,k} + y_{i,j-1,k})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - 0.25(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \cdot \\ &\cdot (z_{i+1,j+1,k} - z_{i-1,j+1,k} - z_{i+1,j-1,k} + z_{i-1,j-1,k}) - \left. \left. (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \cdot \right. \right. \\ &\cdot (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \Bigg) J_{\psi i,j,k} \Bigg\} + \\ &+ J_{i,j,k}^{-3} \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \cdot \right. \\ &\cdot (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \Bigg) \left\{ J_{i,j,k} \left(0.25(z_{i+1,j+1,k} - z_{i-1,j+1,k} - z_{i+1,j-1,k} + z_{i-1,j-1,k}) \cdot \right. \right. \\ &\cdot (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) + (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(x_{i,j+1,k} - 2x_{i,j,k} + x_{i,j-1,k}) - \\ &- (z_{i,j+1,k} - 2z_{i,j,k} + z_{i,j-1,k})(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - 0.25(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \cdot \\ &\cdot (x_{i+1,j+1,k} - x_{i-1,j+1,k} - x_{i+1,j-1,k} + x_{i-1,j-1,k}) - \left. \left. (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \cdot \right. \right. \\ &\cdot (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \Bigg) J_{\psi i,j,k} \Bigg\} + \\ &+ J_{i,j,k}^{-3} \left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \cdot \right. \\ &\cdot (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) \Bigg) \left\{ J_{i,j,k} \left(0.25(x_{i+1,j+1,k} - x_{i-1,j+1,k} - x_{i+1,j-1,k} + x_{i-1,j-1,k}) \cdot \right. \right. \\ &\cdot (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) + (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - 2y_{i,j,k} + y_{i,j-1,k}) - \\ &- (x_{i,j+1,k} - 2x_{i,j,k} + x_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - 0.25(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) \cdot \\ &\cdot (y_{i+1,j+1,k} - y_{i-1,j+1,k} - y_{i+1,j-1,k} + y_{i-1,j-1,k}) - \left. \left. (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \cdot \right. \right. \\ &\cdot (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) \Bigg) J_{\psi i,j,k} \Bigg\}, \\ D_{i,j,k} &= J_{i,j,k}^{-3} \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \cdot \right. \\ &\cdot (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \Bigg) \left\{ J_{i,j,k} \left(0.25(z_{i+1,j,k+1} - z_{i-1,j,k+1} - z_{i+1,j,k-1} + z_{i-1,j,k-1}) \cdot \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) + (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - 2y_{i,j,k} + y_{i,j,k-1}) - \\
 & - (z_{i,j,k+1} - 2z_{i,j,k} + z_{i,j,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - 0.25(z_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i+1,j,k+1} - y_{i-1,j,k+1} - y_{i+1,j,k-1} + y_{i-1,j,k-1}) - ((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})) J_{\chi i,j,k} \} + \\
 & + J_{i,j,k}^{-3} \left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \right. \\
 & \cdot (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \left. \right) \left\{ J_{i,j,k} \left(0.25(x_{i+1,j,k+1} - x_{i-1,j,k+1} - x_{i+1,j,k-1} + x_{i-1,j,k-1}) \cdot \right. \right. \\
 & \quad (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - 2z_{i,j,k} + z_{i,j,k-1}) - \\
 & - (x_{i,j,k+1} - 2x_{i,j,k} + x_{i,j,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - 0.25(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \quad \cdot (z_{i+1,j+1,k} - z_{i-1,j+1,k} - z_{i+1,j-1,k} + z_{i-1,j-1,k}) \left. \right) - ((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \cdot \\
 & \quad \cdot (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})) J_{\chi i,j,k} \} + \\
 & \quad J_{i,j,k}^{-3} \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \cdot \right. \\
 & \cdot (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \left. \right) \left\{ J_{i,j,k} \left(0.25(y_{i+1,j,k+1} - y_{i-1,j,k+1} - y_{i+1,j,k-1} + y_{i-1,j,k-1}) \cdot \right. \right. \\
 & \quad \cdot (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) + (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(x_{i,j,k+1} - 2x_{i,j,k} + x_{i,j,k-1}) - \\
 & - (y_{i,j,k+1} - 2y_{i,j,k} + y_{i,j,k-1})(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - 0.25(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \quad \cdot (x_{i+1,j,k+1} - x_{i-1,j,k+1} - x_{i+1,j,k-1} + x_{i-1,j,k-1}) \left. \right) \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \cdot \right. \\
 & \quad \cdot (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \left. \right) J_{\chi i,j,k} \}, \\
 J_{i,j,k} = & (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) + (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - \\
 & - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \\
 & - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}), \\
 J_{\psi i,j,k} = & 0.25(x_{i+1,j+1,k} - x_{i-1,j-1,k} - x_{i-1,j+1,k} + x_{i-1,j-1,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - 2y_{i,j,k} + y_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + 0.25(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j-1,k+1} - z_{i,j+1,k-1} + z_{i,j-1,k-1}) + 0.25(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j-1,k} - y_{i-1,j+1,k} + y_{i-1,j-1,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + \\
 & + (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - 2z_{i,j,k} + z_{i,j-1,k}) + \\
 & + 0.25(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j-1,k+1} - x_{i,j+1,k-1} + x_{i,j-1,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + 0.25(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i+1,j+1,k} - z_{i-1,j+1,k} - z_{i+1,j-1,k} - z_{i-1,j-1,k}) + (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \cdot \\
 & \cdot (x_{i,j+1,k} - 2x_{i,j,k} + x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) + 0.25(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k-1} - y_{i,j-1,k+1} + y_{i,j-1,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \\
 & -0.25(z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j-1,k} - z_{i-1,j+1,k} + z_{i-1,j-1,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - 2y_{i,j,k} + y_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - 0.25(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k-1} - x_{i,j-1,k+1} + x_{i,j-1,k-1}) - 0.25(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j-1,k} - y_{i-1,j+1,k} + y_{i-1,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \\
 & - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(x_{i,j+1,k} - 2x_{i,j,k} + x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \\
 & - 0.25(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k-1} - z_{i,j-1,k+1} + z_{i,j,k}) - \\
 & - 0.25(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j-1,k} - x_{i-1,j+1,k} + x_{i-1,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \\
 & - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - 2z_{i,j,k} + z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \\
 & - 0.25(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j-1,k+1} - y_{i,j+1,k-1} + y_{i,j-1,k-1}), \\
 J_{\chi i,j,k} = & 0.25(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k-1} - x_{i-1,j,k+1} + x_{i-1,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - 2z_{i,j,k} + z_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) + 0.25(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j-1,k+1} - y_{i,j+1,k-1} + y_{i,j-1,k-1}) + 0.25(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k-1} - y_{i-1,j,k+1} + y_{i-1,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + \\
 & + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(x_{i,j,k+1} - 2x_{i,j,k} + x_{i,j,k-1}) + \\
 & + 0.25(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j-1,k+1} - z_{i,j+1,k-1} + z_{i,j-1,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) + 0.25(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (z_{i+1,j,k+1} - z_{i-1,j,k+1} - z_{i+1,j,k-1} - z_{i-1,j,k-1}) + (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i,j,k+1} - 2y_{i,j,k} + y_{i,j,k-1})(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) + 0.25(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) \cdot \\
 & \cdot (x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k-1} - x_{i,j-1,k+1} + x_{i,j-1,k-1})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \\
 & - 0.25(z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k-1} - z_{i-1,j,k+1} + z_{i-1,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(x_{i,j,k+1} - 2x_{i,j,k} + x_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) - 0.25(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k-1} - y_{i,j-1,k+1} + y_{i,j-1,k-1}) - 0.25(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) \cdot \\
 & \cdot (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k-1} - y_{i-1,j,k+1} + y_{i-1,j,k-1})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \\
 & - (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - 2z_{i,j,k} + z_{i,j,k-1})(x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) - \\
 & - 0.25(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k-1} - x_{i,j-1,k+1} + x_{i,j,k}) - \\
 & - 0.25(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k-1} - x_{i-1,j,k+1} + x_{i-1,j,k-1})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \\
 & - (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - 2y_{i,j,k} + y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \\
 & - 0.25(x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j-1,k+1} - z_{i,j+1,k-1} + z_{i,j-1,k-1}), \\
 \kappa_{\varphi i,j,k} = & \kappa_{x i,j,k} \frac{x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}}{2} + \kappa_{y i,j,k} \frac{y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}}{2} + \kappa_{z i,j,k} \frac{z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\psi i,j,k} &= \kappa_{x i,j,k} \frac{x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}}{2} + \kappa_{y i,j,k} \frac{y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}}{2} + \kappa_{z i,j,k} \frac{z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}}{2}, \\
 \kappa_{\chi i,j,k} &= \kappa_{x i,j,k} \frac{x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}}{2} + \kappa_{y i,j,k} \frac{y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}}{2} + \kappa_{z i,j,k} \frac{z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}}{2}; \\
 z_{0,j,k} &= F_*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}), \quad j=\overline{0,n}, k=\overline{0,l}, \\
 z_{m,j,k} &= F^*(x_{m,j,k}, y_{m,j,k}), \quad j=\overline{0,n_0}, k=\overline{0,l}, \\
 z_{m,j,k} &= h_*, \quad j=\overline{n_0,n}, k=\overline{0,l}, \\
 z_{i,n,k} &= h_* + (1 - \varphi_i) \cdot (H - h_*), \quad i=\overline{0,m}, k=\overline{0,l}, \\
 z_{i,0,k} &= H_*(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}) \quad i=\overline{0,m}, k=\overline{0,l}, \\
 G_*(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) &= 0 \quad i=\overline{0,m}, j=\overline{0,n}, \\
 G^*(x_{i,j,l}, y_{i,j,l}, z_{i,j,l}) &= 0 \quad i=\overline{0,m}, j=\overline{0,n};
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{F'_{*x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} &= \frac{F'_{*y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{-1}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \quad j=\overline{0,n}, k=\overline{0,l}, \\
 \frac{F''_{*x}(x_{m,j,k}, y_{m,j,k}, z_{m,j,k})}{x_{m,j,k} - x_{m-1,j,k}} &= \frac{F''_{*y}(x_{m,j,k}, y_{m,j,k}, z_{m,j,k})}{y_{m,j,k} - y_{m-1,j,k}} = \frac{-1}{z_{m,j,k} - z_{m-1,j,k}}, \quad j=\overline{0,n_0}, k=\overline{0,l}, \\
 z_{m,j,k} &= z_{m-1,j,k}, \quad j=\overline{n_0,n}, k=\overline{0,l},
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{H'_{*x}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{x_{i,1,k} - x_{i,0,k}} &= \frac{H'_{*y}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k})}{y_{i,1,k} - y_{i,0,k}} = \frac{-1}{z_{i,1,k} - z_{i,0,k}}, \\
 z_{i,n,k} &= z_{i,n-1,k}, \quad j=\overline{n_0,n}, k=\overline{0,l},
 \end{aligned}$$

$$\frac{H'_{*x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} = \frac{H'_{*y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{H'_{*z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}},$$

$$\frac{H''_{*x}(x_{i,j,l}, y_{i,j,l}, z_{i,j,l})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l-1}} = \frac{H''_{*y}(x_{i,j,l}, y_{i,j,l}, z_{i,j,l})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l-1}} = \frac{H''_{*z}(x_{i,j,l}, y_{i,j,l}, z_{i,j,l})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l-1}}, \quad i=\overline{0,m}, j=\overline{0,n};$$

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{4}{mnl\kappa_{i,j,k}} \sum_{i,j,k=0}^{m-1,n-1,l-1} \left(\rho(\tau_{i+1,j,k}, \tau_{i,j,k}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k}, \tau_{i,j+1,k}) + \rho(\tau_{i+1,j,k+1}, \tau_{i,j,k+1}) \right) \\
 &\quad + \rho(\tau_{i+1,j+1,k+1}, \tau_{i,j+1,k+1}) \left(\rho(\tau_{i,j+1,k}, \tau_{i,j,k}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k}, \tau_{i+1,j,k}) + \right. \\
 &\quad \left. + \rho(\tau_{i,j+1,k+1}, \tau_{i,j,k+1}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k+1}, \tau_{i+1,j,k+1}) \right)^{-1} \left(\rho(\tau_{i,j,k+1}, \tau_{i,j,k}) + \right. \\
 &\quad \left. + \rho(\tau_{i+1,j,k+1}, \tau_{i+1,j,k}) + \rho(\tau_{i,j+1,k+1}, \tau_{i,j+1,k}) + \rho(\tau_{i+1,j+1,k+1}, \tau_{i+1,j+1,k}) \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Тут, і надалі: $\rho(\tau_{i,j,k}, \tau_{i,j,k}) = ((x_{i,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k} - z_{i,j,k})^2)$, $\kappa_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$. При цьому, значення невідомої витрати обчислюємо за формулою $Q = \Delta\varphi nl / \gamma$.

Алгоритм числового розв'язання. Розв'язок різницевої задачі (6)–(9) побудуємо наступним чином (див., зокрема, [5,11]). Задаємо кількості m , n та l вузлів розбиття

сіткової області G_ω , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі. Задаємо початкові наближення ряду величин. А саме: початкові наближення координат граничних вузлів $(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)})$, $(x_{i,n,k}^{(0)}, y_{i,n,k}^{(0)}, z_{i,n,k}^{(0)})$, $(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)})$, $(x_{i,j,l}^{(0)}, y_{i,j,l}^{(0)}, z_{i,j,l}^{(0)})$, $(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)})$, $(x_{m,j,k}^{(0)}, y_{m,j,k}^{(0)}, z_{m,j,k}^{(0)})$, $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$, $k = \overline{0, l}$ (так, щоб виконувались рівності (7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)})$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{1, l-1}$, наприклад, як середні пропорційні координат відповідних граничних вузлів. Задавання початкового наближення конформного інваріанта γ проведемо за формулою (9), в якій використаємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)})$. Далі проводимо уточнення: внутрішніх вузлів $(x_{i,j,k}^{(k+1)}, y_{i,j,k}^{(k+1)}, z_{i,j,k}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації) з допомогою ітераційного методу Зейделя [12] за формулами (6) (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу й економії машинного часу та на основі ідей методу блочної ітерації [13] використаємо лише перший ітераційний крок); величини γ та витрати Q за формулою (9); координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (7), (8). Далі перевіряємо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами

$$\left| \gamma^{(p+1)} - \gamma^{(p)} \right| < \varepsilon, \quad \max_{\tau_{i,j,k} \in \partial G_\tau} \left(\left| x_{i,j,k}^{(p+1)} - x_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(p+1)} - y_{i,j,k}^{(p)} \right|, \left| z_{i,j,k}^{(p+1)} - z_{i,j,k}^{(p)} \right| \right) < \varepsilon, \\ \left| D_1^{(p+1)} / D_2^{(p+1)} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| D_1^{(p+1)} / D_3^{(p+1)} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| D_1^{(p+1)} / D_4^{(p+1)} - 1 \right| < \varepsilon, \quad (10)$$

де

$$D_1 = \frac{1}{mnl} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,l} \rho(\tau_{i,j,k}, \tau_{i-1,j-1,k-1}), \quad D_2 = \frac{1}{mnl} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,l} \rho(\tau_{i,j,k-1}, \tau_{i-1,j-1,k}), \\ D_3 = \frac{1}{mnl} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,l} \rho(\tau_{i,j-1,k}, \tau_{i-1,j,k-1}), \quad D_4 = \frac{1}{mnl} \sum_{i,j,k=1}^{m,n,l} \rho(\tau_{i-1,j,k}, \tau_{i,j-1,k-1}).$$

Якщо умови (10) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У протилежному випадку обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки за формулою $\varepsilon_* = |1 - D|$. Її величина характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику дорівнює одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності).

У випадку, якщо не виконується, наприклад, лише одна із умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю ε_* та заданою кількістю кроків розбиття m , n , l (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв'язку (зменшити нев'язку ε_*), то збільшуємо параметри розбиття m , n і l та розв'язуємо різницеву задачу (6)–(9) заново. Оптимальність співвідношення між m і n досягається аналогічно до [5, 11] шляхом оптимізації аналогів функціоналів типу Рімана.

Висновки. Алгоритм числового розв’язання просторових модельних нелінійних крайових задач на просторові квазіконформні відображення [11] модифіковано для випадку, коли однією з ділянок границі області є невідома (вільна) поверхня. При цьому зауважимо, що у випадку відсутності проміжку типу “височування”, тобто коли поверхня $C^*C^*CC^*$ є вільною, задача зводиться до просторового квазіконформного відображення криволінійного паралелепіпеда на прямокутний, що „звільняє” від необхідності побудови фіктивних ділянок області. У перспективі досліджень – узагальнення запропонованої методології на випадки наявності дренажу.

Література

1. Лаврентьев, М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука.–1977. –408 с.
2. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
3. Моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів в ґрунтових греблях [Текст] / А.Я. Бомба, Ж.С. Гутіна, С.С. Каштан, М.М. Хлапук // Вісник Укрнац. ун-ту водн. госп. та природокорист: збірн. наук. праць. – Рівне: НУВГП. – 2004. –Вип. 23(27). – С. 105–112.
4. Бомба, А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки [Текст] / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопецький. – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
5. Бомба, А.Я. Новая методика решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями [Текст] / А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк, В.В. Скопецький // Компьютерная математика. – 2007. – № 1. – С.31–39.
6. Гаврилюк, В.І. Метод фіктивних областей та оптимізація параметрів фільтраційних процесів у криволінійних областях з невизначеними ділянками меж [Текст] / В.І. Гаврилюк // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2010. – Вип. 1. – С. 204–209.
7. Бомба, А.Я. Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів [Текст] / А.Я. Бомба, А.В. Теребус // “Математичне та комп’ютерне моделювання (фізико-математичні науки)”. 2010. – Вип. 4. – С. 31–40.
8. Голубева, О.В. Курс механики сплошных сред [Текст] / О.В. Голубева. – М.: Высшая школа. – 1972. – 367 с.
9. Бомба, А.Я. Моделювання квазіідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів [Текст] / А.Я. Бомба, А.В. Теребус // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – №4. – С. 9–16.
10. Толпаев, В.А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах: автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18 [Текст] / В.А. Толпаев. – Ставрополь. – 2004. – 38 с.
11. Теребус, А.В. Просторові модельні аналоги крайових задач на квазіконформні відображення [Текст] / А.В. Теребус // Волинський математичний вісник. Серія “Прикладна математика”. – 2011. – 8 (17). – С. 192–206.
12. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики [Текст] / Г.И. Марчук. – Киев: Наукова думка, 1980. – 334с.
13. Ортега, Д. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными [Текст] / Д. Ортега, В. Рейнболдт. – Москва: Мир, 1975. – 558с.

Отримано 18.10.2011