Лупенко С., Дем'янчук Н. Структура та статистичне оцінювання ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу із стохастично незалежними циклами // Вісник ТДТУ. – 2009. - Том 14. - №1. – ст.. 145-153. – (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 519.246

С. Лупенко, канд. техн. наук; Н. Дем'янчук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

СТРУКТУРА ТА СТАТИСТИЧНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЙМОВІРНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИКЛІЧНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ІЗ СТОХАСТИЧНО НЕЗАЛЕЖНИМИ ЦИКЛАМИ

У роботі встановлено характерну особливість структури ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу із незалежними циклами. За умови стохастичної незалежності циклів циклічного випадкового процесу, обгрунтовано еквівалентність двох методів його статистичного аналізу, а саме: синфазного методу та методу статистичного усереднення за ансамблем узгоджених між собою циклів циклічного випадкового процесу

Ключові слова: *циклічний випадковий процес, методи статичного аналізу.*

S. Lupenko, N. Demyanchuk

A STRUCTURE AND STATISTICAL ESTIMATION OF STOCHASTIC CHARACTERISTICS OF THE CYCLIC CASUAL PROCESS WITH STOCHASTICALLY INDEPENDENT CYCLES

In the work, a characteristic feature is set of structure of stochastic characteristics of cyclic casual process with independent cycles. On condition of stochastic independence of cycles of cyclic casual process, grounded equivalence of two methods his statistical analysis, namely: synphase method and method of statistical averaging on the set of the cycles of cyclic casual process concerted between itself.

Key words: *cyclic casual process, methods of statistical analysis.*

Вступ. У роботах [1, 2] дано означення та досліджено властивості циклічного випадкового процесу, який є узагальненням стохастично періодичного процесу (періодично розподіленого випадкового процесу) і може використовуватися як математична модель багатьох коливних явищ та сигналів. У задачах імітаційного моделювання та статистичної обробки такого процесу цікавим є випадок, коли цикли випадкового процесу є стохастично незалежними. Такий випадок зустрічається в прикладних задачах статистичного аналізу та імітаційного моделювання реальних сигналів із циклічною структурою, зокрема в задачах імітації кардіосигналів [3-5]. Однак, не дивлячись на широке використання даного способу зображення сигналів, він недостатньо досліджений у теоретичному плані, оскільки не встановлено характерної особливості ймовірнісної структури циклічного випадкового процесу за умови стохастичної незалежності його циклів.

Метою даної роботи є дослідження особливостей структури ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу із стохастично незалежними циклами, що, як буде показано нижче, суттєво спростить обсяг часових та інформаційних ресурсів при проведенні його статистичного аналізу та імітаційного моделювання на ЕОМ.

Основна частина

Нагадаємо означення циклічного випадкового процесу [1, 2].

Означення 1. Сепарабельний випадковий процес $\xi(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{R}$ називається циклічним випадковим процесом неперервного аргументу, якщо існує така функція $T(t,n)$, яка задовольняє умови функції ритму, що скінченновимірні вектори ($\xi(\omega,t_1)$, $\xi(\omega,t_2),...,$ $\xi(\omega,t_k)$) і ($\xi(\omega,t_1+T(t_1,n))$, $\xi(\omega,t_2+T(t_2,n))$),..., $\xi(\omega,t_k+T(t_k,n))$, $n \in \mathbf{Z}$, де $\{t_1,\ t_2,...,t_k\}$ - множина сепарабельності процесу $\xi(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{R}$, при всіх цілих $k\geq 1$ є стохастично еквівалентними у широкому розумінні.

Функція ритму, згідно з доведеною в роботі [6] теоремою, задовольняє такі умови:

a) $T(t,n)>0$, якщо $n>0$ ($T(t,1)<\infty$);

b) $T(t,n)=0$, якщо $n=0$;

c) $T(t,n)<0$, якщо $n<0$, $t\in\mathbf{R}$; (1)

для будь-яких $t_1\in\mathbf{R}$ та $t_2\in\mathbf{R}$, для яких $t_1<t_2$, для функції $T(t,n)$ виконується строга нерівність:

$$T(t_1,n)+t_1<T(t_2,n)+t_2,\ \forall n\in\mathbf{Z}; \tag{2}$$

функція $T(t,n)$ є найменшою за модулем ($\left|T(t,n)\right|\leq\left|T_\gamma(t,n)\right|$) серед усіх таких функцій $\{T_\gamma(t,n),\ \gamma\in\mathbf{\Gamma}\}$, які задовольняють (1) та (2).

Для циклічного випадкового процесу неперервного аргументу сімейство його функцій розподілу задовольняє наступну рівність:

$$F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k)=F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1+T(t_1,n),...,t_k+T(t_k,n)),$$
$$x_1,...,x_k,t_1,...,t_k\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{Z}, k\in\mathbf{N}. \tag{3}$$

Якщо $T(t,n)=n\cdot T, T=const>0$, то будемо мати циклічний випадковий процес із стабільним ритмом, або так званий стохастично T-періодичний процес. Якщо $T(t,n)\neq n\cdot T$, то будемо мати циклічний випадковий процес зі змінним ритмом.

Циклічний випадковий процес $\xi(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{R}$ є упорядкованою множиною ізоморфних відносно порядку та ймовірнісних характеристик циклів, а тому його можна подати у вигляді такого упорядкованого об’єднання:

$$\{(t,\ \xi(\omega,t)),\ t\in\mathbf{R}\}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\{(t,\ \xi_m(\omega,t)),\ t\in\mathbf{W}_{ц_m}\}, \tag{4}$$

де півінтервал $\mathbf{W}_{ц_m}=[t_m,\ t_{m+1})$, що є елементом зліченного розбиття множини дійсних чисел $\mathbf{R}$, є областю визначення m-го циклу циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{R}$; множина $\{\xi_m(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}_{ц_m},\ m\in\mathbf{Z}\}$ є множиною циклів, тобто випадкових процесів, для k-вимірних функцій розподілу $\left\{F_{k_{\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k),(t_1,...,t_k)\in\prod_{j=1}^{k}\mathbf{W}_{ц_{m_j}},\ m_1,...,m_k\in\mathbf{Z}\right\}$ яких має місце така рівність:

$$\begin{gathered}F_{k_{\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)=F_{k_{\xi_{m_1+n}\cdots\xi_{m_k+n}}}(x_1,...,x_k;t_1+T(t_1,n),...,t_k+T(t_k,n)),\\ x_1,...,x_k\in\mathbf{R},(t_1,...,t_k)\in\prod_{j=1}^{k}\mathbf{W}_{ц_{m_j}},\ m_1,...,m_k,\ n\in\mathbf{Z},\end{gathered} \tag{5}$$

що є наслідком циклічності випадкового процесу $\xi(\omega,t)$.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$F_{k_{\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)=F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k),\ (t_1,...,t_k)\in\prod_{j=1}^{k}\mathbf{W}_{ц_{m_j}},\ m_1,...,m_k\in\mathbf{Z}. \tag{6}$$

Якщо $m_1=...=m_k=m$, то k-вимірна функція розподілу $F_{k_{\xi_m\cdots\xi_m}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$ є k-вимірною автофункцією розподілу m-го циклу циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$. У цьому разі вона є заданою на гіперкубі $\mathbf{W}_{ц_m}^k$, що є k-кратним декартовим степенем області визначення $\mathbf{W}_{ц_m}$. Оскільки циклічний випадковий процес $\xi(\omega,t)$

містить зліченну множину циклів, то вся сукупність їх автофункцій розподілу задана на області $\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\mathbf{W}_{ц_m}^k$, що є зліченним об'єднанням гіперкубів $\{\mathbf{W}_{ц_m}^k,\ m\in\mathbf{Z}\}$.

Якщо рівність індексів $m_j,\ j=\overline{1,k}$ не має місця, то k-вимірна функція розподілу $F_{k_{\xi_{m_1}\ldots\xi_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$ є сумісною k-вимірною функцією розподілу між відповідними (m_1-м, m_2-м,…, m_k-м) циклами. Сумісна k-вимірна функція розподілу $F_{k_{\xi_{m_1}\ldots\xi_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$ є заданою на k-кратному декартовому добутку $\prod_{j=1}^{k}\mathbf{W}_{ц_{m_j}}$. Вся множина сумісних k-вимірних функцій розподілу задана на області $\mathbf{R}^k\setminus\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\mathbf{W}_{ц_m}^k$.

Функції розподілу (k-вимірні функції розподілу) $F_{k_\xi}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$ циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ можуть бути записані через функції розподілу його циклів $\{\xi_m(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}_{ц_m},\ m\in\mathbf{Z}\}$, а саме через таке k-кратне упорядковане об'єднання:

$$\{((t_1,...,t_k),\ F_{k_\xi}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)),\ (t_1,...,t_k)\in\mathbf{R}^k\}=$$

$$\bigcup_{m_1\in\mathbf{Z}}{}^{(k)}\bigcup_{m_k\in\mathbf{Z}}\left\{((t_1,...,t_k),\ F_{k_{\xi_{m_1}\ldots\xi_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)),\ (t_1,...,t_k)\in\prod_{j=1}^{k}\mathbf{W}_{ц_{m_j}}\right\}, \tag{7}$$

$$k\in\mathbf{N},\ x_1,...,x_k\in\mathbf{R}.$$

Ймовірнісні характеристики, зокрема k-вимірні функції розподілу $F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k)$ циклічного випадкового процесу, достатньо задавати та оцінювати не на всій часовій області їх визначення $\mathbf{R}^k$, а лише на області $\mathbf{W}_{ц_m}\times\mathbf{R}^{k-1}$, тобто $t_1\in\mathbf{W}_{ц_m},\ t_2,...,t_k\in\mathbf{R}$, а решту значень отримати за відомою функцією ритму $T(t,n)$, а саме:

$$F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1+T(t_1,n),...,t_k+T(t_k,n))=F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k),$$

$$t_1\in\mathbf{W}_{ц_m},\ t_2,...,t_k\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{Z}, \tag{8}$$

тобто, якщо у формулі (8) n пробіжить усі цілі числа, а часові аргументи $t_1\in\mathbf{W}_{ц_m},\ t_2,...,t_k\in\mathbf{R}$, то тим самим задамо k-вимірну функцію розподілу на $\mathbf{R}^k$.

Згідно із роботою [7], циклічний випадковий процес можна подати й у вигляді такої конструкції:

$$\xi(\omega,t)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\tilde{\xi}_m(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}, \tag{9}$$

де $\tilde{\xi}_m(\omega,t)$ - випадковий процес, який визначається так:

$$\tilde{\xi}_m(\omega,t)=\xi(\omega,t)\cdot I_{\mathbf{W}_{ц_m}}(t),\ m\in\mathbf{Z},\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{R}, \tag{10}$$

а функція $I_{\mathbf{W}_{ц_m}}(t)$ є індикаторною функцією m-го циклу, яка рівна:

$$I_{\mathbf{W}_{ц_m}}(t)=\begin{cases}1,\ t\in\mathbf{W}_{ц_m},\\ 0,\ t\notin\mathbf{W}_{ц_m}.\end{cases} \tag{11}$$

Отже, звуження випадкового процесу $\tilde{\xi}_m(\omega,t)$ на область $\mathbf{W}_{ц_m}$ є m-м циклом $\xi_m(\omega,t)$ циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$.

Функції розподілу циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ можуть бути записані через функції розподілу вектора $\left\{\tilde{\xi}_m(\omega,t), m\in\mathbf{Z}\right\}$, а саме [7]:

$$F_{k_\xi}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)=\sum_{m_1\in\mathbf{Z}}^{(k)}\sum_{m_k\in\mathbf{Z}}F_{k_{\tilde{\xi}_{m_1}...\tilde{\xi}_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)\cdot\prod_{j=1}^{k}I_{\mathbf{W}_{ц_{m_j}}}(t_j),\ k\in\mathbf{N}, \quad (12)$$

де $\left\{F_{k_{\tilde{\xi}_{m_1}...\tilde{\xi}_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k), (t_1,...,t_k)\in\mathbf{R}^k, m_1,...,m_k\in\mathbf{Z}\right\}$ - множина k-вимірних функцій розподілу вектора $\left\{\tilde{\xi}_m(\omega,t), m\in\mathbf{Z}\right\}$.

Якщо $m_1=...=m_k=m$, то k-вимірна функція розподілу $F_{k_{\tilde{\xi}_m...\tilde{\xi}_m}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$ є k-вимірною автофункцією розподілу m-ї компоненти $\tilde{\xi}_m(\omega,t)$, що дорівнює:

$$F_{k_{\tilde{\xi}_m...\tilde{\xi}_m}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)=\begin{cases} F_{k_{\xi_m...\xi_m}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k), (t_1,...,t_k)\in\mathbf{W}_{ц_m}^k; \\ \overline{F}_k(x_1,...,x_k), (t_1,...,t_k)\in(\mathbf{R}\setminus\mathbf{W}_{ц_m})^k; \\ F_{l_{\xi_m...\xi_m}}(x_1,...,x_l;t_1,...,t_l)\cdot\overline{F}_{k-l}(x_{l+1},...,x_k), \\ (t_1,...,t_l)\in\mathbf{W}_{ц_m}^l, (t_{l+1},...,t_k)\in(\mathbf{R}\setminus\mathbf{W}_{ц_m})^{k-l}, l=\overline{1,k-1}. \end{cases} \quad (13)$$

де $\overline{F}_k(x_1,...,x_k)$ - функція розподілу k-вимірного детермінованого вектора, кожна компонента якого дорівнює нулеві. У цьому разі функція $\overline{F}_k(x_1,...,x_k)$ дорівнює:

$$\overline{F}_k(x_1,...,x_k)=\begin{cases}1, (x_1,...,x_k)\in[0,\infty)^k, \\ 0, (x_1,...,x_k)\notin[0,\infty)^k.\end{cases} \quad (14)$$

Отже, як видно із формули (13), функція розподілу $F_{k_{\tilde{\xi}_m...\tilde{\xi}_m}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$ m-ї компоненти $\tilde{\xi}_m(\omega,t)$, якщо її розглядати лише на гіперкубі $\mathbf{W}_{ц_m}^k$, що є k-кратним декартовим добутком області $\mathbf{W}_{ц_m}$, є автофункцією розподілу m-го циклу циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$.

Якщо рівність індексів m_j, $j=\overline{1,k}$ не має місця, то k-вимірна функція розподілу $F_{k_{\tilde{\xi}_{m_1}...\tilde{\xi}_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)$ є сумісною k-вимірною функцією розподілу між відповідними (m_1-м, m_2-м,…, m_k-м) компонентами вектора $\left\{\tilde{\xi}_m(\omega,t), m\in\mathbf{Z}\right\}$, яка дорівнює:

$$F_{k_{\tilde{\xi}_{m_1}...\tilde{\xi}_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k)=\begin{cases} F_{k_{\xi_{m_1}...\xi_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k), (t_1,...,t_k)\in\prod_{j=1}^{k}\mathbf{W}_{ц_{m_j}}; \\ \overline{F}_k(x_1,...,x_k), (t_1,...,t_k)\in\prod_{j=1}^{k}\mathbf{R}\setminus\mathbf{W}_{ц_{m_j}}; \\ F_{l_{\xi_{m_1}...\xi_{m_l}}}(x_1,...,x_l;t_1,...,t_l)\cdot\overline{F}_{k-l}(x_{l+1},...,x_k), \\ (t_1,...,t_l)\in\prod_{j=1}^{l}\mathbf{W}_{ц_{m_j}}, (t_{l+1},...,t_k)\in\prod_{j=l+1}^{k}\mathbf{R}\setminus\mathbf{W}_{ц_{m_j}}, l=\overline{1,k-1}. \end{cases} \quad (15)$$

Відзначимо, що формула (13) є частинним випадком формули (15), коли всі індекси є однаковими, а саме $m_1=...=m_k=m$.

Оскільки випадковий процес $\xi(\omega,t)$ є циклічним, то для k-вимірних функцій розподілу $\left\{F_{k_{\tilde{\xi}_{m_1}...\tilde{\xi}_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k), m_1,...,m_k\in\mathbf{Z}\right\}$ компонент вектора $\left\{\tilde{\xi}_m(\omega,t), m\in\mathbf{Z}\right\}$ має місце рівність, яка аналогічна рівності (5), а саме:

$$
\begin{gathered}
F_{k_{\tilde{\xi}_{m_1}\ldots\tilde{\xi}_{m_k}}}\left(x_1,\ldots,x_k;t_1,\ldots,t_k\right)= \\
=F_{k_{\tilde{\xi}_{m_1+n}\ldots\tilde{\xi}_{m_k+n}}}\left(x_1,\ldots,x_k;t_1+T\left(t_1,n\right),\ldots,t_k+T\left(t_k,n\right)\right),\ x_1,\ldots,x_k,t_1,\ldots,t_k\in\mathbf{R},\ m_1,\ldots,m_k,\ n\in\mathbf{Z}.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Для індикаторних функцій $I_{\mathbf{W}_{\text{ц}_m}}\left(t\right)$ має місце рівність

$$
I_{\mathbf{W}_{\text{ц}_m}}\left(t\right)=I_{\mathbf{W}_{\text{ц}_{m+n}}}\left(t+T\left(t,n\right)\right),\ t\in\mathbf{R},\ m,n\in\mathbf{Z}\,, \tag{17}
$$

що є наслідком циклічності випадкового процесу $\xi\left(\omega,t\right)$.

Розглянемо частинний випадок конструкції (4), коли випадкові процеси $\left\{\xi_m\left(\omega,t\right),\ \omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}_{\text{ц}_m},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$ є стохастично незалежними. Даний випадок часто зустрічається в практичних застосуваннях, наприклад в [4-5], однак недостатньо досліджений у теоретичному плані, оскільки не встановлено характерної особливості ймовірнісної структури циклічного випадкового процесу $\xi\left(\omega,t\right)$ за умови стохастичної незалежності компонент його конструкції (4) (стохастичної незалежності циклів). А такою особливістю є той факт, що k-вимірні ймовірнісні характеристики циклічного випадкового процесу $\xi\left(\omega,t\right)$ достатньо задавати та оцінювати не на всій області $\mathbf{R}^k$, а лише на довільному гіперкубі $\mathbf{W}^k_{\text{ц}_m}$, що є k-кратним декартовим степенем відповідної області $\mathbf{W}_{\text{ц}_m}$. Покажемо це.

Дещо змінимо позначення для сумісної k-вимірної функції розподілу $F_{k_{\xi_{m_1}\ldots\xi_{m_k}}}\left(x_1,\ldots,x_k;t_1,\ldots,t_k\right),\left(t_1,\ldots,t_k\right)\in\prod\limits_{j=1}^{k}\mathbf{W}_{\text{ц}_{m_j}}$ множини циклів $\left\{\xi_m\left(\omega,t\right),\ \omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}_{\text{ц}_m},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$, а саме будемо позначати її так: $F_{k_{\xi^{n_1}_{m_1}\ldots\xi^{n_p}_{m_p}}}\left(x_1,\ldots,x_{n_1},x_{n_1+1},\ldots,x_{n_1+n_2},\ldots,x_k;t_1,\ldots,t_{n_1},t_{n_1+1},\ldots,t_{n_1+n_2},\ldots,t_k\right)$, де індекс $\xi^{n_j}_{m_j},\ j=\overline{1,p}$ означає, що з m_j-го циклу взято n_j відліків; порядок k функції розподілу дорівнює сумі: $k=\sum\limits_{j=1}^{p}n_j$, а p - це кількість різних ($m_1\neq\ldots\neq m_p$) циклів, із яких вибираються відліки (випадкові величини) у відповідні моменти часу.

У такому разі сумісна k-вимірна функція розподілу $F_{k_{\xi^{n_1}_{m_1}\ldots\xi^{n_p}_{m_p}}}\left(x_1,\ldots,x_{n_1},x_{n_1+1},\ldots,x_{n_1+n_2},\ldots,x_k;t_1,\ldots,t_{n_1},t_{n_1+1},\ldots,t_{n_1+n_2},\ldots,t_k\right)$ стохастично незалежних циклів $\left\{\xi_m\left(\omega,t\right),\ \omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}_{\text{ц}_m},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$ визначається через добуток p автофункцій розподілу n_j-х порядків m_j-х циклів циклічного випадкового процесу $\xi\left(\omega,t\right)$, а саме:

$$
\begin{gathered}
F_{k_{\xi^{n_1}_{m_1}\ldots\xi^{n_p}_{m_p}}}\left(x_1,\ldots,x_{n_1},x_{n_1+1},\ldots,x_{n_1+n_2},\ldots,x_k;t_1,\ldots,t_{n_1},t_{n_1+1},\ldots,t_{n_1+n_2},\ldots,t_k\right)= \\
=\prod_{j=1}^{p}F_{n_{j_{\xi_{m_j}}}}\left(x_{\sum\limits_{i=0}^{j-1}n_i+1},\ldots,x_{\sum\limits_{i=0}^{j}n_i};t_{\sum\limits_{i=0}^{j-1}n_i+1},\ldots,t_{\sum\limits_{i=0}^{j}n_i}\right), \\
x_1,\ldots,x_k\in\mathbf{R},\ \left(t_{\sum\limits_{i=0}^{j-1}n_i+1},\ldots,t_{\sum\limits_{i=0}^{j}n_i}\right)\in\mathbf{W}^{n_j}_{\text{ц}_{m_j}},\ n_0=0,\ n_j\in\overline{1,k},\ m_j\in\mathbf{Z},\ j=\overline{1,p}.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Функція $F_{n_{j_{\xi_{m_j}}}}\left(\cdot,\cdot\right)$ є автофункцією розподілу n_j-го порядку m_j-го циклу, яка задана на гіперкубі $\mathbf{W}^{n_j}_{\text{ц}_{m_j}}$.

У випадку, якщо із циклів взято лише по одному відліку, тобто $n_1=\ldots=n_p=1$, то $p=k$ ($k\in\mathbf{N}$), а із (18) випливає рівність

$$F_{k_{\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_k}}}\left(x_1,...,x_k;t_1,...,t_k\right)=\prod_{j=1}^{k}F_{1_{\xi_{m_j}}}\left(x_j,t_j\right),\ x_1,...,x_k\in\mathbf{R},t_j\in\mathbf{W}_{ц_{m_j}},\ j=\overline{1,k}\ , \qquad (19)$$

тобто k-вимірна сумісна функція розподілу подається через k-кратний добуток відповідних одновимірних функцій розподілу різних циклів циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$.

Оскільки, згідно із формулою (7), k-вимірні функції розподілу результуючого циклічного процесу $\xi(\omega,t)$ повністю визначаються через k-вимірні сумісні та автофункції розподілу циклів $\left\{\xi_m(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}_{ц_m},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$, а у випадку їх незалежності, згідно із формулою (18), сумісні функції розподілу циклів визначаються через добуток їх автофункцій розподілу, то в цьому випадку і k-вимірні функції розподілу циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ повністю визначаються через автофункції розподілу циклів $\left\{\xi_m(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{W}_{ц_m},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$, які задані на множині гіперкубів $\left\{\mathbf{W}_{ц_m}^k,\ m\in\mathbf{Z}\right\}$. А врахувавши ще й те, що k-вимірні функції розподілу $F_{k_\xi}\left(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k\right)$ циклічного випадкового процесу достатньо задавати та оцінювати не на всій часовій області їх визначення $\mathbf{R}^k$, а лише на області $\mathbf{W}_{ц_m}\times\mathbf{R}^{k-1}$, то для представлення ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу із незалежними циклами, їх необхідно задати лише на одному довільному m-му гіперкубі $\mathbf{W}_{ц_m}^k$, оскільки k-вимірні автофункції розподілу циклів на всіх гіперкубах $\left\{\mathbf{W}_{ц_m}^k,\ m\in\mathbf{Z}\right\}$ можна обчислити за формулою (5), знаючи функцію ритму $T(t,n)$.

Відзначимо, що коли процес $\xi(\omega,t),\omega\in\mathbf{\Omega},t\in\mathbf{R}$ не є циклічним, а його компоненти конструкції (4) є стохастично незалежними, то його ймовірнісні k-вимірні характеристики достатньо задати та оцінювати не на одному гіперкубі $\mathbf{W}_{ц_m}^k$, як це є для циклічного випадкового процесу, а вже на цілій множині гіперкубів $\left\{\mathbf{W}_{ц_m}^k,\ m\in\mathbf{Z}\right\}$.

Розглянемо процес формування узгодженої вибірки (послідовності) випадкових процесів $\left\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$ шляхом "порізки" циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ на окремі цикли, що зведені до однієї області визначення (наприклад $\mathbf{W}_{ц_0}$) та до однієї шкали.

Процес формування узгодженої множини циклів $\left\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$ циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ із функцією ритму $T(t,n),t\in\mathbf{R},n\in\mathbf{Z}$ може бути здійснений шляхом використання такої аналітичної залежності:

$$g_m(\omega,t_0)=\xi(\omega,t_0+T(t_0,m)),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\ . \qquad (20)$$

Коли m пробіжить всі цілі числа, а t_0 пробіжить всю множину $\mathbf{W}_{ц_0}$, то тим самим отримаємо узгоджену множину циклів $\left\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$, які задані на одній і тій же області визначення $\mathbf{W}_{ц_0}$ та зведені до однієї шкали.

Відзначимо, що оскільки $\xi(\omega,t)$ є циклічним випадковим процесом, то k-вимірні функції розподілу циклів $\left\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$, згідно з формулою (5), задовольняють такій рівності:

$$\begin{gathered}F_{k_{g_{m_1}\cdots g_{m_k}}}\left(x_1,...,x_k;t_{01},...,t_{0k}\right)=F_{k_{g_{m_1+n}\cdots g_{m_k+n}}}\left(x_1,...,x_k;t_{01},...,t_{0k}\right),\\ x_1,...,x_k\in\mathbf{R},\ t_{01},...,t_{0k}\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m_1,...,m_k,\ n\in\mathbf{Z},\end{gathered} \qquad (21)$$

і пов'язані із k -вимірною функцією розподілу циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ так:

$$F_{k_{g_{m_1}\dots g_{m_k}}}(x_1,...,x_k;t_{01},...,t_{0k}) = F_{k_\xi}(x_1,...,x_k;t_{01}+T(t_{01},m_1),...,t_{0k}+T(t_{0k},m_k)),$$
$$x_1,...,x_k \in \mathbf{R},\ t_{01},...,t_{0k} \in \mathbf{W}_{ц_0},\ m_1,...,m_k \in \mathbf{Z}. \quad (22)$$

Отже, при "порізці" циклічного випадкового процесу на цикли, ймовірнісна інформація не втрачається, а міститься у функціях розподілу послідовності циклів $\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\}$.

Враховуючи отримані вище результати, розглянемо питання статистичного аналізу циклічного випадкового процесу шляхом використання двох методів, а саме: шляхом застосування синфазного методу (метод φ-серій) статистичного оцінювання (через функцію ритму) ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу та шляхом використання статистичної обробки за ансамблем його узгоджених циклів $\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\}$.

Запишемо статистичну оцінку, яка збігається в середньоквадратичному сенсі до функції розподілу $F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k)$ циклічного випадкового процесу на області $t_1\in\mathbf{W}_{ц_0},\ t_2,...,t_k\in\mathbf{R}$, а саме:

$$F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k) =$$
$$= \underset{N\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{2N+1}\cdot\sum_{n=-N}^{N}\prod_{i=1}^{k}H(x_i-\xi(\omega,t_i+T(t_i,n))),\ x_1,...,x_k\in\mathbf{R}, t_1\in\mathbf{W}_{ц_0},\ t_2,...,t_k\in\mathbf{R}. \quad (23)$$

Функція $H(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ є функцією Хевісайда, яка є індикатором невід'ємного числа. Формула (23) лежить в основі синфазного методу оцінювання ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу.

Метод статистичного оцінювання ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу, шляхом усереднення за ансамблем його узгоджених циклів $\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\}$, базується на формулі:

$$F_{k_\xi}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k) = \underset{N\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{2N+1}\cdot\sum_{n=-N}^{N}\prod_{i=1}^{k}H(x_i-g_n(\omega,t_i)),\ x_1,...,x_k\in\mathbf{R}, t_1,...,t_k\in\mathbf{W}_{ц_0}. \quad (24)$$

Як бачимо, синфазний метод оцінювання дає змогу отримати статистичну оцінку k-вимірної функції розподілу циклічного випадкового процесу на області $\mathbf{W}_{ц_0}\times\mathbf{R}^{k-1}$, що, за відомою функцією ритму на основі формули (8), дає змогу відтворити дану оцінку на всій її часовій області $\mathbf{R}^k$ визначення.

Метод статистичного оцінювання ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу, шляхом усереднення за ансамблем зведених до однієї області визначення його циклів $\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\}$, дає змогу отримати статистичну оцінку k-вимірної функції розподілу циклічного випадкового процесу лише на області $\mathbf{W}_{ц_0}^k$, що за умови стохастичної залежності циклів $\{g_m(\omega,t_0),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_0\in\mathbf{W}_{ц_0},\ m\in\mathbf{Z}\}$ приводить до втрати статистично значимої інформації при аналізі циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$. У цьому випадку статистичну оцінку k-вимірної функції розподілу циклічного випадкового процесу за відомою функцією ритму можна відтворити на основі формули (8) лише на множині гіперкубів $\{\mathbf{W}_{ц_m}^k,\ m\in\mathbf{Z}\}$, тобто на області $\mathbf{R}^k\setminus\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\mathbf{W}_{ц_m}^k$ інформація про оцінку функції розподілу повністю відсутня.

Отже, якщо цикли циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ є стохастично залежними, то у результаті статистичного аналізу на базі формули (24) може бути збережена інформація лише про автофункції розподілу циклів, а інформація про сумісні функції розподілу циклів процесу $\xi(\omega,t)$ буде втрачена. Лише у випадку, коли циклічний випадковий процес задається своєю одновимірною функцією розподілу, ця ймовірнісна інформація повністю буде збережена, а синфазний метод буде рівноцінний методу статистичного оцінювання ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу шляхом усереднення за ансамблем зведених до однієї області визначення його циклів $\{g_m(\omega,t_0), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_0 \in \mathbf{W}_{ц_0}, m \in \mathbf{Z}\}$.

Якщо ж цикли циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ є стохастично незалежними, то сумісні функції розподілу його циклів, згідно з формулою (18), визначаються через добуток автофункцій розподілу певних циклів циклічного випадкового процесу, а тому статистична інформація, що містилася в циклічному випадковому процесі, шляхом використання формули (8) може бути отримана на всій області $\mathbf{R}^k$.

Виходячи із наведених вище результатів, можна стверджувати, що статистична обробка циклічного випадкового процесу $\xi(\omega,t)$ за ансамблем узгоджених його циклів $\{g_m(\omega,t_0), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_0 \in \mathbf{W}_{ц_0}, m \in \mathbf{Z}\}$ є еквівалентною його статистичній обробці за синфазним методом (методом φ-серій) лише за умови стохастичної незалежності всіх циклів циклічного випадкового процесу.

Отримані вище результати, що стосуються конструкцій (4) та (9), систематизуємо шляхом зведення їх у таблицю 1.

Таблиця 1 – Особливості ймовірнісних характеристик випадкових процесів та методів їх статистичного оцінювання

	Компоненти конструкції (4) стохастично залежні	**Компоненти конструкції (4) стохастично не залежні**
Випадковий $\xi(\omega,t)$ процес не є циклічним	Ймовірнісні k-вимірні характеристики випадкового процесу необхідно задати та оцінювати на всій часовій області їх визначення $\mathbf{R}^k$.	1. Ймовірнісні k-вимірні характеристики випадкового процесу достатньо задати та оцінювати лише на множині гіперкубів $\{\mathbf{W}^k_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}\}$.
Випадковий процес $\xi(\omega,t)$ є циклічним	1. Ймовірнісні k-вимірні характеристики циклічного випадкового процесу достатньо задати та оцінювати лише на області $\mathbf{W}_{ц_m} \times \mathbf{R}^{k-1}$. 2. Статистична обробка циклічного випадкового процесу за ансамблем його узгоджених циклів $\{g_m(\omega,t_0), m \in \mathbf{Z}\}$ приводить до втрати інформації про сумісні функції розподілу циклів і дає змогу в повній мірі оцінити лише автофункції розподілу циклів циклічного випадкового процесу.	1. Ймовірнісні k-вимірні характеристики циклічного випадкового процесу достатньо задати та оцінювати лише на одному довільному m-му гіперкубі $\mathbf{W}^k_{ц_m}$. 2. Статистична обробка процесу за ансамблем його узгоджених циклів $\{g_m(\omega,t_0), m \in \mathbf{Z}\}$ дає змогу оцінити всі його k-вимірні ймовірнісні характеристики, тобто є еквівалентною синфазному методу оцінювання.

Встановлені факти для випадку стохастичної незалежності циклів циклічного випадкового процесу неперервного аргументу мають місце і для циклічних випадкових процесів із дискретним аргументом. Як частинний випадок ці факти охоплюють і стохастично періодичний випадковий процес.

Отримані результати мають суттєве практичне значення в задачах імітаційного моделювання та статистичного аналізу циклічних сигналів, оскільки дають змогу оцінити обмеженість можливості імітації циклічного випадкового процесу із сукупності стохастично незалежних циклів, а саме у такому разі ймовірнісні характеристики імітованого циклічного випадкового процесу згідно з формулою (18) будуть мати суто специфічну структуру, яка не завжди адекватно відображає характеристики реальних циклічних сигналів. А при проведенні статистичного аналізу циклічного випадкового процесу отримані результати дають змогу суттєво зменшити обсяг обчислень при проведенні його статистичного аналізу, оскільки у випадку стохастичної незалежності циклів k-вимірні ймовірнісні характеристики процесу необхідно оцінити лише на одному m-му гіперкубі $\mathbf{W}_{ц_m}^{k}$, а не на всій області $\mathbf{R}^{k}$.

Висновки

1. Встановлено особливості структури ймовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу із стохастично незалежними циклами, а саме - записано аналітичний вираз, який дає змогу визначити сумісні функції розподілу циклів через їх автофункції розподілу, що вказує на рівноцінність теоретико-ймовірнісної інформації, яка закладена у всій ймовірнісній структурі такого процесу, та теоретико-ймовірнісної інформації, що міститься в автофункціях розподілу його циклів.
2. Обґрунтовано еквівалентність статистичного аналізу циклічного випадкового процесу із стохастично незалежними циклами шляхом використання синфазного методу оцінювання його ймовірнісних характеристик та методу їх оцінювання за ансамблем зведених до однієї області визначення та однієї шкали узгоджених циклів циклічного випадкового процесу.
3. Оцінено обмеженість можливості імітації циклічного випадкового процесу із сукупності стохастично незалежних циклів, оскільки у такому разі ймовірнісні характеристики імітованого циклічного випадкового процесу будуть мати суто специфічну структуру, яка не завжди адекватно відображає характеристики реальних циклічних сигналів.
4. За умови стохастичної незалежності циклів циклічного випадкового процесу, отримані результати дають змогу суттєво зменшити обсяг обчислень при проведенні його статистичного аналізу, оскільки у цьому разі k-вимірні ймовірнісні характеристики необхідно оцінити лише на одному m-му гіперкубі $\mathbf{W}_{ц_m}^{k}$, а не на всій області $\mathbf{R}^{k}$.

Література

1. Лупенко С. Циклічні функції та їх класифікація в задачах моделювання циклічних сигналів та коливних систем // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - 2005. - №1. - С. 177-185.
2. Лупенко С.А. Детермнированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация // Электронное моделирование.- 2006. –Т. 28, №4.– С.47-65.
3. Лупенко С.А. Математичне та комп'ютерне моделювання сигналів серця в задачах кардіометрії // Тези доповідей п'ятої наук.-техн. конф. ТДТУ "Прогресивні матеріали та обладнання в машино і приладобудуванні". Тернопіль. – 2001. – С.17.
4. Лупенко С.А. Моделювання та методи обробки циклічних сигналів серця на базі лінійних випадкових функцій: Автореф. дис. канд. техн. наук: 01.05.02 /Тернопіль: ТДТУ, 2001. - 20с.
5. Файнзильберг Л.С. Новая информационная технология обработки ЭКГ для выявления ишемической болезни сердца при массовых обследованиях населения // Управляющие системы и машины.- 2005.- №3.-63-71.
6. Лупенко С. Циклічне функціональне відношення як основа математичного формалізму теорії моделювання та аналізу циклічних сигналів //Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2007. -Т. 12, №3. -С.183-195.

7. Лупенко С. Циклічні та періодичні випадкові процеси із зонною часовою структурою та їх ймовірнісні характеристики //Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2006. - Т. 11, №2. -С.150-155.

Одержано 25.11.2008 р.