

УДК 539.3

А. Сяський, докт. техн. наук; Н. Шинкарчук

Рівненський державний гуманітарний університет

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ДВОМА ЕЛІПТИЧНИМИ РОЗРІЗАМИ

Резюме. Досліджено напружений стан кусково-однорідної ортотропної пластинки з двома еліптичними розрізами на лінії розмежування матеріалів за умови контактування їх берегів. Наближений розв'язок системи сингулярних інтегральних рівнянь задачі реалізовано методом механічних квадратур і колокації.

Ключові слова: напружений стан, еліптичний отвір, ортотропні матеріали, зона контакту.

A. Syasky, N. Shynkarchuk

THE INVESTIGATED STRESS STATE OF PIECEWISE HOMOGENEOUS AN ORTHOTROPIC PLATE WITH TWO ELLIPTIC INCISIONS

The summary. The investigated stress state of piecewise homogeneous an orthotropic plate with two elliptic incisions on the line materials division with provided contact them shores. Approximate solution of singular integral equations of the problem is implemented mechanical quadrature and collocation.

Key words: a stress state, an elliptical hole, orthotropic materials, contact zone.

Вступ. Підвищення надійності деталей машин, спроектованих у вигляді кусково-однорідних пластин, є однією з важливих проблем машинобудування. Їх довговічність значною мірою залежить від наявності на лінії розмежування матеріалів дефектів типу розрізів або тріщин, які можуть виникнути на етапі виготовлення, а в процесі експлуатації суттєво знизити допустиме зовнішнє навантаження на деталь.

Розрахунок напруженого стану в кусково-однорідних ізотропних і ортотропних пластинках із впаяною круговою шайбою за наявності на лінії їх спаю одного або системи розрізів проведено в роботах [1,2].

Контактні задачі про двосторонній згин ізотропних пластин з двома симетричними наскрізними тріщинами по дузі кола, розподіленими згинальними моментами на нескінченності з урахуванням контакту їх берегів, розглянуто в [3].

Розрахунок та аналіз напружено-деформованого стану в кусково-однорідній ортотропній пластинці, яка перебуває в умовах силового навантаження в центрі жорсткого диска, за наявності на лінії розділу матеріалів зон спаю, гладкого контакту і відставання, проведено в [4]. Аналогічна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором розглянута в [5].

В даній статті запропоновано підхід для визначення напруженого стану в кусково-однорідній ортотропній пластинці з двома еліптичними розрізами, береги яких перебувають у частковому або повному гладкому контакті, за умов силового навантаження в центрі диска.

Постановка задачі. Допустимо, що еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки товщиною $2h$ обмежений гладким контуром Γ у вигляді еліпса. Сумістимо із серединною площиною пластинки комплексну площину $z = x + iy$. Систему прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат оберемо так, щоб початок відліку співпадав із центром отвору, а полярна вісь співпадала з віссю Ox . Вважається, що

головні осі ортотропії матеріалу пластинки співпадають з координатними осями і осями еліпса.

В отвір пластинки без зазору і натягу вставлено абсолютно жорсткий диск такої ж форми та розмірів, причому на ділянках $\Gamma_3 = [\pi/2 + \alpha_1^*, \pi/2 + \beta_1^*]$ та $\Gamma_7 = [3\pi/2 + \alpha_3^*, 3\pi/2 + \beta_3^*]$ диск спаяний з пластинкою. В центрі диска діють зосереджена сила (X_0, Y_0) та пара сил з моментом M_0 , внаслідок чого на проміжках $\Gamma_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$ та $\Gamma_5 = [\pi + \alpha_2^*, \pi + \beta_2^*]$ диск вступає в контактну взаємодію з пластинкою. На ділянках $\Gamma_2 = [\beta_0^*, \pi/2 + \alpha_1^*]$, $\Gamma_4 = [\pi/2 + \beta_1^*, \pi + \alpha_2^*]$, $\Gamma_6 = [\pi + \beta_2^*, 3\pi/2 + \alpha_3^*]$, $\Gamma_8 = [3\pi/2 + \beta_3^*, 2\pi + \alpha_0^*]$ контакт між ними відсутній (рис. 1).

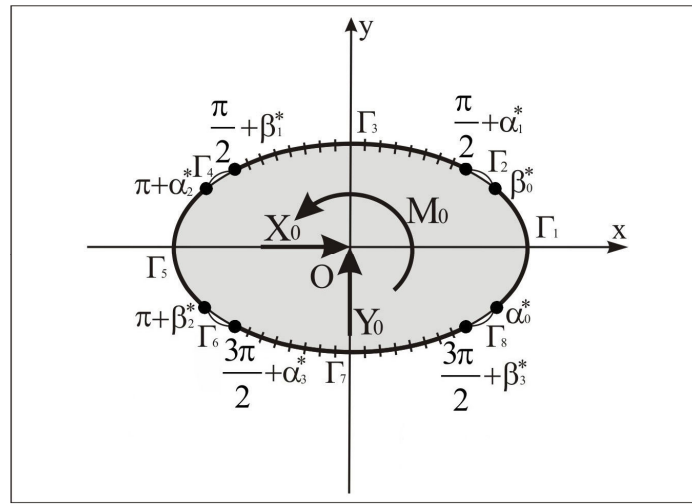


Рисунок 1. Розрахункова схема пластинки

Тут $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi/2 + \alpha_1^*, \pi/2 + \beta_1^*, \pi + \alpha_2^*, \pi + \beta_2^*, 3\pi/2 + \alpha_3^*, 3\pi/2 + \beta_3^*$ – полярні кути межових точок ділянок контакту та спаю.

Розв’язок задачі полягає у визначенні компонентів напруженого стану на контурі отвору пластинки, величини і положення зон контакту й відставання, а також кута повороту диска.

Інтегральні рівняння задачі. Співвідношення для компонентів вектора зміщення контурних точок пластинки (u, v) та жорсткого диска (u^0, v^0) при заданому навантаженні запишемо у вигляді [4]

$$\begin{aligned}
 2E_x h u &= (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{Y_0 (\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \right. \\
 &+ \int_{\pi/2 + \alpha_1}^{\pi/2 + \beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi + \alpha_2}^{\pi + \beta_2} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \left. \int_{3\pi/2 + \alpha_3}^{3\pi/2 + \beta_3} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt \right] + c_1; \\
 2E_x h v &= (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{X_0 (\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \left[\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \right. \\
 &+ \int_{\pi/2 + \alpha_1}^{\pi/2 + \beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi + \alpha_2}^{\pi + \beta_2} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \left. \int_{3\pi/2 + \alpha_3}^{3\pi/2 + \beta_3} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt \right] + c_2, \quad \lambda \in \gamma; \\
 (u^0 + i v^0) &= (U_0 + i V_0) + e^{i\theta_0} \left(\sigma + \frac{\varepsilon}{\sigma^{N-1}} \right), \tag{1}
 \end{aligned}$$

де $\alpha_0, \beta_0, \pi/2 + \alpha_1, \pi/2 + \beta_1, \pi + \alpha_2, \pi + \beta_2, 3\pi/2 + \alpha_3, 3\pi/2 + \beta_3$ – образи кутів $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi/2 + \alpha_1^*, \pi/2 + \beta_1^*, \pi + \alpha_2^*, \pi + \beta_2^*, 3\pi/2 + \alpha_3^*, 3\pi/2 + \beta_3^*$ при конформному відображенні зовнішності одиничного кола $\gamma (\rho_0 = 1)$ у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку

займає пластинка в комплексній площині за допомогою функції $z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi} \right)$;

$R_0 = \frac{a+b}{2} = 1$; $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$; $a = 1 + \varepsilon$, $b = 1 - \varepsilon$ – півосі еліпса; ε – ексцентриситет еліпса;

(ρ, λ) – полярна система координат у площині ξ ; $i = \sqrt{-1}$; E_x, ν_x – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини в напрямку осі Ox ; β_1, β_2 – корені характеристичного рівняння [6]; c_1, c_2 – сталі; U_0, V_0 – жорстке лінійне зміщення диска, φ_0 – кут його повороту; $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі отвору

пластинки; $f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt$; $T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma)$; $\sigma = e^{i\lambda}$.

Граничні умови задачі в зоні гладкого без тертя контакту приймаємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска [4,7]

$$a(\lambda)u + b(\lambda)v = \varepsilon N \varphi_0 \sin(N\lambda) + a(\lambda)U_0 + b(\lambda)V_0; \quad S_{\rho\lambda} = 0, \quad \lambda \in \gamma_1 \cup \gamma_5, \quad (2)$$

а в зоні спаю пластинки і диска – у вигляді рівності зміщень їх контурних точок

$$u = u^0; \quad v = v^0, \quad \lambda \in \gamma_3 \cup \gamma_7. \quad (3)$$

Тут $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_7$ – образи ділянок $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_7$ при відображенні $\omega(\xi)$;

$$a(\lambda) + ib(\lambda) = (\alpha + i\beta) e^{i\lambda}; \quad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \alpha = 1 - \varepsilon \cos 2\lambda; \quad \beta = \varepsilon \sin 2\lambda.$$

Шляхом підстановки (1) у граничні умови (2), (3), отримаємо систему восьми сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій f_1', f_2'

$$\begin{aligned} & a(\lambda) \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \frac{Y_0(\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda \right] + \\ & + b(\lambda) \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \frac{X_0(\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda \right] = \\ & = 2E_x h \varepsilon N \varphi_0 \sin(N\lambda) + a(\lambda) \tilde{c}_1 + b(\lambda) \tilde{c}_2, \quad f_1'(\lambda) a(\lambda) + f_2'(\lambda) b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \frac{Y_0(\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda = \\ & = \tilde{c}_1 - 2E_x h (\sin \lambda - \varepsilon \sin((N-1)\lambda)) \varphi_0; \\ & (\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \frac{X_0(\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda = \\ & = \tilde{c}_2 + 2E_x h (\cos \lambda + \varepsilon \cos((N-1)\lambda)) \varphi_0, \quad \lambda \in \gamma_3; \quad (5) \end{aligned}$$

$$a(\lambda) \left[(\beta_1 \beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \frac{Y_0(\beta_1 \beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda \right] +$$

$$+b(\lambda) \left[(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{X_0(\beta_1\beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda \right] =$$

$$= 2E_x h \varepsilon N \varphi_0 \sin(N\lambda) + a(\lambda) \tilde{c}_1 + b(\lambda) \tilde{c}_2, \quad f_1'(\lambda) a(\lambda) + f_2'(\lambda) b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_5; \quad (6)$$

$$(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{Y_0(\beta_1\beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt =$$

$$= \tilde{c}_1 - 2E_x h (\sin \lambda - \varepsilon \sin((N-1)\lambda)) \varphi_0;$$

$$(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{X_0(\beta_1\beta_2 - \nu_x)}{2\pi} \lambda - \frac{\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt =$$

$$= \tilde{c}_2 + 2E_x h (\cos \lambda + \varepsilon \cos((N-1)\lambda)) \varphi_0, \quad \lambda \in \gamma_7, \quad (7)$$

де $\tilde{c}_1 = 2E_x h U_0 - c_1$, $\tilde{c}_2 = 2E_x h V_0 - c_2$.

Крім системи рівнянь (4)–(7), повинні виконуватися умови силової і моментної рівноваги диска [4, 7]

$$\int_{\gamma} f_2'(t) dt = -X_0; \quad \int_{\gamma} f_1'(t) dt = Y_0;$$

$$\int_{\gamma} [f_1'(t) \cos t + f_2'(t) \sin t] dt + \varepsilon \int_{\gamma} [f_1'(t) \cos((N-1)t) + f_2'(t) \sin((N-1)t)] dt = M_0, \quad (8)$$

які служать для визначення сталих $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \varphi_0$.

Контактні зусилля на контурі отвору пластинки, через функції $f_1'(\lambda), f_2'(\lambda)$ можна визначити зі співвідношення [4, 8]

$$T_{\rho} + iS_{\rho\lambda} = \frac{(f_2'(\lambda) - if_1'(\lambda))(a(\lambda) - ib(\lambda))}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \lambda \in \gamma. \quad (9)$$

Кільцеві зусилля T_{λ} знаходимо за формулою, наведеною в [4,8].

Розглянемо часткові випадки математичної моделі поставленої задачі:

- ✓ приймаючи в (4)–(9) $\beta_1 = \beta_2 = 1$, отримаємо відповідну математичну модель задачі для ізотропної пластинки з еліптичним отвором;
- ✓ якщо в (4)–(9) покласти $\varepsilon = 0$, знаходимо систему співвідношень для ортотропної пластинки з круговим отвором.

Наближений розв'язок задачі. Для наближеного розв'язання задачі (4)–(8) необхідно використати числові методи, оскільки знаходження точного розв'язку пов'язано зі значними математичними труднощами. Контактні зусилля на кінцях зон контакту дорівнюють нулю, а на кінцях зон спаю мають кореневу особливість з локальною осциляцією, тому наближений розв'язок задачі можна реалізувати методом механічних квадратур і колокації, який апробовано в роботах [4, 8].

Для ортотропної пластинки з еліптичним отвором ($N = 2, \varepsilon = \pm 0.2$) досліджено вплив на її напружений стан ортотропії матеріалу, форми отвору та виду зовнішнього навантаження. Результати числового розрахунку контактних $T_{\rho}/X_0, S_{\rho\lambda}/X_0$ та кільцевих T_{λ}/X_0 зусиль на контурі Γ при $X_0 = X_0; Y_0 = 0; M_0 = 0; \alpha_1 = \alpha_3, \beta_1 = \beta_3$ проілюстровано на рис. 2–4. У таблиці 1 наведено характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів і лінії, які відповідають цим матеріалам на рисунках. Значення граничних полярних кутів, які визначають зону контакту Γ_1 та розміри зони спаю $\Gamma_3 \cup \Gamma_7$, при якій зони відставання $\Gamma_2 \cup \Gamma_8$ відсутні, наведено в таблиці 2. В розглянутому прикладі зона контакту Γ_5 відсутня.

Таблиця 1

Матеріал пластинки	β_1	β_2	ν_x	$\frac{E_x}{E_y}$	Вид лінії
Епоксид-графіт (ЕГ)	0.143	1.401	0.010	1/25	---
Епоксид-скло (ЕС)	0.440	1.310	0.083	1/3	-----
Ізотропний (ІМ)	1	1	0.300	1	=====
Скло-епоксид (СЕ)	2.271	0.762	0.250	3	-----
Графіт-епоксид (ГЕ)	6.999	0.714	0.250	25	-----

Таблиця 2

Матеріал пластинки	$\beta_0^* = -\alpha_0^*$ (град)			$\beta_1^* = -\alpha_1^*$ (град)		
	$\varepsilon = -0.2$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = -0.2$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.2$
ЕГ	56.26	44.87	33.39	58.20	66.20	72.10
ЕС	56.04	44.28	32.08	72.20	77.50	80.10
ІМ	55.86	43.78	31.09	75.60	79.40	81.90
СЕ	55.39	42.63	29.34	78.00	81.40	83.30
ГЕ	54.31	40.37	26.59	80.80	82.70	84.60

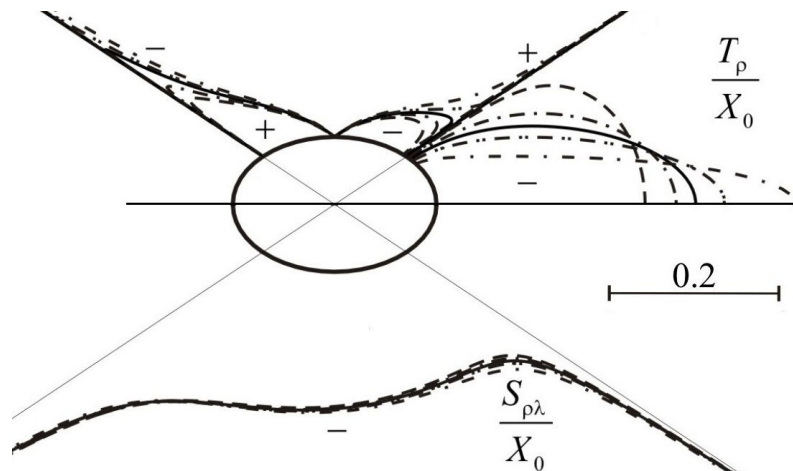


Рисунок 2. Епюри розподілу зусиль T_ρ / X_0 , $S_{\rho\lambda} / X_0$ на контурі отвору при $\varepsilon = 0.2$

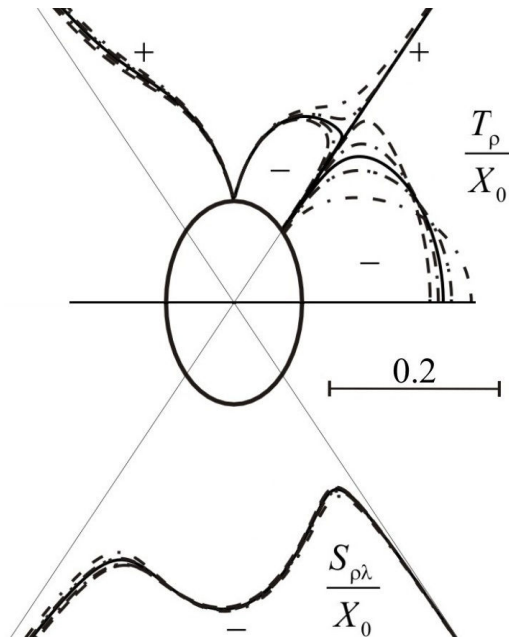


Рисунок 3. Епюри розподілу зусиль T_ρ/X_0 , $S_{\rho\lambda}/X_0$ на контурі отвору при $\varepsilon = -0.2$

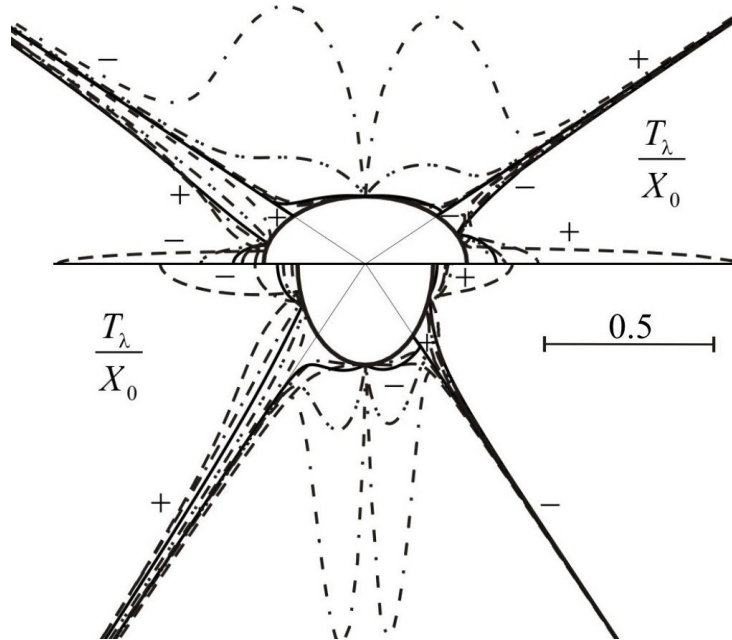


Рисунок 4. Епюри розподілу зусиль T_λ/X_0 на контурі отвору при $\varepsilon = \pm 0.2$

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити такі **висновки**:

- ортотропія матеріалу вносить значний вплив на розподіл нормальних зусиль у зоні контакту. Її вплив на розподіл контактних зусиль у зонах спаю проявляється меншою мірою;
- величина зони контакту суттєво залежить від форми отвору пластинки, оскільки максимальні нормальні зусилля на цій ділянці виникають у точках контуру з найбільшою кривиною;
- при збільшенні кривини зони контакту її розміри для всіх ортотропних матеріалів зменшуються;
- нормальні, дотичні й кільцеві зусилля в межових точках зон спаю – необмежені;
- зі збільшенням відношення E_x/E_y зона контакту зменшується для всіх форм отвору.

Література

1. Грилицький, Д.В. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов [Текст] / Д.В. Грилицький, Р.М. Луцишин. – Львів: Вища школа, 1975. – 111 с.
2. Грилицький, Д.В. Напряженное состояние анизотропной пластинки с впаянным изотропным ядром при наличии разрезом на спае [Текст] / Д.В. Грилицький, Р.М. Луцишин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1962. – № 2. – С. 159–165.
3. Божидарнік, В. Двосторонній згин пластинки з двома симетричними наскрізними тріщинами по дузі кола з урахуванням контакту їх берегів [Текст] / В. Божидарнік, В. Опанасович, П. Герасимчук // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2007. – Т.12, №2. – С.20–30.
4. Сяський, А. Мішана контактна задача для ортотропної пластинки з еліптичним отвором і жорсткого диска [Текст] / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль, 2010. – Т.15, № 4. – С. 7–13.
5. Сяський, А.О. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска [Текст] / А.О. Сяський, Н.В. Шинкарчук // Волинський математичний вісник. Серія „Прикладна математика”. Випуск 7 (16). – Рівне: РДГУ, 2010. – С. 199–209.
6. Лехницький, С.Г. Анизотропные пластинки [Текст] / С.Г. Лехницький – М.: Гостехиздат, 1957. – 464с.
7. Сяський, А.О. Граничні умови контактних задач для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска [Текст] / А.О. Сяський, С.М. Комбель // Волинський математичний вісник. – Рівне, 2002. – Вип. 9. – С. 93–97.
8. Трохимчук, О. Тиск системи двох штампів з кутовими точками на частково підсилений контур еліптичного отвору ортотропної пластинки / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2010. – Т.15, № 1. – С. 14–20.

Отримано 12.05.2011