

УДК 539. 3

**А. Сяський, докт. техн. наук; В. Кот; К. Музичук**

*Рівненський державний гуманітарний університет*

## **РОЗРАХУНОК ЗГИНАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ В ОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИЕМ ЕЛІПТИЧНИМ КОНТУРОМ**

**Резюме.** Розглянуто задачу циліндричного згину ортотропної пластинки з частково підсиленням еліптичним отвором. Встановлено формули для визначення компонентів кута повороту нормалі до середньої площини в контурних точках ортотропної пластинки, які дозволили сформулювати математичну модель задачі у вигляді системи двох інтегро-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами. Методом механічних квадратур і колокації досліджено вплив ортотропії матеріалу на розподіл згинальних напружень по контуру отвору пластинки.

**Ключові слова:** ортотропна пластинка, напружено-деформований стан, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, часткове підсилення.

**A. Syasky, V. Kot, K. Muzychuk**

## **THE CALCULATION OF BENDING STRESSES IN THE ORTHOTROPIC PLATE WITH PARTIALLY REINFORCED ELLIPTICALLY CONTOUR**

**The summary.** The problem of cylindrical bending of orthotropic plates with a partially reinforced elliptic hole. The formula for determining components of the rotation angle normal to medium contour points in a plane orthotropic plate was established, which allowed to formulate a mathematical model of the problem as a system of two integro-differential equations with logarithmic kernels. The influence of material on the distribution of bending stresses along the contour of the hole plate was researched by the method of mechanical quadrature and collocation.

**Key words:** orthotropic plate, the stress-strain state, singular integro-differential equations, partial reinforcement.

**Вступ.** Деталі машин і елементи конструкцій у вигляді пластин, послаблених отворами, широко застосовуються в інженерній практиці. Для зменшення концентрації напружень окремі ділянки контуру отвору підсилюють ребрами жорсткості.

Проблемі дослідження циліндричного згину пластин з криволінійними отворами, контури яких частково підсилені тонкими пружними ребрами, присвячені роботи [1–3]. Моделюючи підсилення пружною лінією змінної жорсткості на згин в [1] побудовано системи інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних моментів. Вплив крутильної жорсткості підсилення на розподіл контактних моментів в умовах осової симетрії досліджено в [2–3].

В роботі [4] на підставі диференціально-інтегрального варіанта граничних умов запропоновано новий підхід до побудови системи сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення контактних моментів на контурі частково підсиленого криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки при її циліндричному згині. В даній статті цей підхід перенесено на випадок ортотропної пластинки з частково підсиленням еліптичним контуром.

**Постановка та граничні умови задачі.** Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку з еліптичним отвором, контур якого  $L$  на проміжку  $\tilde{L}_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$  підсилено тонким пружним ізотропним ребром, що чинить опір згину та крученню. Пластинка

перебуває в умовах циліндричного згину рівномірно розподіленими на нескінченності моментами  $M_1$  і  $M_2$  (рис. 1). Зовнішнє навантаження на підсилення відсутнє.

Систему прямокутних  $(x, y)$  і полярних  $(r, \delta)$  координат з полюсом у центрі отвору в середній площині пластинки оберемо так, щоб вісь  $Ox$  і полярна вісь співпадали з віссю еліпса. Будемо вважати, що головні напрямки ортотропії матеріалу пластинки мають напрямки координатних осей.

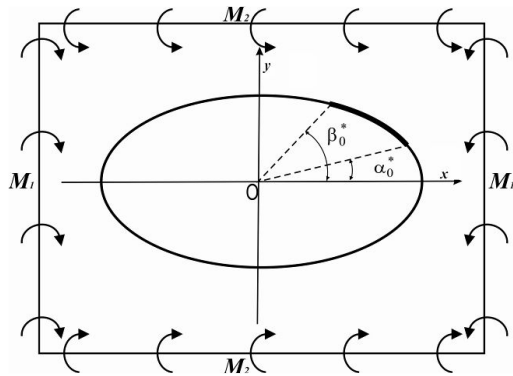


Рисунок 1. Розрахункова схема пластинки

Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних моментів  $M_\rho$ ,  $P$  у зонах підсилення та кільцевих  $M_\lambda$  і крутних  $H_{\rho\lambda}$  моментів на контурі отвору, а також внутрішніх моментів у підсиленні.

Нехай функція

$$z = x + iy = \frac{a+b}{2} \xi + \frac{a-b}{2} \frac{1}{\xi} \quad (1)$$

( $a, b$  – півосі еліпса) здійснює конформне відображення зовнішності  $S^-$  одиничного кола  $\gamma$  у площині  $\xi = \rho^{i\lambda}$  на область, яку займає середня площина пластинки.

Моделюючи підсилення пружною лінією, наділеною змінними жорсткостями на згин  $g_1(s)$  і кручення  $g_2(s)$  ( $s$  – дуга на  $L$ ), граничні умови задачі можна записати у вигляді [4]

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[ R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left( 1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt + \tilde{c}_1;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left( \frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[ R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt + \tilde{c}_2,$$

$$\lambda \in [\alpha_0, \beta_0],$$

де  $R_1 + iR_2 = e^{i\theta}$ ;  $f_1 + if_2 = i \int_0^s (M_\rho + iP) e^{i\theta} ds$ ;  $[\alpha_0, \beta_0]$  – образ ділянки  $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$  при відображенні (1);  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$  – дійсні сталі;  $\theta$  – кут між нормаллю до контуру  $L$  і віссю  $Ox$ .

**Основні рівняння задачі.** Для визначення компонентів вектора повороту нормалі до середньої площини пластинки в контурних точках  $\left( \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right)$  припустимо, що крім навантаження на нескінченності на ділянці  $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$  контуру отвору прикладено згинальні моменти  $M_\rho$  і  $P$  з головним моментом  $(M_x, M_y)$ .

Граничні умови першої основної задачі технічної теорії згину ортотропних пластин [5] запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} c_1 \varphi(z_1) + c_2 \psi(z_2) - d_1 \overline{\varphi(z_1)} - d_2 \overline{\psi(z_2)} &= -(\tilde{f}_1 - i\tilde{f}_2) - i\tilde{C}z; \\ d_1 \varphi(z_1) + d_2 \psi(z_2) - c_1 \overline{\varphi(z_1)} - c_2 \overline{\psi(z_2)} &= (\tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2) - i\tilde{C}\bar{z}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $c_1 = \frac{p_1}{\beta_1} + q_1$ ;  $c_2 = \frac{p_2}{\beta_2} + q_2$ ;  $d_1 = \frac{p_1}{\beta_1} - q_1$ ;  $d_2 = \frac{p_2}{\beta_2} - q_2$ ;  $\beta_1, \beta_2$  – корені характеристичного рівняння [5];  $\tilde{f}_1 = f_1 - \tilde{C}_1$ ;  $\tilde{f}_2 = f_2 - \tilde{C}_2$ ;  $\tilde{C}, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  – довільні дійсні сталі. Решту позначень наведено в роботі [6].

Функції  $\varphi(z_1), \psi(z_2)$  визначені в областях  $S_1, S_2$  з контурами  $L_1, L_2$ , які отримуються з області  $S^-$  за допомогою афінних перетворень [5]

$$z_j = \omega_j(\xi_j) = \frac{a + \beta_j b}{2} \xi_j + \frac{a - \beta_j b}{2} \frac{1}{\xi_j}, \quad (j=1,2). \quad (4)$$

Оскільки при відображеннях (1), (4) відповідним точкам контурів  $L, L_j$  на контурі  $\gamma$  відповідає одна і та ж точка, то граничні умови (2) можна переписати так:

$$\begin{aligned} c_1 \varphi(\tau) + c_2 \psi(\tau) - d_1 \overline{\varphi(\tau)} - d_2 \overline{\psi(\tau)} &= (\tilde{f}_1 - i\tilde{f}_2) - i\tilde{C} \omega(\tau); \\ d_1 \varphi(\tau) + d_2 \psi(\tau) - c_1 \overline{\varphi(\tau)} - c_2 \overline{\psi(\tau)} &= (\tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2) - i\tilde{C} \overline{\omega(\tau)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут  $\tau = e^{it}$  – аффікс точки на контурі  $\gamma$ .

Функції  $\varphi(\xi_1), \psi(\xi_2)$  при заданому навантаженні на пластинку мають таку структуру [5, 7]:

$$\varphi(\xi_1) = a_1 \frac{a + \beta_1 b}{2} \xi_1 + A_1 \ln \xi_1 + \varphi_0(\xi_1); \quad \psi(\xi_2) = a_2 \frac{a + \beta_2 b}{2} \xi_2 + A_2 \ln \xi_2 + \varphi_0(\xi_2), \quad (6)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{-M_1 q_2 + M_2 p_2}{2(p_1 q_2 - p_2 q_1)}; a_2 = \frac{M_1 q_1 - M_2 p_1}{2(p_1 q_2 - p_2 q_1)}; A_1 = -\frac{M_y - i\beta_1 M_x}{4\pi(\beta_2^2 - \beta_1^2)\beta_1} k; A_2 = \frac{M_y - i\beta_2 M_x}{4\pi(\beta_2^2 - \beta_1^2)\beta_2} k;$$

$\varphi_0(\xi_1), \psi_0(\xi_2)$  – голоморфні відповідно в  $S_1, S_2$  функції;  $k = \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{D_{11}}$ ;  $D_{11}$  – циліндрична

жорсткість пластинки в напрямку осі  $Ox$ .

Застосувавши до (5) із врахуванням (6) оператор Коші, отримаємо після обчислення відповідних інтегралів

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1) = \frac{k}{(\beta_2 - \beta_1)\tilde{\Delta}} &\left\{ -\frac{(\beta_2^2 - \nu_x)}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\tilde{f}_2(\tau) d\tau}{\tau - \xi_1} + \frac{\beta_2(\beta_1^2 - \nu_x)i}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\tilde{f}_1(\tau) d\tau}{\tau - \xi_1} - \left[ (\beta_2^2 - \nu_x) \frac{M_y}{2\pi} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \beta_2(\beta_1^2 - \nu_x) \frac{M_x}{2\pi} \right] \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \tau}{\tau - \xi_1} d\tau - \frac{i\tilde{C}}{2\xi_1} (\epsilon d_2 - c_2) + \frac{1}{4\xi_1} [d_2(l_1 + l_3) - c_2(l_2 + l_4)] \right\} + \\ &+ a_1 \frac{a + \beta_1 b}{2} \xi_1 + A_1 \ln \xi_1; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi_2) = \frac{k}{(\beta_2 - \beta_1)\tilde{\Delta}} &\left\{ \frac{(\beta_1^2 - \nu_x)}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\tilde{f}_2(\tau) d\tau}{\tau - \xi_2} + \frac{i\beta_1(\beta_2^2 - \nu_x)}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\tilde{f}_1(\tau) d\tau}{\tau - \xi_2} + \left[ (\beta_1^2 - \nu_x) \frac{M_y}{2\pi} - \right. \right. \\ &\left. \left. - i\beta_1(\beta_2^2 - \nu_x) \frac{M_x}{2\pi} \right] \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \tau}{\tau - \xi_2} d\tau - \frac{i\tilde{C}}{2\xi_2} (c_1 - \epsilon d_1) + \frac{1}{4\xi_2} [c_1(l_2 + l_4) - d_1(l_1 + l_3)] \right\} + \\ &+ a_2 \frac{a + \beta_2 b}{2} \xi_2 + A_2 \ln \xi_2. \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$l_1 = a(d_1 a_1 + d_2 a_2); \quad l_3 = b(d_1 a_1 \beta_1 + d_2 a_2 \beta_2); \quad l_2 = a(c_1 a_1 + c_2 a_2); \quad l_4 = b(c_1 a_1 \beta_1 + c_2 a_2 \beta_2);$$

$$\tilde{\Delta} = \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)^2 - (\beta_1 \beta_2 + \nu_x)^2.$$

Компоненти тензорів згинальних напружень і деформацій та компоненти кута повороту нормалі до середньої площини в довільній точці ортотропної пластинки через

функції  $\varphi(\xi_1)$ ,  $\psi(\xi_2)$  визначаються за відомими формулами [5,7].

Для визначення кутів повороту нормалі в контурних точках використаємо граничні умови другої основної задачі технічної теорії згину ортотропних пластин [5]

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = (1 - \beta_1)\varphi(\sigma) + (1 - \beta_2)\psi(\sigma) + (1 + \beta_1)\overline{\varphi(\sigma)} + (1 + \beta_2)\overline{\psi(\sigma)}. \quad (8)$$

Підставляючи (7) з використанням формул Сохоцького-Племеля в умову (8), знаходимо після певних перетворень

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = & \frac{k}{\tilde{\Delta}} \left\{ (\beta_1\beta_2 + \nu_x)(f_1 + if_2) + \frac{i(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} [\beta_1\beta_2 f_1'(t) + if_2'(t)] \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt + \right. \\ & + \frac{\beta_1\beta_2 + \nu_x}{2\pi} (M_x + iM_y)\lambda + \tilde{C}i[a(\beta_1\beta_2 + \nu_x) + b\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)] \cos \lambda + \\ & \left. + i(a(\beta_1 + \beta_2) + b(\beta_1\beta_2 + \nu_x)) \sin \lambda \right\} - \frac{M_1(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} [(a\tilde{\Delta} + b\tilde{\Delta}_1) \cos \lambda + \\ & + i\beta_1\beta_2\tilde{\Delta}_2 b \sin \lambda] - \frac{M_2\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} [a\tilde{\Delta}_2 \cos \lambda + i(\beta_1\beta_2\tilde{\Delta}b + \tilde{\Delta}_1 a) \sin \lambda] + (\tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2)(\beta_1\beta_2 - \nu_x) \Big\}, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\tilde{\Delta}_1 = (\beta_1 + \beta_2)(\beta_1\beta_2 - \nu_x)(\beta_1\beta_2 + \nu_x)$ ;  $\tilde{\Delta}_2 = (\beta_1^2 - \nu_x)(\beta_2^2 - \nu_x)$ .

**Система сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь задачі.** Підстановка (9) при  $M_x = M_y = 0$  у граничні умови (2) призводить до системи двох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами для знаходження функцій  $f_1, f_2$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[ R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left( 1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt = \\ & = \frac{k}{\tilde{\Delta}} \left\{ (\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\beta_0}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt - \frac{M_1(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} (a\tilde{\Delta} + b\tilde{\Delta}_1) \cos \lambda - \right. \\ & \left. - \frac{M_1\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} a\tilde{\Delta}_2 \cos \lambda - \tilde{C}(a(\beta_1 + \beta_2) + b(\beta_1\beta_2 + \nu_x)) \sin \lambda + C_1 \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left( \frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[ R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt = \\ & = \frac{k}{\tilde{\Delta}} \left\{ (\beta_1\beta_2 + \nu_x) \int_{\beta_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi} \beta_1\beta_2 \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \sin \frac{\lambda - t}{2} dt - \frac{M_1(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} \beta_1\beta_2 \sin \lambda - \right. \\ & \left. + \frac{M_2\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}{\tilde{\Delta}_1} (\beta_1\beta_2\tilde{\Delta}b + \tilde{\Delta}_1 a) \sin \lambda + \tilde{C}(b\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2) + a(\beta_1\beta_2 + \nu_x)) \cos \lambda + C_2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\lambda \in [\alpha_0, \beta_0].$$

Тут  $C_1 = -\tilde{C}_1(\beta_1\beta_2 - \nu_x) - \tilde{c}_1$ ,  $C_2 = -\tilde{C}_2(\beta_1\beta_2 - \nu_x) - \tilde{c}_2$ .

Для визначення сталих  $\tilde{C}, C_1, C_2$  до системи (10) необхідно додати умови рівноваги підсилення [4]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt = 0, \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt = 0 \quad (11)$$

та умову однозначності прогину пластинки [7]

$$\int_{\gamma} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sigma^2} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \varepsilon - \frac{1}{\sigma^2} \right) \right] d\sigma = 0,$$

яку з урахуванням (9) можна перетворити до вигляду

$$\frac{2\varepsilon(\beta_1 + \beta_2)}{\pi} \int_{\gamma} [f_2'(t) \sin t - \beta_1 \beta_2 f_1'(t) \cos t] dt = \tilde{C} [2ab(\beta_1 \beta_2 + \nu_x) + (\beta_1 + \beta_2)(a^2 + \beta_1 \beta_2 b^2)]. \quad (12)$$

Якщо розв'язок задачі (10)–(12) стане відомим, то контактні моменти в зоні підсилення визначаються зі співвідношень

$$M_{\rho} + iP = \frac{(f_2' - if_1')\alpha + (f_1' - if_2')\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i\lambda}, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]. \quad (13)$$

Вирази для визначення внутрішніх згинальних  $L_{\rho}$  і крутних  $L_{\lambda}$  моментів у підсиленні мають вигляд

$$\begin{aligned} L_{\rho} &= f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta; \\ L_{\lambda} &= f_1 \sin \theta - f_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Кільцеві і крутні моменти на контурі  $L$  пластинки визначаються за формулами [6].

Зауважимо, що при  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  із (10)–(12) отримаємо розв'язок задачі для ізотропної пластинки з частково підсиленим еліптичним контуром [4].

Якщо  $g_2 = 0$ , то система (10)–(12) визначає розв'язок задачі про часткове підсилення контуру еліптичного отвору тонким пружним ребром, позбавленим жорсткості на кручення [1].

**Наближений розв'язок задачі.** Точний розв'язок системи (10)–(12) знайти неможливо. Для її наближеного розв'язання будемо використовувати числові методи.

Оскільки характеристична частина системи (10)–(12) має таку ж структуру, як і відповідна система для ізотропної пластинки [4], то наближений метод механічних квадратур і колокації її розв'язання переноситься без змін. Цим методом досліджено вплив ортотропії метаріалу пластинки на розподіл моментних напружень по контуру еліптичного ( $\varepsilon = 0.2$ ,  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 1$ ) отвору.

На рис. 2 наведено епюри контактних моментів  $M_{\rho}$  і  $P$  у зоні підсилення, а на рис. 3 – кільцевих  $M_{\lambda}$  і крутних  $H_{\rho\lambda}$  моментів на контурі отвору.

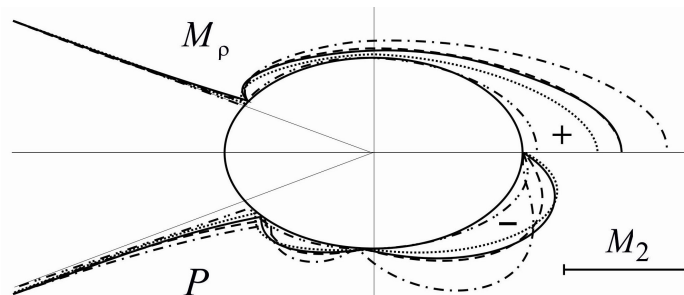


Рисунок 2. Розподіл контактних моментів у зоні підсилення

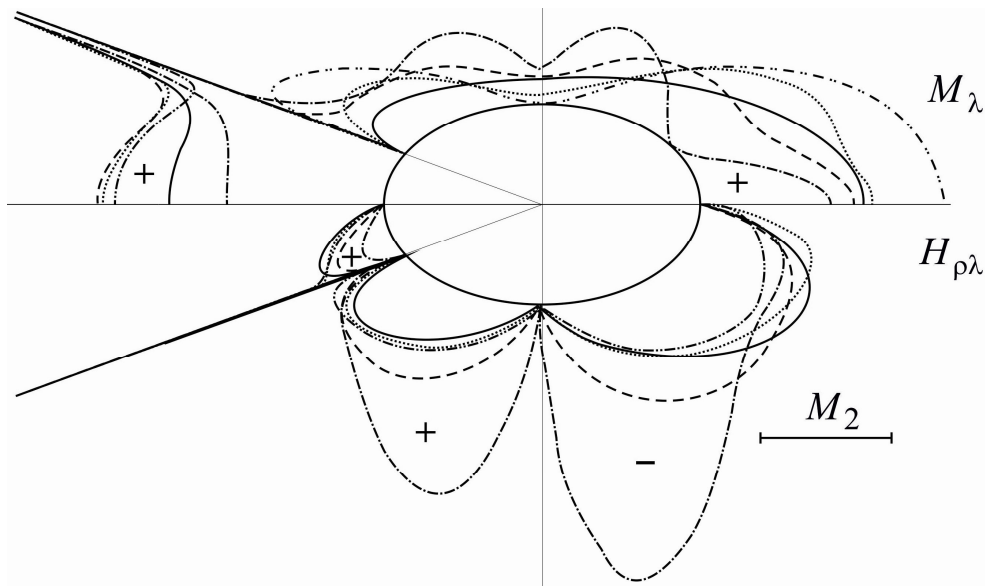


Рисунок 3. Розподіл кільцевих і крутних моментів на контурі отвору

Числові розрахунки проведені для підсилювального ребра сталого поперечного перерізу з параметрами  $\alpha_0 = -150^\circ$ ,  $\beta_0 = 150^\circ$ ,  $h_0/h = 1$ ,  $b_0/\rho_0 = 0.05$ ,  $b_0/h_0 = 1/3$ ,  $E_0/E_x = 10$ , ( $b_0$ ,  $2h_0$  – ширина і висота підсилення;  $E_0, E_x, E_y$  – модулі Юнга матеріалу підсилення та пластинки в напрямках осей  $Ox$  і  $Oy$  відповідно).

Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів і ліній, які відповідають їм на рис. 2, 3, наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Характеристики матеріалів і ліній, які відповідають їм на рисунках

Матеріал пластинки	$\beta_1$	$\beta_2$	$\nu_x$	$E_x/E_y$	Лінії
Ізотропний матеріал	1	1	0.300	1	—————
Скло-епоксид	2.2712	0.7626	0.250	3	-----
Графіт-епоксид	6.9992	0.7144	0.250	25	- . - . - . - .
Епоксид-скло	0.4400	1.3100	0.083	1/3	.....
Епоксид-графіт	0.1430	1.4010	0.010	1/25	- - - - -

**Висновки.** Зі збільшенням відношення  $E_x/E_y$  максимальні контактні  $M_\rho$  і  $P$  та крутні  $H_{\rho\lambda}$  моменти збільшуються, а кільцеві  $M_\lambda$  – зменшуються. В околі торців підсилення всі моментні напруження набувають необмежені значення.

Запропонований метод побудови системи інтегро-диференціальних рівнянь може бути використаний при розв'язанні задачі про передавання зосередженого згинального навантаження від підсилювального ребра до контуру отвору ортотропної пластинки.

#### Література

- Сяський, А. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами [Текст] / А. Сяський, С. Гаврюсев // Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2006. – Т. 11, №1. – С.12–17.
- Сяський, А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием [Текст] / А.А. Сяський // Прикл. математика и механика. – 1986. Т. 50, №2. – С. 247–254.

3. Сяський, А.А. Изгиб анизотропных пластин с криволинейными ребрами жесткости [Текст] / А.А. Сяський. – Ровно, 1988. – 14с. – Деп. в УкрНИИТИ 19.01.1989, №352-Ук 89.
4. Сяський, А. Напружений стан пластинки з частково підсиленням криволінійним контуром при її циліндричному згині [Текст] / А. Сяський, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т.16, №2. – С.30–36.
5. Лехницький, С.Г. Анизотропные пластинки [Текст] / С.Г. Лехницький. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464с.
6. Сяський, А. Основні інтегральні залежності в технічній теорії згину ортотропних пластин з еліптичним отвором [Текст] / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11, №4. – С.23–29.
7. Бережницький, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400с.

*Отримано 23.08.2011*