Ленюк М. Моделювання теплових процесів методом гібридного диференціального оператора Бесселя – Фур'є – Лежандра на сегменті полярної осі з м'якими межами / Ленюк М., Шелестовський Б. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 16. — № 3. — С.210-217. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.946

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; Б. Шелестовський[2], канд. фіз.-мат. наук

[1]Чернівецький факультет Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»
[2]Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ – ФУР'Є – ЛЕЖАНДРА НА СЕГМЕНТІ $[0, R_3]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Резюме. *Методом узагальненого скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя – Фур'є – Лежандра зі спектральним параметром отримано інтегральне зображення аналітичного розв'язку задачі теплопровідності на трискладовому сегменті $[0, R_3]$ полярної осі в припущенні, що межі середовища м'які відносно відбиття хвиль. Моделювання теплових процесів здійснено з допомогою гібридного диференціального оператора Бесселя – Фур'є – Лежандра.*

***Ключові слова**: моделювання теплових процесів, системи диференціальних рівнянь, гібридний диференціальний оператор, власні елементи, узагальнене гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, головні розв'язки.*

M. Lenyuk, B. Shelestovsky

MODELLING OF THERMAL PROCESSES BY THE BESSEL - FURIER - LEGENDER HYBRID DIFFERENTIAL OPERATOR METHOD ON THE SORT BOUNDS POLAR AXIS SEGMENT $[0, R_3]$.

The summary. *The method of generalized finite hybrid the integral transformation of Bessel - Fourier - Legendre spectral parameter obtained from the integral image of the analytical solution for the problem of heat conduction in three-part segment of the polar axis in the assumptions that limit soft environment with regard to wave reflection. Simulation of thermal processes feasible with hybrid differential Bessel - Fourier - Legendre.*

***Key words:** modeling of thermal processes, systems of differential equations, hybrid differential operator, own elements, generalized hybrid integral transformation, the basic identity, the key solutions.*

Вступ. Процеси теплопровідності, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, відіграють значну роль у технологічних процесах виробництв. Перші математичні дослідження розпочалися з найпростішого диференціального рівняння теплопровідності параболічного типу [1]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \chi^2 T - a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = f(t, r) \tag{1}$$

з відповідними початковими та крайовими умовами.

Потреби практики вимагали побудови адекватнішої математичної моделі процесів теплопередавання. Особливо слід відзначити появу в другій половині XX-го століття «Узагальненої термомеханіки», породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялись різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи розв'язання відповідних задач для диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь параболічного типу. Зауважимо, що майже завжди припускалося, що межа області є жорсткою відносно відбиття хвиль (в крайових умовах не брав участі оператор $\partial / \partial t$).

На особливу увагу заслуговує розроблений в 90-их роках XX-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів, що призвело до диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі теплопровідності в цьому випадку отримати неможливо.

Цих труднощів можна уникнути, якщо здійснити моделювання теплового процесу методом гібридних диференціальних операторів. При цьому межа середовища може бути м'якою відносно відбиття хвиль.

Метою роботи є моделювання нестаціонарних теплових процесів методом гібридного диференціального оператора Бесселя – Фур'є – Лежандра на сегменті $[0, R_3]$ з м'якими межами.

Постановка задачі. Побудуємо обмежений в області $D_2 = \{(t,r) : t \in (0;\infty);\ r \in I_2(0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,R_3); R_3 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha}[u_1] = f_1(t,r), \quad r \in (0,R),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_3^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = f_2(t,r), \quad r \in (R_1,R_2), \tag{2}$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)}[u_3] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2,R_3).$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r), \quad r \in (R_{j-1},R_j), \quad j = \overline{1,3}; \quad R_0 = 0, \tag{3}$$

крайовим умовами

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma} u_1(t,r)] = 0,\ (L_{22}^3[u_3(t,r)])\,|_{r=R_3} = g_R(t) \tag{4}$$

та умовами спряження

$$(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)])\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j,k = 1,2. \tag{5}$$

У рівностях (2) беруть участь диференціальні оператори Бесселя $B_{\nu,\alpha} = d^2/dr^2 + (2\alpha+1)r^{-1} d/dr - (\nu^2 - \alpha^2) r^{-2}$ [4], Фур'є d^2/dr^2 [5] та Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = d^2/dr^2 + cthr\, d/dr + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr})$ [6]; $2\alpha+1 > 0,\ \nu \ge \alpha$; $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$, $(\mu) = (\mu_1,\mu_2); a_j > 0,\ \gamma_j^2 \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

У рівності (4) та (5) беруть участь узагальнені крайові диференціальні оператори та узагальнені диференціальні оператори спряження

$$L_{jm}^k = (\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}; j,k = 1,2;\ m = \overline{1,3}.$$

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти

$$\alpha_{22}^3 \ge 0, \delta_{22}^3 \ge 0, \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0; \alpha_{jm}^k \ge 0, \delta_{jm}^k \ge 0, \beta_{jm}^k \ge 0, \gamma_{jm}^k \ge 0, c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0,$$
$$c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0, \delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k.$$

Основний результат. Розв'язок задачі (2) – (5) отримаємо методом скінченного гібридного інтегрального перетворення зі спектральним параметром, породженим на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\nu,\alpha} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 d^2/dr^2 + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 \Lambda_{(\mu)}. \qquad (6)$$

Тут $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Оскільки ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливих точок, то його спектр дійсний та дискретний [7].

Власні елементи (власні числа та відповідні їм власні вектор-функції) ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ знайдемо як ненульовий розв'язок спектральної задачі Штурма-Ліувілля: знайти на множині I_2 відмінний від нуля розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя, Фур'є та Лежандра

$$\begin{aligned} &(B_{\nu,\alpha} + b_1^2)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (0, R_1), \\ &\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_1, R_2), \\ &(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2)V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \qquad (7)$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}[r^\gamma V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)] = 0, \ [(\tilde{\alpha}_{22}^3 d/dr + \tilde{\beta}_{22}^3)V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)]\big|_{r=R_3} = 0 \qquad (8)$$

та умовами спряження

$$\left[(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k)V_{\nu,\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta) - (\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k)V_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0; \quad j,k = 1,2. \qquad (9)$$

У рівностях (7)–(9) беруть участь: спектральний параметр β та компоненти $V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ спектральної (власної) функції

$$V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{3}\theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)V_{\nu,\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta), \qquad (10)$$

функції $b_j(\beta) = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \ge 0$, $j = 1,3$; $\tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2)\delta_{jk}^m$ та

$$\tilde{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2)\gamma_{jk}^m, \ \gamma^2 \ge 0, m = \overline{1,3}, \ j,k = 1,2.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha} + q_1^2)v = 0$ складають функції $v_1 = J_{\nu,\alpha}(b_1 r)$ та $v_2 = N_{\nu,\alpha}(b_1 r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = \cos b_2 r$ та $v_2 = \sin b_2 r$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2)v = 0$ складають функції $v_1 = A_{\nu_3^*}^{(\mu)}(chr)$ та $v_2 = B_{\nu_3^*}^{(\mu)}(chr)$ [6], $\nu_3^* = -1/2 + ib_3$.

Якщо покласти

$$\begin{aligned} &V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha}(b_1 r) + B_1 N_{\nu,\alpha}(b_1 r), \ r \in (0, R_1), \\ &V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 \cos b_2 r + B_2 \sin b_2 r, \ r \in (R_1, R_2), \\ &V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 A_{\nu_3^*}^{(\mu)}(chr) + B_3 A_{\nu_3^*}^{(\mu)}(chr), \ r \in (R_2, R_1), \end{aligned} \qquad (11)$$

то в міру умови обмеження в точці $r = 0$ коефіцієнт $B_1 = 0$.

Умови спряження (9) й крайова умова в точці $r = R_3$ для визначення величин $A_j (j = \overline{1,3})$ та $B_k (k = 2,3)$ дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$u^{11}_{\nu,\alpha;j1}(b_1R_1)A_1 - v^{11}_{j2}(b_2R_1)A_2 - v^{12}_{j2}(b_2R_1)B_2 = 0,\ j = 1,2;$$
$$v^{21}_{j1}(b_2R_2)A_2 + v^{22}_{j1}(b_2R_2)B_2 - Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)A_3 - Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)B_3 = 0; \qquad (12)$$
$$Y^{(\mu),31}_{\nu_3^*;22}(chR_3)A_3 + Y^{(\mu),32}_{\nu_3^*;22}(chR_3)B_3 = 0.$$

Функції, що беруть участь у системі (12), загальноприйняті [8].

Введемо до розгляду такі функції:

$$\delta_{jk}(b_2R_1, b_2R_2) = v^{11}_{j2}(b_2R_1)v^{22}_{k1}(b_2R_2) - v^{12}_{j2}(b_2R_1)v^{21}_{k1}(b_2R_2),\ j,k = 1,2;$$
$$\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*;j2}(chR_2, chR_3) = Y^{(\mu),21}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)Y^{(\mu),32}_{\nu_3^*;22}(chR_3) - Y^{(\mu),22}_{\nu_3^*;j2}(chR_2)Y^{(\mu),31}_{\nu_3^*;j2}(chR_3),\ j = 1,2;$$
$$a_{\nu,\alpha;j}(\beta) = u^{11}_{\nu,\alpha;11}(b_1R_1)\delta_{2j}(b_2R_1, b_2R_2) - u^{11}_{\nu,\alpha;21}(b_1R_1)\delta_{1j}(b_2R_1, b_2R_2),\ j = 1,2$$

Для того, щоб алгебраїчна система (12) мала ненульові розв'язки, необхідно й достатньо, щоб її визначник був відмінний від нуля [9]:

$$\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\beta) \equiv a_{\nu,\alpha;1}(\beta)\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*,22}(chR_2, chR_3) - a_{\nu,\alpha;2}(\beta)\delta^{(\mu)}_{\nu_3^*,12}(chR_2, chR_3) = 0 \qquad (13)$$

Ми отримали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$.

Підставимо $\beta = \beta_n$ $(b_j(\beta_n) \equiv b_{jn})$ у систему (12) й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності.

При $A_1 \neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2

$$v^{11}_{j2}(b_{2n}R_1)A_2 + v^{12}_{j2}(b_{2n}R_1)B_2 = u^{11}_{\nu,\alpha;j1}(b_{1n}R_1)A_1,\ j = 1,2\ .$$

Звідси знаходимо, що

$$A_2 = \frac{A_1}{c_{21}b_{2n}}[u^{11}_{\nu,\alpha;11}(b_{1n}R_1)v^{12}_{22}(b_{2n}R_1) - u^{11}_{\nu,\alpha;21}(b_{1n}R_1)v^{12}_{12}(b_{2n}R_1)],$$
$$B_2 = -\frac{A_1}{c_{21}b_{2n}}[u^{11}_{\nu,\alpha;11}(b_{1n}R_1)v^{11}_{22}(b_{2n}R_1) - u^{11}_{\nu,\alpha;21}(b_{1n}R_1)v^{11}_{12}(b_{2n}R_1)]. \qquad (14)$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо систему стосовно A_3, B_3

$$Y^{(\mu),21}_{\nu^*_{3n},j2}(chR_2)A_3 + Y^{(\mu),22}_{\nu^*_{3n},j2}(chR_2)B_3 = -\frac{A_1}{c_{21}b_{2n}}a_{\nu,\alpha;j}(\beta_n),\ j = 1,2; \nu^*_{3n} = -1/2 + ib_{3n}\ .$$

Звідси знаходимо, що

$$A_3 = -\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta_n),\ B_3 = \omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta_n),\ A_1 = c_{21}b_{2n}\frac{c_{22}}{S_{(\mu)}(b_{3n})shR_2},$$
$$\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(\beta_n) = a_{\nu,\alpha;1}(\beta_n)Y^{(\mu),2j}_{\nu^*_{3n;22}}(chR_2) - a_{\nu,\alpha;2}(\beta_n)Y^{(\mu),2j}_{\nu^*_{3n;12}}(chR_2); \qquad (15)$$
$$S_{(\mu)}(b_{3n}) = \frac{2^{\mu_1}\pi^3\cos\mu_1\pi}{2^{\mu_2}(\cos\mu_2\pi + \cos\mu_2\pi ch(2\pi b_{3n}))}(|\Gamma(1/2 + ib_{3n} + \nu^+_{12})|^2)^{-1} \times$$
$$\times(|\Gamma(1/2 + ib_{3n} + \nu^-_{12})|^2)^{-1},\ \nu^{\pm}_{12} = 1/2(\mu_1 \pm \mu_2).$$

Підставивши в рівності (11) визначені згідно з формулами (14) та (15) коефіцієнти A_j, B_k, отримуємо такі функції:

$$V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)=c_{21}c_{22}b_{2n}(S_{(\mu)}(b_{3n})shR_2)^{-1}J_{\nu,\alpha}(b_{1n}r),$$

$$V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)=\frac{c_{22}}{S_{(\mu)}(b_{3n})shR_2}[u_{\nu,\alpha;11}^{11}(b_{1n}R_1)\varphi_{22}^1(b_{2n}R_1,b_{2n}r)-u_{\nu,\alpha;21}^{11}(b_{1n}R_1)\varphi_{12}^1(b_{2n}R_1,b_{2n}r)],\tag{16}$$

$$\varphi_{j2}^1(b_{2n}R_1,b_{2n}r)=v_{j2}^{12}(b_{2n}R_1)\cos b_{2n}r-v_{j2}^{11}(b_{2n}R_1)\sin b_{2n}r,\ j=1,2;$$

$$V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)=\omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)B_{\nu_{3n}^*}^{(\mu)}(chr)-\omega_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n)A_{\nu_{3n}^*}^{(\mu)}(chr).$$

Згідно з формулою (10) спектральна вектор-функція визначена.

Визначимо числа

$$\sigma_1=\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{shR_2}{R_1^{2\alpha+1}},\ \sigma_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}shR_2,\ \sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1r^{2\alpha+1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3shr\tag{17}$$

та узагальнений квадрат норми власної функції [10].

$$\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2=\int_0^{R_0}[V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr+G_2(\beta_n,\beta_n).\tag{18}$$

Згідно з роботою [10] сформулюємо потрібні в даному випадку твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)=0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta=0$ й на півосі $\beta>0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

Теорема 2 (про спектральну функцію). Система $\{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій узагальнено ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$ на множині I_2, повна і замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ з області визначення ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ зображається за системою $\{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$, абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є:

$$g(r)=\sum_{n-1}^{\infty}\int_0^{R_3}g(\rho)V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\frac{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2}.\tag{19}$$

Ряд Фур'є (19) визначає пряме $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ та обернене $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ узагальнене скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]=\int_0^{R_3}g(r)V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}_n,\tag{20}$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\frac{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2}\equiv g(r).\tag{21}$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\{B_{\nu,\alpha}[g_1(r)];g_2''(r);\Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to0}[r^{\gamma}g_1(r)]=0,\ [(\tilde{\alpha}_{22}^3d/dr+\tilde{\beta}_{22}^3)g_3(r)]|_{r=R_3}=g_R\tag{22}$$

та умови спряження

$$[(\tilde{\alpha}_{j1}^kd/dr+\tilde{\beta}_{j1}^k)g_k(r)-(\tilde{\alpha}_{j2}^kd/dr+\tilde{\beta}_{j2}^k)g_{k+1}(r)]|_{r=R_k}=\omega_{jk};\ j,k=1,2,\tag{23}$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2 \widetilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \widetilde{g}_{in} + (\widetilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\times$$
$$\times \sigma_3 shR_3 g_R + \sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}]. \quad (24)$$

У рівності (24) беруть участь такі величини та функції:

$$d_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha+1} : c_{11,1},\ d_2 = \sigma_2 : c_{21,1}, \widetilde{g}_{1n} = \int_0^{R_1} g_1(r) V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha+1} dr,$$

$$\widetilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 dr,\ \widetilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 shr dr,$$

$$Z_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta_n) = (\widetilde{\alpha}_{i2}^k \frac{d}{dr} + \widetilde{\beta}_{i2}^k) V_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)|_{r=R_k}; i,k = 1,2.$$

Правила (20), (21) та (24) складають математичний апарат для розв'язання задачі теплопровідності (2)–(5).

Запишемо систему (2) й початкові умови (3) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 B_{\nu,\alpha}) u_1(t,r) \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}) u_2(t,r) \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)}) u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \end{bmatrix}, \left.\begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ згідно з правилами (20) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[...] = [\int_0^{R_1} ... V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha+1} dr\ \int_{R_1}^{R_2} ... V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 dr$$
$$\int_{R_2}^{R_3} ... V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 shr dr]. \quad (26)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (26) до задачі (25) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (24) отримаємо задачу Коші [5]:

$$\frac{d\widetilde{u}_n}{dt} + (\beta_n^2 + q^2)\widetilde{u}_n = \widetilde{F}_n(t),\ \widetilde{u}_n(t)|_{t=0} = \widetilde{g}_n. \quad (27)$$

У рівностях (27)

$$q^2 = \max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\},\ \widetilde{F}_n(t) = \widetilde{f}_n(t) + (\widetilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\sigma_3 g_R(t) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k}(t) - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}(t)].$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (27) є функція

$$\widetilde{u}_n(t) = e^{-(\beta_n^2+q^2)t}\widetilde{g}_n + \int_0^t e^{-(\beta_n^2+q^2)(t-\tau)}\widetilde{F}_n(\tau)d\tau. \quad (28)$$

Оператор $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ згідно з правилами (21) як обернений до (26) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[...] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} ...V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)(\| V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2)^{-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} ...V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)(\| V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2)^{-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} ...V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)(\| V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2)^{-1} \end{bmatrix} \qquad (29)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (29) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\widetilde{u}_n(t)]$, де функція $\widetilde{u}_n(t)$ визначена формулою (28). У результаті низки елементарних перетворень маємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку параболічної задачі (2) – (5):

$$u_j(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{u}_n(t)V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)(\| V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2)^{-1} = \sum_{k=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;jk}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)[f_k(\tau,\rho)+$$

$$+\delta_+(\tau)g_k(\rho)]\varphi_k(\rho)d\rho d\tau + \int_0^t W_{\nu,\alpha;3j}^{(\mu)}(t-\tau,r)g_R(\tau)d\tau + \qquad (30)$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k\int_0^t[\mathcal{R}_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),kj}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau) - \mathcal{R}_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),kj}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)]d\tau,\ j=\overline{1,3}.$$

Тут $\varphi_1(r) = r^{2\alpha+1}, \varphi_2(r) = 1, \varphi_3(r) = shr,\ \delta_+(t)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $t = 0^+; R_0 = 0.$

У формулі (30) беруть участь головні розв'язки даної параболічної задачі:

1) породжені неоднорідністю системи (2) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+q^2)t}V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)V_{\nu,\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)(\| V_{\nu,\alpha k}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2)^{-1}; \qquad (31)$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{\nu,\alpha;3j}^{(\mu)}(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+q^2)t}(\widetilde{\alpha}_{22})^{-1}V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\frac{V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\| V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2}\sigma_3 shR_3;\ j=\overline{1,3}; \qquad (32)$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}_{\nu,\alpha;i2}^{(\mu),kj}(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta_n^2+q^2)t}Z_{\nu,\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta_n)\frac{V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\| V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2}d_k;\ i,k=1,2;\ j=\overline{1,3}.$$

Зауваження 1. Якщо $q^2 = \gamma_1^2 > 0$, то $k_1^2 = 0, k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \ge 0,\ k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2;$ якщо $q^2 = \gamma_2^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \ge 0, k_2^2 = 0, k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \ge 0$; якщо $q^2 = \gamma_3^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \ge 0, k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \ge 0, k_3^2 = 0.$

Зауваження 2. Ми вважаємо, що початкові умови $g_j(r)$ такі, що мають місце рівності

$$g_R^* \equiv \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3) = 0$$

$$\omega_{jk}^* \equiv \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}'(R_k)] = 0,\ j,k = 1,2 \qquad (34)$$

Якщо рівності (34) не виконуються, то можна перейти до нових початкових даних $\psi_j(r) = g_j(r) - (a_j r + b_j), j = 1,3, b_1 = 0.$

Коефіцієнти a_1, a_2, a_3, b_2, b_3 знайдемо із системи рівнянь

$$(\delta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k R_k)a_k + \gamma_{j1}^k b_k - [(\delta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k R_k)a_{k+1} + \gamma_{j2}^k b_{k-1}] = \omega_{jk}^*$$
$$(\delta_{22}^3 a_3 + \gamma_{22}^3 R_3)a_3 + \gamma_{22}^3 b_3 = g_R^*. \qquad (35)$$

При умовах на коефіцієнти $\delta_{jm}^k \geq 0$ та $\gamma_{jm}^k \geq 0$ система (35) має єдиний розв’язок.

Зауваження 3. Якщо не змінювати початкові умови, то в рівності (30) додадуться доданки

$$u_j^* \equiv W_{\nu,\alpha;3j}^{(\mu)}(t,r)g_R^* + \sum_{k=1}^{2} d_k [\mathcal{R}_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),kj}(t,r)\omega_{2k}^* - \mathcal{R}_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),kj}(t,r)\omega_{1k}^*].$$

Як правило, з фізичної точки зору завжди можна вважати, що початкові умови нульові, тобто $g_j(r) = 0$ для $j = \overline{1,3}$.

Зауваження 4. При $\delta_{jm}^k = 0$ та $\gamma_{jm}^k = 0$ отримуємо розв’язок параболічної задачі для випадку, коли межі середовища жорсткі відносно відбиття хвиль.

Висновок. Отримані функції $u_j(t,r)$ поліпараметричні. Це дає можливість вибором параметрів виділяти із загальних структур будь-який частковий випадок (у рамках даної моделі). Накінець, отриманий розв’язок задачі теплопровідності носить алгоритмічний характер. Це дає змогу застосовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

Література

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735с.
2. Подстригач, Я.С. Обобщенная термомеханика [Текст] / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наукова думка, 1976. – 310с.
3. Коляно, Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела [Текст] / Ю.М. Коляно. – К.: Наукова думка, 1992. – 280с.
4. Ленюк, М.П. Исследования основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя [Текст] / М.П. Ленюк. – Киев, 1983. – 62с. (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
5. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
6. Конет, І.М. Інтегральні переторення типу Мелера–Фока [Текст] / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2002. – 248с.
7. Ленюк, М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур’є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 [Текст] / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368с.
8. Ленюк, М.П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики [Текст] / М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2010. – 352с.
9. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432с.
10. Ленюк, М.П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження [Текст] / М.П. Ленюк, В.В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314–315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 105–113.

Отримано 18.05.2011