

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Тернопільський державний технічний університет**  
**імені Івана Пулюя**  
**Кафедра фізики**

**М Е Х А Н І К А   Т А**  
**М О Л Е К У Л Я Р Н А   Ф І З И К А**

Лабораторний практикум

**Тернопіль**  
**2017**

Механіка та молекулярна фізика. Лабораторний практикум / Укладачі: Дідух Л.Д., Скоренький Ю.Л., Крамар О.І., Довгоп'ятий Ю.М., Ганкевич В.В. - Тернопіль, ТНТУ, 2017.- 136 с.

*Збірник містить методичні вказівки до лабораторних робіт, поставлених у рамках курсу фізики, що читається для студентів очної форми навчання у ТНТУ імені Івана Пулюя за навчальними планами підготовки бакалаврів.*

Укладачі: **професор Леонід Дідух,**  
**доцент Юрій Скоренький,**  
**доцент Олександр Крамар,**  
**асистент Юрій Довгоп'ятий,**  
**старший науковий співробітник Василь Ганкевич**

Відповідальний за випуск – **професор Леонід Дідух**

Рецензент – **доцент Андрій Пундик**

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
ВСТУПНЕ ЗАНЯТТЯ .....	5
1. Обробка результатів фізичних вимірювань.....	5
2. Вимірювальні прилади.....	32
3. Підготовка до лабораторної роботи, її виконання та форма звітності.....	39
ЛР № 1: Визначення густини тіла правильної геометричної форми.....	40
ЛР № 2: Вивчення законів поступального руху на машині Атвуда.....	44
ЛР № 3: Вивчення обертального руху твердого тіла на прикладі маятника Обербека.....	49
ЛР № 4: Визначення моменту інерції махового колеса та моменту сили тертя в опорі.....	56
ЛР № 5: Визначення моменту інерції тіла за допомогою крутильного маятника FPM-5.....	63
ЛР № 6: Визначення модуля Юнга методом прогину стержня.....	70
ЛР № 7: Застосування фізичного маятника для визначення прискорення вільного падіння .....	74
ЛР № 8: Визначення логарифмічного декременту та коефіцієнта згасання коливань .....	77
ЛР № 9: Вивчення законів механіки при дослідженні крутильних коливань .....	82
ЛР № 10: Визначення швидкості звуку в повітрі методом інтерференції.....	90
ЛР № 11: Визначення коефіцієнта динамічної в'язкості рідини методом Стокса .....	94
ЛР № 12: Визначення коефіцієнта динамічної в'язкості рідини капілярним віскозиметром .....	99
ЛР № 13: Визначення середньої довжини вільного пробігу та ефективного діаметра молекул повітря за допомогою визначення коефіцієнта внутрішнього тертя .....	104
ЛР № 14: Вивчення основних понять і законів молекулярної фізики і термодинаміки. Визначення відношення теплоємностей $C_p/C_V$ для повітря .....	109
ЛР № 15: Визначення коефіцієнта поверхневого натягу рідини методом порівняння крапель .....	116
ЛР № 16: Визначення коефіцієнта поверхневого натягу рідини методом відриву кільця .....	120
ЛР № 17: Визначення температурного коефіцієнта лінійного розширення твердих тіл.....	124
ДОДАТОК А.....	128

## ПЕРЕДМОВА

Лабораторний практикум містить опис лабораторних робіт, виконуваних у лабораторії механіки та молекулярної фізики Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, а також матеріали, необхідні для підготовки до лабораторних робіт, їх виконання та звітності про виконану лабораторну роботу. Детально (з конкретними прикладами) описано методику обробки результатів вимірювання фізичних величин. Наведено необхідний для виконання лабораторних робіт довідковий матеріал.

При укладанні посібника ми виходили з того, що завданням лабораторного практикуму у вищому технічному навчальному закладі, насамперед, є: 1) проілюструвати теоретичні положення і закони фізики; 2) ознайомити студентів з вимірювальними приладами, навчити працювати з ними; 3) прищепити студентам навички виконання експериментальних досліджень та вміння обробляти результати експерименту. Лабораторний практикум повинен сприяти виробленню вмінь застосовувати теоретичні знання до розгляду конкретних фізичних явищ, бути важливою ланкою у тріаді теоретичний матеріал – лабораторний практикум – розв'язування задач. Важливість лабораторного практикуму в останній час посилюється у зв'язку із особливостями нових навчальних планів з ряду дисциплін; це змушує розширити традиційні функції лабораторного практикуму, шукати нові форми і методи проведення лабораторних занять.

Методологія, покладена в основу пропонованого посібника, на нашу думку, має сприяти реалізації відзначеного вище.

Особливостями практикуму є те, що: 1) необхідний теоретичний матеріал подається у повному обсязі до кожної лабораторної роботи (з метою забезпечення максимальної зручності при підготовці до виконання даної лабораторної роботи); 2) теоретичний матеріал викладається “з прив'язкою” до конкретної лабораторної роботи; 3) виведення робочих формул дається в органічному зв'язку з теоретичним матеріалом. Ми також вважаємо доцільним введення двох підсумкових (оглядових) лабораторних робіт – з механіки (“Вивчення законів механіки за допомогою крутильного маятника”) й молекулярної фізики та термодинаміки (“Вивчення основних понять та законів молекулярної фізики і термодинаміки. Визначення відношення  $C_p/C_v$  для повітря”). Методика проведення лабораторних занять із виконанням таких робіт може бути як традиційною, так і суттєво модифікованою (у вигляді колоквиуму). Розширенню функцій лабораторного практикуму сприятимуть і “Завдання для самостійних робіт” (що виконуються за методикою, рекомендованою викладачем). Матеріал посібника дозволяє урізноманітнювати проведення занять, виконувати конкретні роботи в залежності від ступеня підготовки студентів та кількості годин, відведених на лабораторні заняття.

Навчальний посібник написаний з урахуванням досвіду методичного забезпечення лабораторного практикуму у вищих навчальних закладах України. Ми вдячні проф. Лопатинському І.Є., проф. Лукіяню Б.А., проф. Стасюку З.В., проф. Федосову А.В., проф. Фуртаку С.П., доц. Жежничу І.В., доц. Кушніру О.Б., доц. Середі В.М., доц. Френчку В.С. за надані методичні матеріали та обговорення ряду питань методичного забезпечення лабораторного практикуму. Корисним для нас був навчально-методичний посібник “Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з фізики. Ч.1” (укладач Р.С.Коземчук), який слугував методичному забезпеченню лабораторного практикуму з механіки та молекулярної фізики у нашому навчальному закладі протягом ряду років.

Ми вдячні викладачам кафедри за зауваження, поради щодо цього посібника.

Окремо хочемо подякувати доц. Пундику А.В. за ретельне рецензування.

*Укладачі*

# 1 ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ФІЗИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Виконання лабораторних робіт пов'язане, насамперед, з вимірюванням фізичних величин та математичною обробкою результатів вимірювань.

Наука про вимірювання, способи досягнення необхідної точності, методи і засоби, які використовуються при цьому, називається метрологією.

З'ясуємо основні поняття фізичної метрології; при цьому ми будемо дотримуватися термінологічних означень, прийнятих Держстандартом України (ДСТУ 2681-94).

## 1.1 Вимірювання фізичних величин (основні поняття)

Ключовою ланкою процесу пізнання у фізиці є вимірювання фізичних величин.

Вимірювання фізичної величини означає знаходження її значення дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів та обчислень; виміряти фізичну величину означає порівняти її з іншою однорідною фізичною величиною, прийнятою за одиницю (еталон) вимірювання. Значення фізичної величини – це відображення фізичної величини у вигляді числового значення величини з позначенням її одиниці (1,5 кг, 20 м).

Розрізняють два типи вимірювань фізичних величин – прямі і непрямі (посередні або опосередковані).

При прямому вимірюванні значення фізичної величини визначається безпосередньо за допомогою приладу, який вимірює саме цю величину. Наприклад, лінійні розміри тіла можна безпосередньо знайти за показами лінійки, штангенциркуля, мікрометра.

При непрямому вимірюванні значення фізичної величини знаходять на основі результатів прямих вимірювань інших фізичних величин, з якими шукана фізична величина пов'язана певною функціональною залежністю. Так, наприклад, густину  $\rho$  тіла циліндричної форми можна визначити за допомогою формули  $\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}$ , тут маса тіла  $m$ ,  $d$  і  $h$  (діаметр циліндра і його висота) визначаються прямими вимірюваннями.

В залежності від прийнятого методу вимірювань значення деяких фізичних величин можна знайти як шляхом прямих, так і непрямих вимірювань. Так, наприклад, об'єм тіла циліндричної форми можна знайти прямим вимірюванням, занурюючи його в мірний циліндр з рідиною, а можна (за допомогою формули  $V = \frac{\pi d^2 h}{4}$ ) і шляхом прямих вимірювань  $d$  і  $h$ .

Через вплив різноманітних факторів результат кожного окремого вимірювання фізичної величини відрізняється від її істинного значення\*; будь-які вимірювання супроводжуються похибками вимірювання. Мірою похибки є різниця між істинним значенням величини і результатом вимірювання.

Похибки вимірювання зумовлені недосконалістю вимірювальних приладів, такими збурюючими факторами, як коливання температури і тиску повітря, конвекційними потоками повітря, впливом вібрацій, обмеженими можливостями органів зору людини, з допомогою яких у багатьох випадках відбувається реєстрація показів приладів і т.д.

---

\* Істинне значення – значення фізичної величини, яке ідеально відображало б певну властивість об'єкта

Розрізняють три типи похибок: надмірні похибки (грубі помилки, промахи), систематичні та випадкові похибки вимірювання.

**Надмірні похибки** зумовлені або несправністю вимірювальних приладів, або різкою зміною умов вимірювання, або неухважністю експериментатора. Ці похибки не підлягають математичній обробці, вони мають бути виявлені, а результати відкинуті; замість них проводять нові вимірювання.

**Систематична похибка** – складова похибки, що залишається сталою, або прогнозовано змінюється при повторних вимірюваннях цієї ж величини. Систематичні похибки поділяються на методичні (похибки методу) та інструментальні (похибки приладів).

Методична похибка (похибка методу) зумовлена недоліками використовуваного методу вимірювання, недосконалістю теорії, що описує дане явище, або наближеннями, які використовуються в даній роботі. Наприклад, при зважуванні на аналітичних терезах з високою точністю буде допущена методична помилка, якщо не буде врахована сила Архімеда, яка діє на тіло, що зважується, і на важки. Методичні похибки можна зменшити (але не усунути повністю) шляхом удосконалення методу вимірювання та уточнення розрахункових формул.

Інструментальна похибка (похибка приладу) зумовлена властивостями засобів вимірювання (неточністю виготовлення приладу, недоліками в конструкції приладу). Інструментальна похибка може бути зменшена заміною даного приладу більш досконалим.

**Випадковою похибкою** називається складова похибки, яка не прогнозовано змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини. Випадкові похибки зумовлені неконтрольованим впливом різноманітних факторів (про це вже йшла мова вище). Ці впливи можна зменшити, але повністю усунути неможливо. За рахунок випадкових похибок результати окремих спостережень\* можуть бути як більші, так і менші від істинного значення величини.

Випадкові похибки можна зменшити шляхом багаторазових вимірювань; при цьому відбувається часткова компенсація випадкових відхилень результатів спостережень у бік завищення і в бік заниження. Існують надійні способи врахування випадкових похибок при математичній обробці результатів вимірювання, які ґрунтуються на теорії ймовірностей. При цьому поряд з поняттям істинне значення вимірюваної величини (яке нам невідоме) користуються поняттям умовно істинне\*\* значення фізичної величини (дійсне значення фізичної величини).

## **1.2 Прямі вимірювання: середнє значення вимірюваної величини, абсолютна похибка, відносна похибка, результат вимірювання**

В прямих вимірюваннях шукана величина знаходиться за показами приладів. При цьому неминучі відхилення виміряних значень величини від істинного (розкид експериментальних даних) за рахунок як випадкових, так і інструментальних похибок. Постає питання обробки результатів прямих вимірювань.

---

\* спостереження при вимірюванні – експериментальна процедура, в результаті якої знаходять одне значення з групи виміряних значень величини.

\*\* умовно істинне значення фізичної величини (дійсне значення фізичної величини) – значення фізичної величини, знайдене експериментальним шляхом і настільки наближене до істинного значення, що його можна використати замість істинного для певної мети.

Нехай, для прикладу, серія ретельних вимірювань (промахи відсутні) діаметра циліндричного стержня за допомогою штангенциркуля дала результати:

$$d_1 = 8,5 \text{ мм,}$$

$$d_2 = 8,9 \text{ мм,}$$

$$d_3 = 8,6 \text{ мм,}$$

$$d_4 = 8,6 \text{ мм,}$$

$$d_5 = 9,0 \text{ мм.}$$

Яке значення  $d$  є “найкращим” (яким потрібно користуватися, наприклад, при визначенні маси стержня за його відомими густиною та довжиною)? Як врахувати похибки вимірювань?

На ці питання дає відповідь теорія вимірювань, основні положення якої викладені нижче.

### 1.2.1 Середнє значення вимірюваної величини

Відповідь на перше з поставлених вище запитань така. Найбільш близьким до істинного значення вимірюваної величини є середнє арифметичне значення результатів спостереження; у випадку, що розглядається, найкращою величиною діаметра є:

$$\langle d \rangle = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} = 8,72 \text{ мм} \approx 8,7 \text{ мм.}$$

У загальному випадку: якщо внаслідок повторних вимірювань, проведених в однакових умовах, для величини  $X$  отримали значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (деякі з них можуть співпадати), то найбільш близьким до істинного значення вимірюваної величини є середнє арифметичне значення величин вимірювання:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (1)$$

де  $n$  – число вимірювань (спостережень).

Важливо, що із збільшенням числа вимірювань  $n$  величина  $\langle x \rangle$  стає все ближчою до істинного значення величини  $X$ ; це є наслідком того, що збільшення числа вимірювань призводить до все повнішої компенсації значень величини  $X$ , більших від істинного, і значень, менших від істинного.

### 1.2.2 Абсолютна та відносна похибки

#### 1.2.2.1 Поняття про абсолютну та відносну похибки

Якщо виміряні значення величини  $X$  є  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (результати спостережень), то різниця між істинним значенням величини  $x_0$  і результатом окремого спостереження  $x_i$  називається абсолютною похибкою окремого вимірювання  $\Delta x_i$ :

$$\Delta x_i = x_0 - x_i.$$

Оскільки величина  $x_0$  невідома, а найкращим значенням величини  $X$  є середнє арифметичне  $\langle x \rangle$ , то величинами, які використовуються при обробці експериментальних даних, є:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \langle x \rangle - x_1, \\ \Delta x_2 &= \langle x \rangle - x_2, \\ &\dots \\ \Delta x_n &= \langle x \rangle - x_n,\end{aligned}\tag{2}$$

- відхилення результатів спостережень від середнього. Величини  $\Delta x_i$  можуть бути як додатні, так і від'ємні, оскільки серед  $x_i$  є величини як більші від  $\langle x \rangle$ , так і менші від  $\langle x \rangle$ .

Завдання теорії похибок полягає у знаходженні (оцінюванні) абсолютної похибки результату вимірювання  $\Delta x$  ( $\Delta x > 0$ ) за відомими відхиленнями  $\Delta x_i$  і поданні результату вимірювання величини  $x$  у вигляді:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x;\tag{3}$$

це означає, що істинне значення величини  $X$  знаходиться в проміжку між  $\langle x \rangle - \Delta x$  і  $\langle x \rangle + \Delta x$ . Абсолютна похибка результату вимірювання  $\Delta x$  є мірою відхилення середнього значення  $\langle x \rangle$  від істинного значення величини  $x_0$ . Послідовна теорія вимірювань дозволяє також вказати ймовірність того, що істинне значення величини  $X$  справді знаходиться в проміжку між  $\langle x \rangle - \Delta x$  і  $\langle x \rangle + \Delta x$ .

Величина

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x},\tag{4}$$

яка є мірою точності вимірювання, називається відносною похибкою (детальніше – див. п. 1.2.5).

Опишемо два підходи до оцінювання абсолютної похибки  $\Delta x$  за відомими  $\Delta x_i$  – метод середньої арифметичної абсолютної похибки і метод середньої квадратичної похибки. При цьому в п. 1.2.2 ми будемо вважати, що розкид експериментальних даних зумовлений лише випадковими похибками (про врахування систематичних похибок див. далі - п.1.2.3, 1.2.4).

### 1.2.2.1 Метод середньої арифметичної абсолютної похибки

Середньою арифметичною абсолютною похибкою результату вимірювання є сума абсолютних похибок окремих вимірювань, взятих за абсолютною величиною, поділена на число спостережень  $n$ :

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots + |\Delta x_n|}{n} = \frac{\sum_i |\Delta x_i|}{n}.\tag{5}$$

Результат вимірювання величини  $X$  за умови, що абсолютна похибка визначається як середньоарифметична похибка  $\langle \Delta x \rangle$  є:

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta x \rangle.\tag{6}$$

Він означає, що істинне значення величини  $X$  лежить у проміжку між  $\langle x \rangle - \langle \Delta x \rangle$  і  $\langle x \rangle + \langle \Delta x \rangle$ .

Для прикладу, що розглядається, із вимірюванням діаметра стержня  $d$  середня абсолютна похибка ( $\langle \Delta x \rangle \rightarrow \langle \Delta d \rangle$ )

$$\langle \Delta d \rangle = \frac{|\Delta d_1| + |\Delta d_2| + |\Delta d_3| + |\Delta d_4| + |\Delta d_5|}{5},$$

де

$$\Delta d_1 = 8,7 \text{ мм} - 8,5 \text{ мм} = 0,2 \text{ мм},$$

$$\begin{aligned}\Delta d_2 &= 8,7 \text{ мм} - 8,9 \text{ мм} = -0,2 \text{ мм}, \\ \Delta d_3 &= 8,7 \text{ мм} - 8,6 \text{ мм} = 0,1 \text{ мм}, \\ \Delta d_4 &= 8,7 \text{ мм} - 8,6 \text{ мм} = 0,1 \text{ мм}, \\ \Delta d_5 &= 8,7 \text{ мм} - 9,0 \text{ мм} = -0,3 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Маємо:

$$\Delta d = \frac{0,2 + |-0,2| + 0,1 + 0,1 + |-0,3|}{5} = 0,18 \text{ мм} \approx 0,2 \text{ мм}$$

при заокругленні похибки до однієї значущої цифри.

Результат вимірювань діаметра стержня запишемо так:

$$d = (8,7 \pm 0,2) \text{ мм}.$$

Спосіб визначення абсолютної похибки, описаний вище, - надто спрощений метод обробки результатів вимірювань. Результат вимірювання у вигляді (6) має принциповий недолік: він не несе в собі жодної інформації щодо ймовірності знаходження істинного значення в інтервалі значень  $\langle x \rangle - \Delta x$   $\langle x \rangle + \Delta x$  (без задання такої ймовірності відсутня певність щодо результату вимірювання, його надійності). Разом з тим, при виконанні лабораторних робіт метод середньої арифметичної похибки може використовуватися як спрощений спосіб обробки результатів вимірювань.

Надійне опрацювання результатів експерименту дає метод середньої квадратичної похибки.

### 1.2.2.2 Метод середньої квадратичної похибки

Послідовний аналіз результатів експерименту, знаходження похибок вимірювання ґрунтується на теорії ймовірностей з використанням наступних властивостей  $x_i$  і  $\Delta x_i$  як випадкових величин (вони розподілені за так званим нормальним законом):

1. Поява більшої похибки менш ймовірна, ніж поява меншої похибки.
2. Із збільшенням числа вимірювань відбувається все більша компенсація додатних і від'ємних значень  $\Delta x_i$ ; при великому числі вимірювань похибки  $\Delta x_i$  приблизно однакової величини, але з протилежним знаком, зустрічаються однаково часто.
3. Збільшення числа вимірювань наближає  $\langle x \rangle$  до істинного значення величини  $x_0$ .

Висновки, які отримуються при цьому, - наступні.

Якщо виміряні значення фізичної величини  $X$  є випадкові величини  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

то:

- найбільш вірогідне значення величини  $X$  є середнє арифметичне

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

- результат вимірювання величини  $X$  подається у формі

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x. \quad (7)$$

При цьому вказується ймовірність  $P$  того, що істинне значення величини  $X$  справді лежить в інтервалі між  $\langle x \rangle - \Delta x$  і  $\langle x \rangle + \Delta x$  (довірчий інтервал). Ця ймовірність  $P$  називається надійністю результату вимірювання (вживаються також терміни "довірча ймовірність", "коефіцієнт надійності"). Останнє положення є дуже важливим: результат вимірювання (6) не стверджує, що істинне значення величини  $X$  лежить в інтервалі

$(\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x)$ , йде мова лише про певну ймовірність цього. Тут ми бачимо принципову розбіжність подання результату вимірювання у формі (7) із поданням результату вимірювання у методі середньої арифметичної похибки.

Як знаходиться величина  $\Delta x$  і як визначається надійність вимірювання  $P$ ?

1. Спочатку дамо відповідь конкретним, дуже важливим в теорії похибок, прикладом.

Якщо число спостережень  $n \geq 7$ , то з надійністю, близькою до  $2/3$ , абсолютна похибка вимірюваної величини є

$$\Delta x = S_{\langle x \rangle}, \quad (8)$$

де

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{n(n-1)}}; \quad (9)$$

величини  $\Delta x_i$  визначаються виразом (2).

Величина  $S_{\langle x \rangle}$  називається середньою квадратичною (стандартною) похибкою (вживаються також терміни “стандартне відхилення середнього”, “оцінка середнього арифметичного”).

Результат вимірювань величини  $X$ , записаний у стандартній формі, є

$$x = \langle x \rangle \pm S_{\langle x \rangle}. \quad (10)$$

Він означає, що істинне значення величини  $X$  з ймовірністю  $P \cong 2/3$  лежить у межах між  $\langle x \rangle - S_{\langle x \rangle}$  і  $\langle x \rangle + S_{\langle x \rangle}$ .

Подання результату вимірювань у формі (10), де за абсолютну похибку приймається середня квадратична похибка  $S_{\langle x \rangle}$ , широко використовується як при обробці результатів вимірювань при виконанні лабораторних робіт, так і в наукових дослідженнях. Варто, проте, пам'ятати, що: 1) вище мова йшла про серію вимірювань з  $n \geq 7$ ; 2) надійність результату вимірювання (10)  $P \cong 2/3$ ; 3) враховувалися лише випадкові похибки.

2. Якщо надійність результату вимірювання, заданого у формі (10), потрібно підвищити, або коли число спостережень  $n=3-5$  (як це є при виконанні лабораторних робіт), то потрібно розширити і інтервал ймовірного знаходження істинного значення величини  $X$ . З цією метою покладають, що абсолютна похибка (вживаються також терміни “похибка середнього”, “довірча границя”, “випадкове відхилення результату вимірювання”)

$$\Delta x = t(P, n) S_{\langle x \rangle}, \quad (11)$$

де  $S_{\langle x \rangle}$  визначається виразом (9) (який справедливий для довільних  $n \geq 2$ ),  $t(P, n)$  – додатній коефіцієнт, який залежить від надійності  $P$  і кількості спостережень  $n$ , - коефіцієнт Стьюдента (Стьюдент – псевдонім англійського математика і хіміка В.Госсета). Коефіцієнт Стьюдента  $t(P, n)$  знаходиться з таблиці 1 на перетині стовпця, який відповідає заданій надійності  $P$ , і рядка, який відповідає кількості спостережень  $n$ .

Таблиця 1 - Коефіцієнти Стьюдента  $t_{Pn}$

N	P						
	0,5	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,999
2	1,00	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
3	0,82	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
4	0,77	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
5	0,74	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	0,73	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	6,86
7	0,72	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	0,71	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
9	0,71	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4,04
10	0,70	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
11	0,70	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
12	0,70	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
13	0,70	1,35	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
14	0,69	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
15	0,69	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
16	0,69	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
17	0,69	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
18	0,69	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
19	0,69	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
20	0,69	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
25	0,69	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
30	0,68	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,66
40	0,68	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	0,68	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	0,68	1,30	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
$\infty$	0,67	1,29	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

У цьому випадку результат вимірювання записується у вигляді

$$x = \langle x \rangle \pm t(P, n) S_{\langle x \rangle}. \quad (12)$$

Важливо, що оцінка абсолютної похибки за допомогою виразу (11) застосовна, на відміну від виразу (10), і при малому числі спостережень ( $n=2, 3$ ).

Наведемо також формулу Пірсона, яка пов'язує стандартну похибку  $S_{\langle x \rangle}$  та середню арифметичну похибку  $\Delta x$ :

$$S_{\langle x \rangle} \approx 1,25 \frac{\Delta x}{\sqrt{n-1}};$$

ця формула може бути корисною при обробці результатів вимірювань.

**Приклад.** Опрацюємо результат вимірювань діаметра циліндричного стержня ( $d_1 = 8,5$  мм,  $d_2 = 8,9$  мм,  $d_3 = 8,6$  мм,  $d_4 = 8,6$  мм,  $d_5 = 9,0$  мм) за методикою, описаною вище (в даному випадку  $x=d$ ).

1. Знаходимо середнє арифметичне:

$$\langle d \rangle = \frac{8,5 + 8,9 + 8,6 + 8,6 + 9,0}{5} = 8,72 \text{ мм} \approx 8,7 \text{ мм}.$$

2. Знаходимо відхилення від середнього арифметичного (похибки окремих спостережень):  $\Delta d_1 = 0,2$  мм,  $\Delta d_2 = -0,2$  мм,  $\Delta d_3 = \Delta d_4 = 0,1$  мм,  $\Delta d_5 = -0,3$  мм.

3. Для квадратичних відхилень маємо ( $\Delta x^2_i \rightarrow \Delta d^2_i$ ):

$$\begin{aligned}\Delta d^2_1 &= 0,04 \text{ мм}^2, \\ \Delta d^2_2 &= 0,04 \text{ мм}^2, \\ \Delta d^2_3 &= 0,01 \text{ мм}^2, \\ \Delta d^2_4 &= 0,01 \text{ мм}^2, \\ \Delta d^2_5 &= 0,09 \text{ мм}^2.\end{aligned}$$

4. Знаходимо стандартну (середню квадратичну) похибку за формулою (9) ( $S_{\langle x \rangle} \rightarrow S_{\langle d \rangle}$ ,  $n=5$ ):

$$S_{\langle d \rangle} = \sqrt{\frac{0,04 + 0,04 + 0,01 + 0,01 + 0,09}{5(5-1)}} \approx 0,098 \text{ мм} \approx 0,1 \text{ мм}.$$

5. Отримані значення  $\langle d \rangle$  і  $S_{\langle d \rangle}$  є вихідними для подання результату вимірювання за формулою

$$d = \langle d \rangle \pm \Delta d$$

з певним ступенем надійності. При цьому, у згоді із формулою (11) ( $x \rightarrow d$ ),

$$\Delta d = t(P, n) S_{\langle d \rangle}.$$

Якщо задатися надійністю  $P=0,95$ , то  $t(0,95; 5)=2,8$  (Таблиця 1),

$$\Delta d = 2,8 \cdot 0,1 \approx 0,28 \text{ мм} \approx 0,3 \text{ мм}$$

і результат вимірювання дається виразом

$$d = (8,7 \pm 0,3) \text{ мм}; P = 0,95.$$

При  $P=0,99$ ,  $t(0,99; 5)=4,6$ . Тоді

$$d = (8,7 \pm 0,5) \text{ мм}, P = 0,99.$$

Звертаємо увагу ще раз на неврахування тут систематичної похибки приладу вимірювання (інструментальної похибки); врахування її проведено в п. 1.2.6.

### 1.2.3 Похибка приладу (інструментальна похибка)

Вище ми вважали, що похибки вимірювання – випадкові, похибками приладу нехтували. Можливий і протилежний випадок – похибка приладу є основною. За характером зміни похибки вимірювальних приладів поділяються на систематичні та випадкові. Випадкові похибки можуть і не проявлятися при вимірюванні даним приладом (недостатня чутливість приладу). За похибку вимірювання приймаємо похибку приладу і в тому випадку, коли проведено лише одне ретельне вимірювання (є спостереження  $x_{cn}$  за показами приладу). Однократне спостереження здійснюємо (ретельно) тоді, коли використовуємо засоби вимірювання невисокої точності.

Похибка приладу (інструментальна похибка) визначається на основі паспортних даних приладу, його класу точності, точності ноніуса. При цьому мають на увазі граничну похибку приладу, тобто максимально допустиму похибку. Так, якщо на штангенциркулі зроблений надпис “0,1 мм”, а на мікрометрі - “0,01 мм”, то це означає, що максимальна абсолютна похибка приладу  $\Delta_{np}x=0,1$  мм у першому випадку і  $\Delta_{np}x=0,01$  мм – у другому. Якщо вказаний клас точності приладу  $K$  (записується на шкалі приладу у вигляді відповідних цифр – 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0), то максимальна абсолютна похибка приладу при визначенні величини  $x$ :

$$\Delta_{np}x = \frac{K}{100} x_{max},$$

де  $x_{max}$  – максимальне значення величини  $x$ , яке прилад може виміряти. Класом точності приладу  $K$  називають виражене у відсотках відношення  $\Delta_{np}x$  до  $x_{max}$ :

$$K = \frac{\Delta_{np}x}{x_{max}} 100\%.$$

Таким чином, якщо випадкові похибки достатньо малі, результат вимірювання записується у вигляді:

$$x = x_{cn} \pm \Delta_{np} x,$$

де  $x_{cn}$  – спостережуване значення величини  $X$  (усі результати спостереження величини  $X$  однакові в межах похибки приладу); критерій малості випадкової похибки буде означений у п. 1.2.4.

Якщо гранична похибка приладу невідома (відсутні відповідні дані в паспорті приладу, надписи), то за граничну похибку приймають половину ціни найменшої поділки шкали приладу.

**Приклад 1.** П'ять вимірів товщини пластинки штангенциркулем, точність якого 0,1 мм, дали однакові результати:  $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a=4,0$  мм. Тут випадкова похибка відсутня. Точність результату визначається інструментальною похибкою, тому

$$a = (4,0 \pm 0,1) \text{ мм.}$$

**Приклад 2.** Проводимо вимірювання довжини за допомогою лінійки з міліметровими поділками, причому покази кожен раз заокруглюємо до найближчої поділки, і отримуємо  $l_1=l_2=l_3=l_4=l_5=l=18$  мм. Оскільки випадкові похибки відсутні, відомостей щодо класу точності чи граничної похибки немає, то за граничну похибку приймаємо половину ціни поділки – 0,5 мм. Результат вимірювання:

$$l = (18,0 \pm 0,5) \text{ мм.}$$

Якщо є потреба виразити результат вимірювання не у формі (3), де за абсолютну похибку береться гранична (максимальна) похибка приладу, а у стандартній формі (де абсолютна похибка дорівнює середній квадратичній), то користуються зв'язком між середньою квадратичною похибкою приладу  $S_{np.x}$  і максимальною похибкою приладу  $\Delta_{np}$  (при вимірюванні величини  $X$ ):

$$S_{np.x} = \frac{\Delta_{np} x}{3}.$$

Обґрунтування цього зв'язку наступне. Прилад, що використовується (наприклад штангенциркуль), – один із екземплярів великого числа цієї серії приладів, про абсолютну похибку кожного з яких можна сказати лише, що вона не перевищує максимальної похибки. З цієї точки зору абсолютну похибку даного приладу можна розглядати за законами, встановленими для випадкових величин.

Запис результату вимірювання величини  $X$  у формі:

$$x = x_{cn} \pm S_{np.x}$$

означає, що абсолютна похибка приладу визначається третиною максимальної похибки. Останньому результату відповідає надійність вимірювання  $P \cong 2/3$ . Якщо її потрібно підвищити, то користуються методикою, описаною при опрацюванні випадкових похибок; у цьому випадку коефіцієнти Стюдента  $t(P, n)$  беруться за умови  $n \rightarrow \infty$  (велика серія дослідів), і результат вимірювання величини  $X$  є:

$$x = x_{cn} \pm \Delta x,$$

де

$$\Delta x = t(P, \infty) \frac{\Delta_{np} x}{3}.$$

**Приклад.** Знайдемо інструментальну похибку штангенциркуля (точність якого 0,1 мм)  $\Delta x$ , приймаючи надійність вимірювання  $P=0,95$ . З таблиці 1 знаходимо  $t(0,95; \infty)=2$ . Тоді:

$$\Delta x = t(0,95; \infty) \frac{\Delta_{np} x}{3} \approx 0,07 \text{ мм.}$$

Застосування цього результату див. у п. 1.2.6.

### 1.2.4 Додавання випадкових та систематичних похибок

Вище при обробці результатів вимірювань розглядалися крайні випадки – при врахуванні випадкових похибок нехтувалося похибкою приладу, а при врахуванні похибки приладу нехтувалося випадковими похибками. В реальних умовах наявні як випадкові, так і систематичні (зокрема, інструментальні) похибки.

Сумарна абсолютна похибка при вимірюванні величини  $X$  знаходиться за формулою:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_e^2 + \Delta x_c^2}, \quad (13)$$

де  $\Delta x_e$  – випадкова похибка,  $\Delta x_c$  – систематична похибка. Аргумент на користь формули (13): точність дослідів має характеризуватися не максимальною похибкою (випадкова похибка і похибка приладу додаються) і не мінімальною (різниця похибок). Вираз (13) задовольняє цю умову: результуюча похибка є меншою від суми  $\Delta x_e + \Delta x_c$  і більшою від різниці  $|\Delta x_e - \Delta x_c|$ .

Якщо  $\Delta x_e^2 \gg \Delta x_c^2$ , то похибкою приладу можна знехтувати, якщо ж  $\Delta x_c^2 \gg \Delta x_e^2$ , то достатньо врахувати похибку приладу. При обробці результатів вимірювань під час виконання лабораторних робіт достатньо знайти  $\Delta x$  (не  $x$ !) з точністю до 20%, тому якщо одна із похибок більша від другої у два або більше разів, то можна обмежитися врахуванням більшої з них. Справді, нехай, наприклад,  $\Delta x_c = 2\Delta x_e$ , тоді

$$\Delta x = \sqrt{1,25}\Delta x_c \cong \Delta x_c$$

(у межах заявленої вище точності оцінки похибки). Звідси маємо такий наслідок: якщо  $\Delta x_c$  більша від  $\Delta x_e$  у два або більше разів, то для підвищення точності вимірювання фізичної величини немає сенсу зменшувати випадкову похибку (шляхом багатократних вимірювань), а потрібно скористатися більш точним приладом (наприклад, замість штангенциркуля використати мікрометр).

### 1.2.5 Відносна похибка

Абсолютна похибка не є достатньою характеристикою якості вимірювання. Важливим є те, яку частину вимірюваної величини вона становить. Нехай, наприклад, вимірювання двох довжин за допомогою лінійки дали результати:  $l_1 = (5,0 \pm 0,5)$  см і  $l_2 = (50,0 \pm 0,5)$  см. Абсолютні похибки в обох випадках однакові, хоча зрозуміло, що точність вимірювання у другому випадку вища. Постає запитання: наскільки? Як порівняти точність цих вимірювань? Поняття абсолютної похибки тут не є достатнім. Цього поняття недостатньо і для оцінки точності вимірювання величин різної розмірності. Так, немає змісту ставити питання: яке вимірювання більш точне – вимірювання довжини з абсолютною похибкою  $\Delta l = \pm 0,5$  см, чи вимірювання маси з абсолютною похибкою  $\Delta m = \pm 0,5$  г.

Щоб отримати повніше уявлення про точність вимірювання, порівнювати точність різних вимірювань (у тому числі і величин різної розмірності), вводять поняття відносної похибки.

Відносною похибкою вимірювання називається відношення абсолютної похибки вимірювання до істинного значення вимірюваної величини:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Виражається у відносних одиницях, або відсотках. На практиці приймається  $x_0 = \langle x \rangle$  (істинне значення замінюється дійсним значенням  $\langle x \rangle$ ). Тому

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}.$$

Точність вимірювання – величина обернена до відносної похибки.

За ДСТУ 2681-94 результат вимірювання записується із вказанням відносної похибки у відсотках.

Проілюструємо поняття відносної похибки відповідями на поставлені вище запитання.

Якщо виміряні довжини  $l_1 = (5,0 \pm 0,5)$  см і  $l_2 = (50,0 \pm 0,5)$  см, то відносні похибки і точність вимірювань є відповідно:

$$\delta_1 = \frac{0,5}{5} = 0,1; \quad \frac{1}{\delta_1} = 10$$

і

$$\delta_2 = \frac{0,5}{50} = 0,01; \quad \frac{1}{\delta_2} = 100.$$

Видно, що у другому випадку точність у 10 разів вища.

Другий приклад. Діаметр кулі  $d = (10,0 \pm 0,5)$  см, її маса  $m = (100,0 \pm 0,5)$  г. Тут  $\delta_d = 0,05$ , а  $\delta_m = 0,005$ , тобто точність зважування вища у 10 разів від точності вимірювання діаметра. Звідси можна зробити важливий висновок. Якщо на основі вимірювання  $d$  і  $m$  визначати густину  $\rho$  ( $\rho = \frac{m}{V}$ ), то для підвищення точності вимірювання  $\rho$  потрібно, насамперед, підвищити точність вимірювання  $d$  (використати більш точний прилад).

Задання відносної похибки доповнює результат вимірювання (разом із заданням надійності, якщо обробка результатів вимірювання здійснювалася методом середньої квадратичної похибки). Так, у прикладі, наведеному вище,

$$m = (100,0 \pm 0,5) \text{ г}; \quad \delta m = 0,5\%.$$

### 1.2.6 Прямі вимірювання: підсумкові приклади

Повернемося до запитань, сформульованих на початку підрозділу щодо обробки результатів вимірювання діаметра стержня ( $d_1=8,5$  мм,  $d_2=8,9$  мм,  $d_3=8,6$  мм,  $d_4=8,6$  мм,  $d_5=9,0$  мм) за допомогою штангенциркуля, точність якого 0,1 мм, і впорядкуємо результати, пов'язані з отриманням кінцевого результату вимірювання. При цьому скористаємося обома методами обробки результатів вимірювання – методом середньої арифметичної похибки і методом середньої квадратичної похибки.

1. В методі середньої арифметичної похибки результат вимірювання записується у вигляді:

$$d = \langle d \rangle \pm \langle \Delta d \rangle,$$

де

$$\langle d \rangle = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} = 8,72 \text{ мм} \approx 8,7 \text{ мм}$$

- середнє арифметичне результатів спостережень – найвірогідніше значення  $d$ , а

$$\langle \Delta d \rangle = \frac{|\Delta d_1| + |\Delta d_2| + |\Delta d_3| + |\Delta d_4| + |\Delta d_5|}{5}$$

- середня арифметична абсолютна похибка. Для її знаходження потрібно знайти відхилення спостережуваних значень  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ , від середнього значення  $\langle d \rangle$  і взяти суму цих абсолютних величин:

$$\langle \Delta d \rangle = \frac{(8,7 - 8,5) + |8,7 - 8,9| + (8,7 - 8,6) + (8,7 - 8,6) + |8,7 - 9,0|}{5} = \frac{0,9}{5} \text{ мм} = 0,18 \text{ мм} \approx 0,2 \text{ мм}.$$

Тут при заокругленні ми обмежилися однією значущою цифрою (що і рекомендується при знаходженні похибок під час виконання лабораторних робіт); похибка такого заокруглення  $\approx 10\%$  (що менше допустимої похибки  $20\%$ ).

Похибка  $\langle \Delta d \rangle$  - випадкова. Інструментальна похибка штангенциркуля, що використовується,  $\Delta_i = 0,1$  мм. Результуюча абсолютна похибка вимірювання знаходиться квадратичним додаванням похибок:

$$\langle \Delta d \rangle_p = \sqrt{\langle \Delta d \rangle^2 + \Delta_i^2};$$

$$\langle \Delta d \rangle_p = \sqrt{(0,18)^2 + (0,1)^2} \text{ мм} \approx 0,21 \text{ мм} \approx 0,2 \text{ мм}.$$

Тут при заокругленні абсолютної похибки ми обмежилися однією значущою цифрою (що і рекомендується при знаходженні абсолютної похибки за результатами лабораторних робіт); похибка такого заокруглення  $5\%$  (що менше допустимої похибки  $20\%$ ). Видно, що основний внесок у результуючу похибку вносить випадкова похибка, а не інструментальна.

Відносна похибка

$$\delta d = \frac{0,21 \text{ мм}}{8,72 \text{ мм}} \approx 0,0241 \approx 0,024; \delta d = 2,4\%.$$

Таким чином, результати вимірювань, опрацьовані за методом середньої арифметичної похибки, приводять до такого результату вимірювання:

$$d = (8,7 \pm 0,2) \text{ мм}, \delta d = 2,4\%.$$

2. Опрацюємо тепер результати вимірювань методом середньої квадратичної похибки, задаючи надійність  $P=0,95$ , в такій послідовності:

Знайдемо випадкову похибку вимірювання  $\Delta d$  за схемою, описаною в п. 1.2.2.2. Це дає (для надійності  $P=0,95$ )

$$\Delta d = t(0,95; 5) S_{\langle d \rangle} \approx 0,28 \text{ мм} \approx 0,3 \text{ мм};$$

тут використано, що значення коефіцієнта Стьюдента  $t(P, n)$  при  $P=0,95$  і  $n=5$  рівне  $2,8$ , а середня квадратична похибка

$$S_{\langle d \rangle} = \sqrt{\frac{\Delta d_1^2 + \Delta d_2^2 + \Delta d_3^2 + \Delta d_4^2 + \Delta d_5^2}{n(n-1)}} \approx 0,1 \text{ мм}$$

(використано, що  $\Delta d_1^2 = \Delta d_2^2 = 0,04 \text{ мм}^2$ ,  $\Delta d_3^2 = \Delta d_4^2 = 0,01 \text{ мм}^2$ ,  $\Delta d_5^2 = 0,09 \text{ мм}^2$  – квадратичні відхилення,  $n=5$ ).

Врахуємо інструментальну похибку. Її максимальне значення  $\Delta_i = 0,1$  мм. Для надійності  $P=0,95$ , що використана тут, інструментальна похибка за викладеним у п.1.2.3 є

$$\Delta d_i = 0,07 \text{ мм}.$$

Результуюча похибка знаходиться квадратичним сумуванням випадкової  $\Delta d_e$  та інструментальної похибок  $\Delta d_i$ :

$$\Delta d = \sqrt{\Delta d_e^2 + \Delta d_i^2} = \sqrt{(0,28)^2 + (0,07)^2} \approx 0,289 \text{ мм} \approx 0,3 \text{ мм}.$$

Інструментальна похибка практично не впливає на результат вимірювання.

Таким чином, результатом вимірювання діаметра стержня є

$$d = (8,7 \pm 0,3) \text{ мм}; \delta d = 3,4\%; P = 0,95.$$

### 1.3 Обробка результатів при непрямих (посередніх) вимірюваннях

#### 1.3.1 Посередньо вимірювана величина – функція однієї змінної

1. Розглянемо приклад. На досліді визначається висота вежі  $h$  за формулою

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad (14)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння будемо вважати сталою величиною, яку можна взяти з таблиць з необхідною точністю;  $t$  – час падіння тіла; обробка результатів прямого вимірювання  $t$  за методикою, описаною вище, дає:

$$t = \langle t \rangle \pm \Delta t$$

( $\langle t \rangle$  - середнє значення,  $\Delta t$  – абсолютна похибка); нехай, для прикладу,  $t = (5,0 \pm 0,3)$  с. Який буде результат вимірювання  $h$ ? (Це - приклад непрямого вимірювання фізичної величини (в даному випадку  $h$ ) через пряме вимірювання іншої величини ( $t$ )).

Результат вимірювання  $t$  означає, що нижньою межею  $t \in t_n = \langle t \rangle - \Delta t$ , а верхньою –  $t_e = \langle t \rangle + \Delta t$ . Підстановка цих значень  $t$  у формулу (14) дає для нижньої межі  $h$  значення

$$h_n = \frac{g}{2} (\langle t \rangle^2 - 2\langle t \rangle \Delta t + \Delta t^2),$$

а для верхньої –

$$h_e = \frac{g}{2} (\langle t \rangle^2 + 2\langle t \rangle \Delta t + \Delta t^2).$$

Знехтуємо у цих виразах малою (в порівнянні з іншими) величиною  $g\Delta t^2/2$ . Звідси видно, що значення  $h$  лежить у межах:

$$\frac{g\langle t \rangle^2}{2} - g\langle t \rangle \Delta t < h < \frac{g\langle t \rangle^2}{2} + g\langle t \rangle \Delta t$$

і що результат непрямого вимірювання  $h$  можна подати так:

$$h = \langle h \rangle \pm \Delta h,$$

де

$$\langle h \rangle = \frac{g\langle t \rangle^2}{2},$$

а

$$\Delta h = g\langle t \rangle \Delta t.$$

Відзначимо важливу особливість виразу для абсолютної похибки  $\Delta h$ . Вона може бути записана так:

$$\Delta h = \frac{dh}{dt} \Delta t,$$

або

$$\Delta h = h'(t) \Delta t,$$

для відносної похибки  $\delta h = \frac{\Delta h}{\langle h \rangle}$  маємо

$$\delta h = \frac{h'(t)}{\langle h \rangle} \Delta t,$$

причому значення похідної береться при  $t = \langle t \rangle$ .

Врахування результату вимірювання часу падіння ( $t=(5,0\pm 0,3)$  с) дає при  $g=9,8$  м/с<sup>2</sup>:

$$\langle h \rangle = 122 \text{ м}; \Delta h \approx 15 \text{ м},$$

тому

$$h = (122 \pm 15) \text{ м}.$$

2. Подібну процедуру можна провести при знаходженні довільної фізичної величини  $y$ , яка є довільною функцією однієї змінної  $x$  ( $y=f(x)$ ). Тут величина  $x$  визначається шляхом прямих вимірювань і задається виразом:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x$$

з певною надійністю.

Як і в наведеному вище прикладі, результат вимірювання величини  $y$  може бути записаний у формі:

$$y = \langle y \rangle \pm \Delta y, \quad (15)$$

де  $\langle y \rangle = f(\langle x \rangle)$ , а абсолютна похибка

$$\Delta y = \frac{df(x)}{dx} \Delta x, \quad (16)$$

причому значення  $f'(x)$  береться при  $x=\langle x \rangle$ .

Для відносної похибки  $\delta y = \frac{\Delta y}{y}$  маємо:

$$\delta y = \frac{f'(x)}{f} \Delta x. \quad (17)$$

Із формул (16) і (17) маємо, зокрема, наведені вище результати для функції  $h=h(t)$ .

3. Якщо величина  $y$  є функцією кількох незалежних змінних

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – безпосередньо вимірювані величини, причому за результатами прямих вимірювань

$$x_1 = \langle x_1 \rangle \pm \Delta x_1, \quad x_2 = \langle x_2 \rangle \pm \Delta x_2, \quad \dots, \quad x_n = \langle x_n \rangle \pm \Delta x_n,$$

то результат вимірювання величини  $y$  є:

$$y = \langle y \rangle \pm \Delta y,$$

де  $\langle y \rangle = f(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle)$ . Відносна похибка  $\delta y = \frac{\Delta y}{\langle y \rangle}$ .

Щодо визначення абсолютної похибки  $\Delta y$  (і відносної похибки  $\delta y$ ) існують два підходи – метод максимальної (граничної) похибки і метод квадратичної похибки (подібно до двох підходів, описаних у п. 1.2.2 при визначенні абсолютної похибки прямих вимірювань).

### 1.3.2.1 Метод максимальної (граничної) похибки

У цьому випадку “парціальні” абсолютні похибки при визначенні величини  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\Delta y_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* \quad (18)$$

\* Тут  $\partial f / \partial x_i$  – частинна похідна ( $f$  - функція багатьох змінних!)

взяті за абсолютною величиною, додаються, і абсолютна похибка величини  $y$

$$\Delta y = |\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \dots + |\Delta y_n|,$$

тобто:

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n, \quad (19)$$

або

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i, \quad (20)$$

де значення похідних визначаються при значеннях  $x = \langle x \rangle$ .  $\Delta y$  називається максимальною (похибки додаються!) або граничною абсолютною похибкою величини  $y$ .

Відносна похибка величини  $y$ :

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y},$$

або

$$\delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{f \partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

де  $\delta y$  – максимальна відносна похибка величини  $y$ , яка визначається сумою модулів парціальних відносних похибок  $\frac{\partial f}{f \partial x_i}$ .

Оскільки

$$\frac{\partial f}{f \partial x_i} = \frac{\partial \ln f}{\partial x_i},$$

то вираз для  $\delta y$  можна записати і у формі:

$$\delta y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right| \Delta x_i. \quad (21)$$

Із останньої формули можна зробити корисний висновок: якщо  $y$  виражається формулою, зручною для логарифмування (в цьому випадку похідні беруться дуже просто) легше знайти відносну похибку, а не абсолютну. В цьому випадку спочатку знаходять відносну похибку, а потім – абсолютну –

$$\Delta y = y \delta y.$$

Якщо ж функція  $y$  є сумою незалежних змінних, то зручніше спочатку знайти  $\Delta y$ , а потім -  $\delta y$ .

В таблиці 2 наведені абсолютні похибки  $\Delta y$  і відносні похибки  $\delta y$ , розраховані за формулами (20) і (21) для деяких функцій.

Таблиця 2

№ п/п	Функція	Похибки	
		абсолютна	відносна
1.	$y=x_1+x_2$	$(\Delta x_1 + \Delta x_2)$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 + x_2}$
2.	$y=x_1-x_2$	$(\Delta x_1 + \Delta x_2)$	$\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 - x_2}$
3.	$y=x_1 \cdot x_2$	$(x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1)$	$\left( \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \right)$
4.	$y=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$(x_1 x_2 \Delta x_3 + x_2 x_3 \Delta x_1 + x_1 x_3 \Delta x_2)$	$\left( \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3} \right)$
5.	$y=x^n$	$n x^{n-1} \Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$
6.	$y = \sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \Delta x$	$\frac{\Delta x}{n x}$
7.	$y=e^x$	$e^x \Delta x$	$\Delta x$
8.	$y=\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$
9.	$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\left( \frac{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}{x_2^2} \right)_1$	$\left( \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \right)$
10.	$y=\sin x$	$(\cos x) \Delta x$	$(\operatorname{ctg} x) \Delta x$
11.	$y=\cos x$	$(\sin x) \Delta x$	$(\operatorname{tg} x) \Delta x$
12.	$y=\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{sc}^2 x) \Delta x$	$2 \left( \frac{\Delta x}{\sin 2x} \right)$
13.	$y=\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{csc}^2 x) \Delta x$	$2 \left( \frac{\Delta x}{\sin 2x} \right)$

**Приклад 1.** У лабораторній роботі “Визначення густини тіла циліндричної форми” густина тіла  $\rho$  визначається за формулою:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 h}; (\rho=f(m, d, h)),$$

де  $m$  – маса циліндра,  $V$  – його об’єм,  $d$  – діаметр,  $h$  – висота;  $m, d, h$  – визначаються прямими вимірюваннями:  $m = \langle m \rangle \pm \Delta m$ ,  $d = \langle d \rangle \pm \Delta d$ ,  $h = \langle h \rangle \pm \Delta h$  (із заданням надійності вимірювання  $P$ ). Який результат вимірювання  $\rho$ ?

Формула для  $\rho$  зручна для логарифмування, тому визначаємо спочатку відносну похибку  $\delta\rho$  за формулою (21). Робимо наступні кроки:

1. Логарифмуємо вираз для  $\rho$ :

$$\ln \rho = \ln 4 + \ln m - \ln \pi - 2 \ln d - \ln h.$$

2. Відносну похибку  $\delta\rho$  знаходимо за формулою (21) ( $\delta y \rightarrow \delta\rho$ ;  $x_1 \rightarrow m$ ;  $\Delta x_1 \rightarrow \Delta m$ ;  $x_2 \rightarrow d$ ;  $\Delta x_2 \rightarrow \Delta d$ ;  $x_3 \rightarrow h$ ;  $\Delta x_3 \rightarrow \Delta h$ ).

Оскільки

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} \Delta m = \frac{\Delta m}{m}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial d} \Delta d = -2 \frac{\Delta d}{d}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial h} \Delta h = -\frac{\Delta h}{h},$$

то

$$\delta\rho = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h}.$$

Для абсолютної похибки маємо

$$\Delta\rho = \langle \rho \rangle \delta\rho,$$

де середнє значення густини

$$\langle \rho \rangle = \frac{4\langle m \rangle}{\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle}. \quad (22)$$

Результат вимірювання записуємо у вигляді

$$\rho = \langle \rho \rangle \pm \Delta\rho; \quad \delta\rho = \frac{\Delta\rho}{\langle \rho \rangle}.$$

Тут ми обминаємо питання щодо похибки, яку вносить наближене значення  $\pi$  (див. у цьому зв'язку п. 1.5).

Розрахунок  $\rho$ ,  $\Delta\rho$  і  $\delta\rho$  для конкретних  $m$ ,  $d$ ,  $h$  буде проведений у п. 1.5.

Розглянемо дещо складніший приклад.

**Приклад 2.** В лабораторній роботі “Визначення динамічного коефіцієнта в'язкості рідини методом Стокса” визначається динамічний коефіцієнт в'язкості водного розчину гліцерину за формулою:

$$\eta = \frac{g}{18} d^2 t \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{h \left( 1 + 2,4 \frac{d}{D} \right)},$$

де  $d$  – діаметр свинцевої кульки (визначається мікрометром),  $t$  – час проходження кулькою віддалі  $h$  ( $t$  вимірюється за допомогою механічного секундоміра,  $h$  – за допомогою металевої лінійки),  $D$  – внутрішній діаметр циліндричної труби (вимірюється штангенциркулем). Густина  $\rho_2$  свинцевої кульки береться з таблиці,  $\rho_1$  – густина водного розчину гліцерину (задається на робочому місці),  $g$  – прискорення вільного падіння (береться з таблиці з належною точністю).

В даному випадку

$$\eta = f(d, t, h, \rho_2, \rho_1, D, g)$$

( $g$  приймаємо за аргумент функції).

Відносну похибку  $\delta\eta$  знаходимо за аналогією із попереднім прикладом:

1. Логарифмуємо вираз для  $\eta$ :

$$\ln \eta = \ln g - \ln 18 + 2 \ln d + \ln t + \ln(\rho_2 - \rho_1) - \ln h + \ln D - \ln(D + 2,4d).$$

2. Знаходимо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial \ln \eta}{\partial d} = \frac{2}{d} - \frac{2,4}{D + 2,4d}, \quad \frac{\partial \ln \eta}{\partial t} = \frac{1}{t}, \quad \frac{\partial \ln \eta}{\partial \rho_2} = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad \frac{\partial \ln \eta}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1},$$

$$\frac{\partial \ln \eta}{\partial h} = \frac{1}{h}, \quad \frac{\partial \ln \eta}{\partial D} = \frac{2,4d}{D(D + 2,4d)}, \quad \frac{\partial \ln \eta}{\partial g} = \frac{1}{g}.$$

Помножимо кожен із отриманих виразів (взятий за абсолютною величиною) на відповідну абсолютну похибку прямого вимірювання ( $\Delta d$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta\rho_2$ ,  $\Delta\rho_1$ ,  $\Delta D$ ,  $\Delta g$ ),

візьмемо значення похідних при середніх значеннях величин прямого вимірювання. В підсумку отримуємо, що відносна похибка

$$\delta\eta = a \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} + \frac{\Delta t}{\langle t \rangle} + \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} + \frac{\Delta \rho_2}{\langle \rho_2 \rangle - \langle \rho_1 \rangle} + \frac{\Delta \rho_1}{\langle \rho_2 \rangle - \langle \rho_1 \rangle} + \frac{2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}{1 + 2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}} \cdot \frac{\Delta D}{\langle D \rangle} + \frac{\Delta g}{\langle g \rangle},$$

де

$$a = 2 - 2,4 \frac{\frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}{1 + 2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}.$$

Середнє значення  $\langle \eta \rangle$  визначається за середніми значеннями величин прямого вимірювання:

$$\langle \eta \rangle = \frac{g}{18} \langle d \rangle^2 \frac{\langle t \rangle (\langle \rho_2 \rangle - \langle \rho_1 \rangle)}{\langle h \rangle \left( 1 + 2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle} \right)}.$$

Абсолютна похибка

$$\Delta\eta = \langle \eta \rangle \delta\eta.$$

Конкретний числовий розрахунок буде наведений у п. 1.5.

Відзначимо ще раз, що викладений метод – метод максимальної похибки дає завищені значення абсолютної та відносної похибок, причому завищення зростає із зростанням числа аргументів функції  $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ .

Більш послідовний метод оцінювання абсолютної та відносної похибок – метод квадратичного сумування похибок.

### 1.3.2.2 Метод квадратичного сумування похибок

Повернемося до постановки задачі про вимірювання величини  $y=f(x_1, x_2 \dots x_n)$  за результатами прямих вимірювань величин  $x_1, x_2 \dots x_n$ . Кожна з величин  $x_i$  вносить свій (“парціальний”) внесок

$$\Delta y_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

у загальну похибку. Оскільки похибки  $\Delta y_i$  частково компенсуються, то ці похибки потрібно додавати “квадратично”. Таким чином, приходимо до квадратичної похибки:

$$\Delta y = \sqrt{\Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \dots + \Delta y_n^2},$$

або

$$\Delta y = \sqrt{\left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 \Delta x_1^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 \Delta x_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)^2 \Delta x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2}. \quad (23)$$

Для відносної похибки

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$$

маємо:

$$\delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2},$$

що можна записати як

$$\delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}. \quad (24)$$

Остання формула корисна для конкретних розрахунків (як і аналогічна формула (21) в методі максимальної похибки).

На практиці порядок вирахування похибок такий: якщо функція  $y=f(x_1, x_2 \dots x_n)$  зручна для логарифмування, то спочатку вираховують відносну похибку  $\delta y$ , а потім за формулою

$$\Delta y = \langle y \rangle \delta y$$

- абсолютну (в більшості випадків); якщо ж функція  $y$  є сумою незалежних змінних, то зручніше спочатку знайти  $\Delta y$ , а потім -  $\delta y$ .

В таблиці 3 наведені абсолютні  $\Delta y$  і відносні  $\delta y$  похибки, розраховані для деяких функцій за формулами (23) і (24).

**Таблиця 3**

№ п/п	Функція	Похибки ( $\Delta y$ – абсолютна, $\delta y$ – відносна)
1.	$y=x_1+x_2$	$\Delta y = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$
2.	$y=x_1-x_2$	$\Delta y = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$
3.	$y=x_1 \cdot x_2$	$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$
4.	$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$
5.	$y = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$	$\delta y = \sqrt{\frac{(x_2 \Delta x_1)^2 + (x_1 \Delta x_2)^2}{x_1^2 (x_1 + x_2)^2}}$
6.	$y = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$	$\delta y = \sqrt{\frac{(x_2 \Delta x_1)^2 + (x_1 \Delta x_2)^2}{x_1^2 (x_1 - x_2)^2}}$
7.	$y=x_1 x_2 + x_3$	$\Delta y = \sqrt{x_2^2 \Delta x_1^2 + x_1^2 \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2}$
8.	$y=x_1(x_2+x_3)$	$\Delta y = \sqrt{(x_2 + x_3)^2 \Delta x_1^2 + x_1^2 [(\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2]}$
9.	$y=x^n$	$\delta y = n \frac{\Delta x}{x}$
10.	$y=e^{ax}$	$\delta y = a \Delta x$
11.	$y=\ln ax$	$\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$

**Приклад 1.** Виведемо формули для обробки результатів непрямого вимірювання густини тіла циліндричної форми  $\rho$  (попередній приклад) методом середньої квадратичної похибки.

Формула для  $\rho$  зручна для логарифмування. Тому спочатку визначаємо відносну похибку за формулою (24). Для цього:

1. Логарифмуємо вираз для  $\rho$  ( $\ln \rho = \ln 4 + \ln m - \ln \pi - 2 \ln d - \ln h$ ) і беремо відповідні частинні похідні. Маємо:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} \Delta m = \frac{\Delta m}{m}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial d} \Delta d = -2 \frac{\Delta d}{d}, \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial h} \Delta h = -\frac{\Delta h}{h}.$$

2. Підставляємо отримані вирази для

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (x_1=m, x_2=d, x_3=h)$$

у формулу (24). Маємо, що відносна похибка (щодо врахування  $\Delta \pi / \pi$  див. п. 1.5)

$$\delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}.$$

Абсолютна похибка:

$$\Delta \rho = \langle \rho \rangle \delta \rho.$$

Результати вимірювання –

$$\rho = \langle \rho \rangle \pm \Delta \rho; \quad \delta \rho = \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle},$$

де  $\langle \rho \rangle$  дається виразом (22).

Важливо відзначити, що основна величина результату вимірювання – середнє значення величини – одна і та ж, як у методі максимальної похибки, так і у методі квадратичної похибки.

**Приклад 2.** Знайдемо розрахункові формули для знаходження похибки вимірювання коефіцієнта динамічної в'язкості методом квадратичного сумування похибок.

Тут, на відміну від методу максимальної похибки, де результуюча похибка знаходиться сумуванням “парціальних” похибок, результуюча похибка знаходиться квадратичним сумуванням відповідних відносних похибок. Використовуючи вираз (24), маємо:

$$\delta \eta = \sqrt{a^2 \left(\frac{\Delta d}{\langle d \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\langle t \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2 + \frac{\Delta \rho_2^2 + \Delta \rho_1^2}{(\langle \rho_2 \rangle - \langle \rho_1 \rangle)^2} + b^2 \left(\frac{\Delta D}{\langle D \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2}, \quad (25)$$

де

$$a = 2 - \frac{2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}{1 + 2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}, \quad b = \frac{2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}{1 + 2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}.$$

Абсолютна похибка:

$$\Delta \eta = \langle \eta \rangle \delta \eta.$$

Кінцева формула для розрахунку результату вимірювання коефіцієнта в'язкості:

$$\eta = \langle \eta \rangle \pm \Delta \eta, \quad \delta \eta = \frac{\Delta \eta}{\langle \eta \rangle}.$$

Числовий розрахунок результату вимірювання буде зроблений у п. 1.5.

## 1.4 Наближені величини і наближені обчислення

Обробка результатів фізичних вимірювань здійснюється шляхом дій з наближеними числами. Ці дії підлягають певним правилам.

Дамо короткі відомості щодо наближених чисел і дій над ними.

### 1.4.1 Загальні відомості про наближені числа

#### 1.4.1.1 Правильні й сумнівні цифри. Значущі цифри

Почнемо з прикладу. Нехай у процесі обробки результатів вимірювання ми отримали для величини  $d$  значення  $\langle d \rangle = 8,7564$  мм, а для абсолютної похибки значення  $\Delta d = 0,03$  мм. Видно, що похибка не впливає на значення перших двох цифр (8,7) результату вимірювання, заданого у формі  $d = \langle d \rangle \pm \Delta d$ ; це – правильні (точні) цифри числа 8,7564. Цифра 5 буде вже сумнівною.

Таким чином, щоб знайти правильні і сумнівні цифри числа, потрібно знати його похибку.

Правильні та сумнівні цифри числа називаються значущими.

При записі результату вимірювання залишають лише значущі цифри з дотриманням правил заокруглення (див. далі). В даному випадку

$$d = (8,76 \pm 0,03) \text{ мм.}$$

Якщо ж величина  $\langle d \rangle$  використовується в подальшому, наприклад при знаходженні площі поперечного перерізу циліндра за формулою  $S = \frac{\pi \langle d \rangle^2}{4}$ , то беруть число 8,756; цифра 6 – запасна.

В таблицях фізичних величин наводять числа тільки зі значущими цифрами. За максимальну (граничну) похибку тут приймається половина одиниці останнього записаного розряду.

**Приклад.** Числа 306, 1350, 0,004533 (абсолютні похибки тут є відповідно 3; 40; 0,00004) мають по три значущі цифри. Значення густини води (при 4 °С), взяте з таблиці  $\rho = 1000,00$  кг/м<sup>3</sup> – шість значущих цифр (всі нулі – значущі; останній нуль – сумнівний). У числі 0,0607 – три значущі цифри.

Незначущими цифрами є: 1) нулі на початку числа, за допомогою яких визначаються розряди десяткових дробів у числах, менших від одиниці; 2) нулі в кінці числа, які виникають у розрядах відкинутих цифр.

Нулі в кінці числа можуть бути значущими цифрами, якщо вони є правильними, або сумнівними цифрами. Нулі, які стоять у кінці числа в розрядах десяткових дробів – значущі (невірні нулі в цьому випадку завжди відкидаються).

Таким чином, щоб знайти значущі цифри числа, потрібно знати його сумнівну цифру.

При записі кінцевого результату незначущі (неправильні) цифри відкидають.

У фізиці прийнято писати тільки значущі цифри (особливо в кінцевих результатах). Для цього в числі кому ставлять після першої відмінної від нуля цифри, а число множать на необхідну степінь десяти (додатну або від'ємну).

**Приклад.** Числа 0,0607; 0,007; 0,00586; відповідно у вигляді  $6,07 \cdot 10^{-2}$ ;  $7 \cdot 10^{-3}$ ;  $5,86 \cdot 10^{-3}$ . Число  $186000 = 1,86 \cdot 10^5$ , якщо воно має три значущі цифри,  $186000 = 1,860 \cdot 10^5$ , якщо є чотири значущі цифри.

### 1.4.1.2 Заокруглення чисел

Заокруглити число до деякого розряду означає відкинути всі цифри, які стоять праворуч цього розряду; відкинуті цифри, які стоять зліва від коми (в розрядах цілих чисел), замінюються нулями. Так, при заокругленні числа 3043,3 до сотень отримуємо число  $3,0 \cdot 10^3$ .

При заокругленні остання значуща цифра, яку залишають, залишається без зміни, якщо цифра, яку відкидають, менша від 5 і  $8,424 \approx 8,42 \approx 8,4 \approx 8$ . Якщо цифра, яку відкидають, більша від 5, то останню цифру збільшують на одиницю:  $8,677 \approx 8,67 \approx 8,6 \approx 9$ .

Якщо при заокругленні відкидається тільки одна цифра 5 (після неї немає цифр, або стоять одні тільки нулі), то остання цифра, яка зберігається, не змінюється, якщо вона парна, і збільшується на одиницю, якщо непарна (правило парної цифри):  $8,5 \approx 8$ ;  $7,5 \approx 8$ .

Правило парної цифри має одне важливе виключення. При заокругленні похибок остання цифра, яка зберігається, збільшується на одиницю:  $8,5 \approx 9$ ;  $7,5 \approx 8$ .

Після заокруглення може виявитися, що остання збережена цифра нуль; цей нуль є точним. Його потрібно писати і в тому випадку, коли він стоїть в розряді десяткових дробів. Наприклад, при заокругленні до сотих числа 8,996 маємо 9,00.

Окремо виділимо особливості заокруглення, пов'язані з обробкою результатів вимірювання:

1. Абсолютна похибка визначається числом із кількістю значущих цифр не більше двох.
2. Результат вимірювання заокруглюють до розряду останньої значущої цифри заокругленої похибки. Так, наприклад,  $\Delta d = 0,02$  мм, то  $\langle d \rangle = 8,45$  мм заокруглюють до  $\langle d \rangle = 8,46$  мм.
3. Закруглення при обробці результатів вимірювання роблять після всіх обчислень. Проміжні обчислення роблять із значущими і запасною цифрами.
4. Якщо при заокругленні похибок відкидається цифра 5, то остання цифра, яка зберігається, збільшується на одиницю:  $0,85 \approx 0,9$ ,  $0,55 \approx 0,6$  (виключення із правила парної цифри).
5. Похибки заокруглюються в бік збільшення.
6. Якщо таблична величина задана з високою точністю ( $\pi$ ,  $e$ ), то ця величина заокруглюється так, щоб відповідними відносними похибками можна було знехтувати (приклади див. у п. 1.5).
7. Якщо таблична величина задана з точністю, порівнюваною з точністю вимірюваних величин, то значення табличної величини використовується як середнє значення, а за абсолютну похибку приймається 5 одиниць розряду, який іде за останньою значущою цифрою.

### 1.4.2 Дії з наближеними числами

Результати лабораторних вимірювань, табличні значення фізичних і математичних величин – наближені числа. Математичні дії з наближеними числами підлягають певним правилам. Знання і послідовне застосування цих правил дій з наближеними числами забезпечують надійність результату обчислень, зменшують обчислювальну роботу. Ілюзорна висока “точність” обчислень (наприклад за допомогою калькуляторів) створює помилкове уявлення про високу точність визначення фізичної величини. Точність результатів вимірювань визначається точністю вимірювальних приладів та ретельністю вимірювань і не може бути підвищена за

рахунок формального збільшення числа знаків при виконанні математичних дій (наприклад, за допомогою калькуляторів).

Правила дій з наближеними числами (правила підрахунку цифр) такі:

1. При додаванні і відніманні в кінцевому результаті зберігають стільки десяткових знаків, скільки їх є в числі з найменшою кількістю десяткових знаків.

**Приклад.**

$$321,47 + 20,188 + 6,877 = 348,535 \approx 348,54.$$

2. При множенні і діленні кінцевий результат буде мати стільки значущих цифр, скільки їх є в числі з найменшою кількістю значущих цифр. Перед виконанням дій проводять заокруглення, залишаючи одну запасну цифру.

**Приклади.**

$$84,46 \cdot 0,0048 \approx 84,5 \cdot 0,0048 = 0,4056 \approx 0,41;$$

$$625,8 : 0,43 \approx 626 : 0,43 \approx 1456 \approx 15 \cdot 10^2;$$

$$\frac{46,03 \cdot 6,2}{12,2} \approx \frac{46,0 \cdot 6,2}{12,2} \approx 23,4 \approx 23.$$

Виключення з цього правила допускається у тих випадках, коли один із співмножників починається з одиниці, а співмножник, який містить найменшу кількість значущих цифр, – з будь-якої іншої цифри. В цих випадках у кінцевому результаті зберігають на одну цифру більше, ніж у числі з найменшою кількістю значущих цифр.

**Приклади.**

$$13,37 \cdot 0,93 \approx 13,4 \cdot 0,93 \approx 12,3.$$

3. Після піднесення до степеня наближеного числа або при добуванні кореня в результаті залишають стільки значущих цифр, скільки їх є в основі або під коренем:

$$2,46^2 \approx 6,05;$$

$$\sqrt{6,886} \approx 2,624.$$

4. При логарифмуванні в мантисі наближеного числа беруть стільки значущих цифр, скільки їх є в числі, що логарифмується:

$$\ln 4,56 \approx 1,517 \approx 1,52.$$

## **1.5 Обробка результатів непрямих вимірювань: підсумкові приклади**

Завершимо розгляд питання обробки результатів вимірювань числовим представленням результату на прикладах вимірювань густини тіла і коефіцієнта внутрішнього тертя за розрахунковими формулами, наведеними у п.2.3. При цьому ми будемо керуватися правилами дій з наближеними числами, викладеними вище.

**Приклад 1.** Проведемо розрахунки, пов'язані з визначенням густини тіла циліндричної форми за формулою

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}$$

двома методами – методом максимальної абсолютної похибки і методом середньої квадратичної похибки.

Нехай результат вимірювань з надійністю  $P=0,95$  є:  $m=(68,0\pm 0,5)$  г,  $d=(15,0\pm 0,2)$  мм,  $h=(50,6\pm 0,3)$  мм; відносні похибки прямих вимірювань є  $\delta_m=0,007$ ,  $\delta_d=0,013$ ,  $\delta_h=0,006$ .

1. Метод максимальної абсолютної похибки. Вихідні розрахункові формули:

$$\langle \rho \rangle = \frac{4\langle m \rangle}{\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle},$$

$$\delta \rho = \frac{\Delta m}{\langle m \rangle} + 2 \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} + \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} + \frac{\Delta \pi}{\pi},$$

$$\Delta \rho = \langle \rho \rangle \delta \rho.$$

Якщо відоме з високою точністю значення  $\pi$  ( $\pi=3,141593$ ) заокруглити до  $\pi=3,14$ , то відносна похибка при цьому:

$$\frac{\Delta \pi}{\pi} = \frac{0,001593}{3,14} \approx 5 \cdot 10^{-4};$$

вона набагато менша від похибок прямих вимірювань, тому нею можна знехтувати, а  $\pi$  взяти рівним 3,14 для підстановки у вираз для визначення  $\langle \rho \rangle$ .

Таким чином, середнє значення густини є:

$$\langle \rho \rangle = \frac{4 \cdot 68,0}{3,14 \cdot (15,0)^2 \cdot 50,6} \text{ г/мм}^3 = 7,61 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Відносна похибка:

$$\delta \rho = \frac{0,5}{68,0} + 2 \frac{0,2}{15,0} + \frac{0,3}{50,6} \approx 0,04; \delta \rho = 4\%.$$

Абсолютна похибка:

$$\Delta \rho = 7,61 \cdot 10^3 \cdot 0,04 \text{ кг/м}^3 = 0,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Таким чином, результат вимірювання густини  $\rho$ , розрахований у наближенні максимальної абсолютної похибки, є:

$$\rho = (7,6 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \delta \rho = 4\%.$$

2. В методі середньої квадратичної похибки вихідними формулами є середні значення

$$\langle \rho \rangle = \frac{4\langle m \rangle}{\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle}$$

(дається тим самим виразом, що і в методі максимальної абсолютної похибки)

$$\delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{\langle m \rangle}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta d}{\langle d \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\langle h \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2},$$

$$\Delta \rho = \langle \rho \rangle \delta \rho.$$

Маємо:

$$\langle \rho \rangle = 7,61 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$\delta \rho = \sqrt{\left(\frac{0,5}{68,0}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0,2}{15,0}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{50,6}\right)^2} \approx 0,027 \approx 0,03; \delta \rho \approx 3\%$$

(внеском  $\Delta \pi / \pi$  знехтувано).

Абсолютна похибка:

$$\Delta \rho = 7,61 \cdot 0,027 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 0,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Кінцевий результат:

$$\rho = (7,6 \pm 0,2) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \delta \rho \approx 3\%.$$

**Приклад 2.** Обчислимо середнє значення коефіцієнта в'язкості водного розчину гліцерину, абсолютну та відносну похибки, виходячи з формули

$$\eta = \frac{g}{18} d^2 t \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{h \left( 1 + 2,4 \frac{d}{D} \right)}$$

методом максимальної абсолютної похибки і методом середньої квадратичної похибки. Результати прямих вимірювань –  $d=(2,15 \pm 0,04)$  мм,  $P=0,95$ ;  $h=(650,0 \pm 0,5)$  мм (вимір зроблений з допомогою металевої лінійки),  $t=(22,4 \pm 0,2)$  с (враховано, що точність електричного секундоміра, що використовується в роботі, дорівнює 0,2 с),  $D=(34,2 \pm 0,3)$  мм,  $P=0,95$  (використовувався штангенциркуль). З таблиць беремо  $\rho_2=11,3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\Delta\rho_2=0,05 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, для густини рідини маємо  $\rho=1,20 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\Delta\rho=0,05 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $g=9,8107$  м/с<sup>2</sup> (для Тернополя).

Вихідні розрахункові формули за методом максимальної абсолютної похибки є

$$\langle \eta \rangle = \frac{\langle g \rangle \langle d \rangle^2 \langle t \rangle (\langle \rho_2 \rangle - \langle \rho_1 \rangle)}{18 \langle h \rangle \left( 1 + 2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle} \right)},$$

$$\delta\eta = a \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} + \frac{\Delta t}{\langle t \rangle} + \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} + \frac{\Delta\rho_2 + \Delta\rho_1}{\langle \rho_2 \rangle - \langle \rho_1 \rangle} + \frac{2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}{1 + 2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}} \cdot \frac{\Delta D}{\langle D \rangle} + \frac{\Delta g}{\langle g \rangle},$$

$$\Delta\eta = \langle \eta \rangle d\eta.$$

Підстановка числових даних у складові відносної похибки дає:

$$a \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} \approx 0,036; \quad \frac{\Delta t}{\langle t \rangle} \approx 0,009; \quad \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} \approx 8 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2}{\langle \rho_2 \rangle - \langle \rho_1 \rangle} \approx 0,005; \quad \frac{2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}}{1 + 2,4 \frac{\langle d \rangle}{\langle D \rangle}} \frac{\Delta D}{\langle D \rangle} \approx 0,0013.$$

Якщо для  $\langle g \rangle$  взяти 9,81 м/с<sup>2</sup>, то відносна похибка такого наближення  $\Delta g/g \approx 7 \cdot 10^{-5}$ , тобто цією похибкою можна знехтувати. Видно, що відносна похибка  $\delta\eta=0,05$ ;  $\delta\eta=5\%$ .

Середнє значення коефіцієнта в'язкості

$$\langle \eta \rangle = \frac{9,8}{18} \cdot \frac{2,15 \text{ мм}^2 \cdot 22,4 \text{ с} \cdot (11,3 - 1,20) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3}{650 \text{ мм} \left( 1 + 2,4 \frac{2,15 \text{ мм}}{34,2 \text{ мм}} \right)} \approx 0,837 \text{ кг/м} \cdot \text{с} \approx 0,84 \text{ кг/м} \cdot \text{с}.$$

Абсолютна похибка:

$$\Delta\eta = \langle \eta \rangle \delta\eta = 0,837 \cdot 0,051 \text{ кг/м} \cdot \text{с} \approx 0,043 \text{ кг/м} \cdot \text{с}.$$

Таким чином, результат вимірювання коефіцієнта в'язкості:

$$\eta = (0,837 \pm 0,043) \text{ кг/м} \cdot \text{с} \approx (0,84 \pm 0,04) \text{ кг/м} \cdot \text{с}, \quad \delta\eta = 5\%.$$

В методі квадратичного сумування похибки маємо, що відносна похибка (за формулою (25)):

$$\delta\eta \approx \sqrt{(0,036)^2 + (0,009)^2 + (0,005)^2 + (0,0013)^2} \approx 0,036 \approx 0,04.$$

Абсолютна похибка  $\Delta\eta = 0,837 \cdot 0,036 \text{ кг/м} \cdot \text{с} \approx 0,03 \text{ кг/м} \cdot \text{с}.$

Результат вимірювання є  $\eta = (0,84 \pm 0,03)$  кг/м·с,  $\delta\eta = 4\%$  (корисно самому проробити відповідні розрахунки і переконатися в правильності наведених вище виразів).

## 1.6 Поради щодо проведення вимірювань та обробки результатів вимірювань

У підсумку, вкажемо на наступне.

1. Збільшення кількості вимірювань (спостережень) певної фізичної величини призводить до зменшення випадкової похибки результату вимірювання. В умовах виконання лабораторних робіт рекомендується проводити 3-5 спостережень. Однократне спостереження здійснюється (ретельно) тоді, коли засоби вимірювання - невисокої точності (висока точність вимірювання не є необхідною).

2. Якщо випадкова похибка не проявляється, а бажано мати вищу точність вимірювання, то потрібно замінити вимірювальний прилад іншим (наприклад, замість штангенциркуля використати мікрометр).

3. Обробка результатів прямих вимірювань здійснюється за схемою, описаною в п.1.2. (відповідні приклади наведені в п. 1.2.6). Випадкові похибки рекомендується враховувати за методом середньої квадратичної похибки із заданням надійності вимірювання (довірчої ймовірності)  $P=0,95$ . Результируюча похибка знаходиться “квадратичним додаванням” випадкової та інструментальної похибок. Результат прямого вимірювання величини  $X$  задається у вигляді:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x ; P=0,95$$

із заданням відносної похибки вимірювання:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%.$$

$\Delta x$  рекомендується заокруглювати (із завищенням) до числа із однією значущою цифрою. При цьому похибка заокруглення  $\Delta x$  не повинна перевищувати 20%; якщо ця умова не виконується, то беруть дві значущі цифри.

4. Обробка результатів непрямих вимірювань проводиться за схемою, описаною в п. 1.3 (відповідні приклади наведені в п.1.5). Рекомендується використовувати, як більш послідовний, метод квадратичної похибки; при цьому для всіх величин прямого вимірювання одне і те ж значення надійності  $P$  ( $P=0,95$ ). Значення табличних величин  $\pi$ ,  $g$  (які задані з високою точністю) достатньо взяти з трьома значущими цифрами ( $\pi=3,14$ ,  $g=9,81$  м/с<sup>2</sup>); відповідними відносними похибками при цьому можна знехтувати. Для табличних значень величин, які задані з точністю, порівняльною з точністю прямих вимірювань, за абсолютну похибку взяти 5 одиниць розряду, який йде за останньою значущою цифрою, а значення табличної величини вважати за середнє значення величини. Чисельні розрахунки проводити з урахуванням правил дій з наближеними числами (див. п. 1.4). Результат непрямого вимірювання записати у тій самій формі, що і при поданні результату прямого вимірювання.

## 1.7 Графічне зображення результатів експерименту

Графічний метод дає можливість наочніше подавати результати експерименту – залежність функції  $y$  (величина, закономірність якої вивчається) від аргументу  $x$  (незалежна змінна), а також графічно знаходити величини  $y$  для таких значень  $x$ , які безпосередньо не вимірювались.

Для побудови графіків слід раціонально вибрати масштаб, щоб на графіку вибраного розміру розмістився весь діапазон експериментальних значень фізичних величин, які відкладають на координатних осях, і щоб ціна однієї поділки виражалася, по можливості, цілим числом. Потрібно використати всю площу графіка (якщо дослідні дані набагато відрізняються від нуля, відлік поділок на осях слід починати з деяких значень, які трохи менші від одержаних під час досліду). На кінцях координатних осей нанести позначення величин, а одиниці вимірювання відокремити комою (див. рис. 1.1).

Після нанесення експериментальних точок накреслити плавну криву так, щоб вона проходила якомога ближче до всіх експериментальних точок і щоб приблизно однакове число точок було по обидва боки лінії (зауважимо, що помилкою було б просто з'єднати дослідні точки відрізками). Якщо окремі точки значно відхиляються від кривої, то це може свідчити про великі похибки вимірювання або явні промахи (слід повторити вимірювання для цих значень). Якщо наперед відомо, що отримана

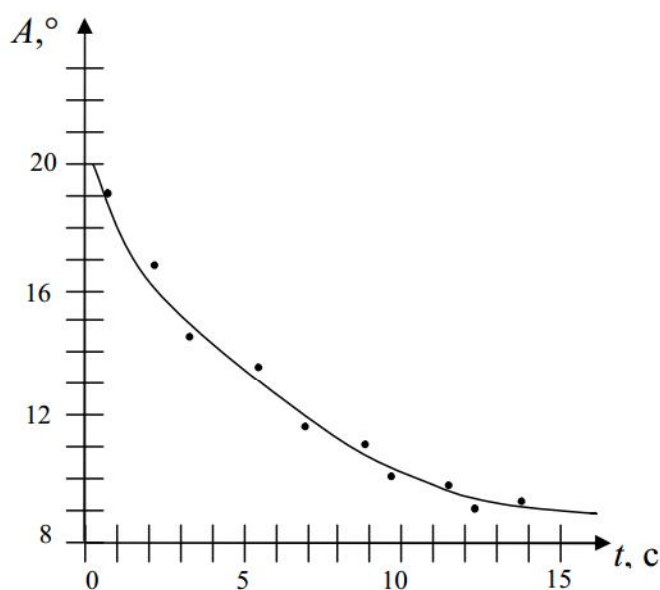


Рисунок 1.1

залежність має бути лінійною, то замість плавної кривої слід будувати пряму за вказаним вище принципом.

### ЛІТЕРАТУРА

1. ДСТУ-2681-94. Метрологія. Терміни і визначення.
2. Кучеренко І.М., Душенко В.П., Андріанов В.М. Обробка результатів фізичних вимірювань.- К.: Вища школа, 1981.- 216 с.
3. Загальна фізика. Лабораторний практикум. За ред. І.Т. Горбачука - К.: Вища школа, 1992.- 509 с.
4. Сквайрс Дж. Практическая физика.- М.: Мир, 1971.- 246 с.
5. Тейлор Дж. Теория ошибок.- М.: Мир, 1985.- 272 с.

## 2 ВИМІРЮВАЛЬНІ ПРИЛАДИ

### 2.1 Вимірювання довжини лінійкою, штангенциркулем, мікрометром

#### 2.1.1 Масштабна лінійка

Для безпосередніх вимірювань довжини широко використовують різні види лінійок. Ціна поділки, наприклад, масштабної лінійки становить 1 мм. Тому точність вимірювання масштабною лінійкою рівна половині ціни поділки, тобто  $\pm 0,5$  мм.

#### 2.1.2 Штангенциркуль

Для точніших вимірювань користуються приладами з ноніусом. Ноніусом називається додаткова шкала до звичайного масштабу, яка дає змогу підвищити точність вимірювання в 10-20 разів. Розглянемо лінійний ноніус штангенциркуля. Його шкала може мати 10, 20 або 50 однакових поділок, які мають сукупну довжину на один міліметр меншу, ніж така сама кількість поділок основної шкали (див. рис. 2.1). Це означає, що поділка ноніуса на 0,1; 0,05 або на 0,02 міліметра менша за відповідну поділку основної шкали. Точність вимірювання довжини штангенциркулем  $\Delta l$  з вказаними кількостями поділок визначається тими ж цифрами: 0,1; 0,05 або 0,02 міліметра.

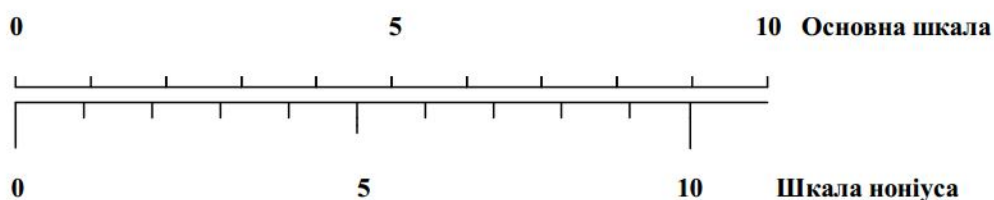


Рисунок 2.1

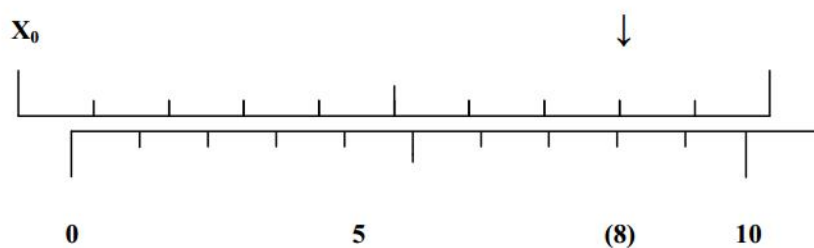
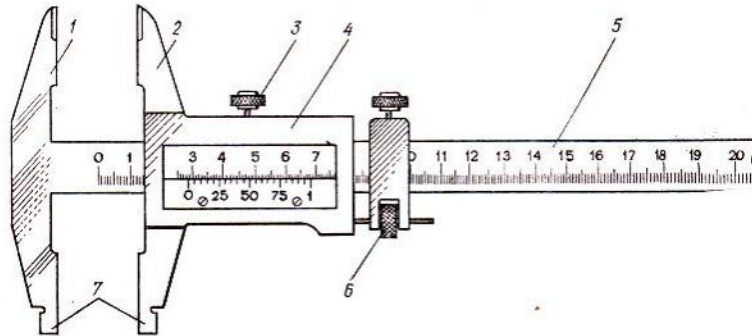


Рисунок 2.2

При стиснутих ніжках штангенциркуля нульова поділка ноніуса має співпадати з нульовою поділкою основної шкали. При вимірюванні довжини деталі нульова поділка ноніуса зміщується вправо по основній шкалі і зупиняється між деякими міліметровими поділками основної шкали. Найближча поділка основної шкали зліва від нульової поділки ноніуса показуватиме ціле число міліметрів  $x_0$ , які містяться у вимірюваній довжині.

Для дробової частини виміру довжини в міліметрах слід визначити, яка за порядком поділка ноніуса збігається максимально точно з поділкою основної шкали. Якщо з поділкою основної шкали збігається n-на поділка ноніуса, то до отриманого цілого числа міліметрів  $x_0$  слід додати  $\Delta x = \Delta l \cdot n$ .

Доведемо це правило, користуючись такими міркуваннями. З рис. 2.2 видно, що відстань  $\Delta x$  від поділки  $x_0$  основної шкали до нульової поділки ноніуса рівна різниці довжин  $n$  поділок основної шкали і  $n$  поділок шкали ноніуса:  $\Delta x = n - n(1 - \Delta l) = n \cdot \Delta l$  (на рис. 2.2  $\Delta x = 0,8$  мм). Така різниця довжин буде виражатися таким же виразом  $n \cdot \Delta l$  в усіх випадках. Наприклад, при вимірюванні з ноніусом, який має точність  $\Delta l = 0,1$  мм, співпадання четвертої поділки ноніуса з поділкою основної шкали означає додавання 0,4 мм до цілого числа  $x_0$  мм основної шкали.

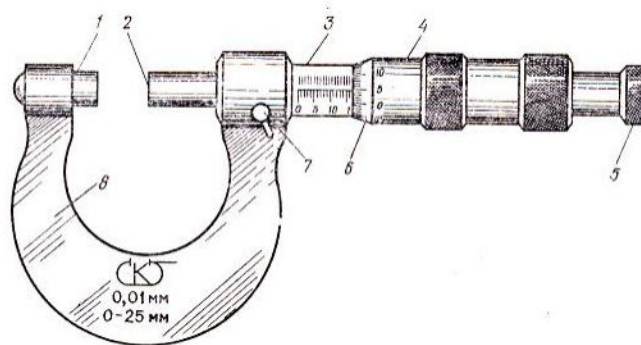


**Рисунок 2.3**

Штангенциркуль складається (рис. 2.3) із сталеві лінійки 5, відносно якої переміщується рамка 4 з ноніусом, і двох пар ніжок – нерухомих 1 і рухомих 2. У момент дотику до деталі рухому ніжку штангенциркуля слід переміщувати за допомогою мікрометричного пристрою 6, щоб запобігти надмірному натисканню. Після цього рухому ніжку закріплюють на штанзі фіксуючим гвинтом 3. Калібровані губки 7 використовуються для вимірювання внутрішніх розмірів деталі.

### 2.1.3 Мікрометр

Мікрометр – це інструмент для вимірювання лінійних розмірів з точністю до 0,01 мм. Його основні частини (рис. 2.4): сталева скоба 8, що має нерухому опорну



**Рисунок 2.4**

п'яту 1, стебло 3, мікрометричний гвинт 2 і фіксуючий гвинт 7. На зовнішній поверхні

стебла нанесено дві поздовжні міліметрові шкали: основна та зміщена на 0,5 мм допоміжна. Зовні стебло охоплює барабан 4, з'єднаний з мікрометричним гвинтом. При обертанні барабана обертається і гвинт, при цьому переміщується його вимірювальна поверхня 2. Скошений обід барабана 6 поділено на 50 або 100 поділок. При вимірюванні слід обертати барабан тільки за головку тріскачки 5 (це запобігає деформуванню вимірюваного тіла).

Для відлічування показів мікрометра по шкалі стебла визначають ціле число (нижня шкала) і половинки (верхня шкала) міліметрів. Соті частки міліметра визначають за поділками на барабані.

## **2.2 Вимірювання часу секундомірами**

При вимірюванні невеликих проміжків часу користуються секундомірами: механічними, електричними та електронними.

### **2.2.1 Електричний секундомір**

Електричний секундомір має на циферблаті дві колові шкали. Зовнішня (більша) визначає десяті та соті частки секунди, а внутрішня (менша) – цілі секунди. Початок відліку часу здійснюється натисканням кнопки “Пуск”, розміщеної зверху зліва. Кнопку слід тримати натиснутою до закінчення відповідного виміру, при її відпусканні секундомір зупиняється.

Повернення стрілок у нульове положення проводиться натисканням кнопки “Установка нуля”, яка розміщена зверху справа.

### **2.2.2 Електронний секундомір**

На передній панелі електронного секундоміра знаходяться три електронні лампи, у яких при вмиканні живлення можна побачити світні точки. Початок відліку часу здійснюється натисканням кнопки “Пуск”, розміщеної знизу зліва. Кнопку слід тримати натиснутою до закінчення відповідного виміру, при її відпусканні секундомір зупиняється. Під час відліку часу вказані світні точки переміщуються з різними швидкостями по колу у відповідній лампі, а при закінченні відліку зупиняються біля певної цифри (у діапазоні від 0 до 9), що розміщені навколо кожної лампи. Цифра біля першої лампи визначає секунди від початку відліку часу, біля другої – десяті, біля третьої – соті частки секунди.

Повернення секундоміра у нульове положення для нового вимірювання проводиться натисканням кнопки “Сброс”, яка розміщена внизу справа.

### **2.2.3 Точність секундомірів з ручним вмиканням**

Точність секундомірів з ручним вмиканням дорівнює 0,2 секунди. Це зумовлено тим, що людина не може роздільно сприйняти проміжки часу, менші за 0,1 секунди. Тому при вимірюваннях експериментатор буде допускати помилки, незалежно від точності секундоміра: у момент ввімкнення – 0,1 с, у момент вимкнення – також 0,1 с. Отже, максимальна похибка становитиме 0,2 с.

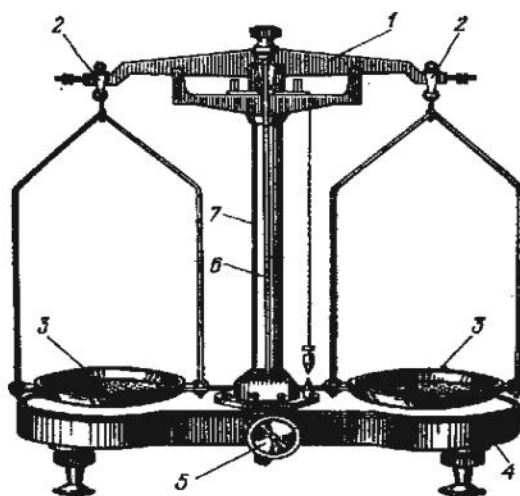
## 2.3 Вимірювання маси

Для вимірювань маси в лабораторіях використовують лабораторні терези. Лабораторні терези поділяються на два види: *важільні й пружинні*. Серед важільних терезів розрізняють *технічні, аналітичні та терези найвищої точності* (метрологічні).

Серед пружинних терезів розрізняють: *крутильні* (навантаження зрівноважується обертаючим моментом нитки) і *торсійні* (навантаження зрівноважується обертаючим моментом плоскої спіральної пружини).

У практиці лабораторій найбільш поширені технічні терези Т-200 та Т I-1.

Основною робочою частиною терезів Т-200 є сталеве рівноплече коромисло 1, на кінці якого за допомогою двох серг 2 і стремен підвішано шальки терезів 3 (рис. 2.5). Посередині коромисла закріплена довга стрілка 6. Коромисло має три тригранні призми: центральною призмою воно спирається на подушку в штоці аретира, який міститься всередині колонки 7, встановленої на станині 4; 5 – ручка аретира. Аретир – пристрій, який зупиняє коливання терезів, а також вивільняє призми від навантаження, щоб запобігти пошкодженням відповідальних частин під час транспортування та тоді, коли на терезах не виконують зважування. Щоб привести терези в робочий стан, ручкою 5 відкривають аретир.



Перед початком зважування терези встановлюють за виском і перевіряють правильність їхньої роботи (однаковість відхилення вправо і вліво стрілки вільних, не навантажених терезів). Якщо вони працюють неправильно, вдаються до корекції (перевіряють складання, опору серг на призми, чистоту призм і гнізд для них тощо).

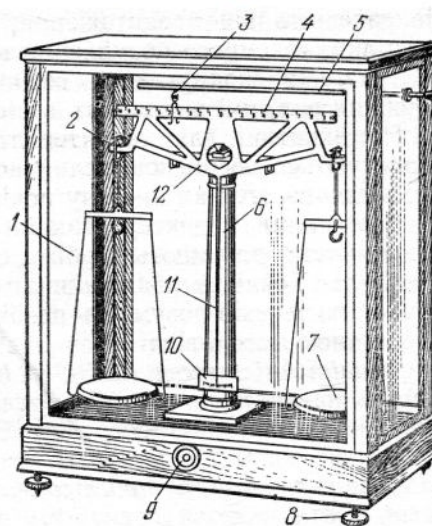
Зважуваний предмет для зручності вміщують на ліву шальку терезів, а важки – на праву. Гарячі, сильно охолоджені та мокрі предмети зважувати не рекомендується.

Класти важки на шальки терезів і знімати їх потрібно пінцетом при закритому аретирі. Спочатку кладуть велику гирку, яка вважається найбільш близькою до маси зважуваного предмета, потім, послідовно замінюючи або додаючи менші гирки, досягають рівноваги терезів. Аретир повертають рівномірно й повільно.

Кожні терези розраховані на певне, гранично допустиме навантаження, яке зазначається на терезах.

У практиці точного зважування важливим компонентом є гирі. *Гирі* – це тіла певної маси і встановленої форми, які призначені для зважування (вимірювання невідомої маси) на терезах.

Точне лабораторне (практичне) зважування реалізується на двошалькових аналітичних терезах з рівноплечим трипризмовим коромислом (рис. 2.6). Вони складаються з рівноплечого коромисла 12,



трубчастої колонки 6 та шальок 7. Ребром середньої опорної призми коромисло спирається на агатову подушку колонки. До крайніх вантажопідйомних призм, скріплених з коромислом, підвішені серги 2 з шальками. Ребра всіх трьох призм паралельні, поверхні дотику відполіровані. Для відліку коливань призначено стрілку 11, кінець якої переміщується паралельно шкалі 10. Колонка закріплена на опорній дошці з гвинтовими ніжками 8 для горизонтального встановлення терезів за виском. Зупинку коливань і відокремлення призм від подушок у неробочому стані здійснюють аретиром, ручка 9 якого розміщена під вітриною 1 терезів. Остання захищає терези від пилу, вологи, потоків повітря та нагрівання. На верхній частині коромисла нанесено рейтерну шкалу 4. Рейтер (міліграмова гиря у формі дротини) навішується на коромисло за допомогою спеціального пристрою, що складається з гачка, скріпленого зі стержнем 5 на рухомій штанзі й виведеного на бічну сторону вітрини.

При описанні терезів у фізичних практикумах обмежуються розглядом стійкості та чутливості терезів. Під стійкістю терезів розуміють здатність коромисла, виведеного з стану рівноваги, знову повертатись у початковий стан. При повторних зважуваннях тіла сталої маси терези мають давати однакові значення. Для забезпечення стійкої рівноваги центр маси коромисла терезів повинен бути нижче від його точки опори. Положення центру маси можна змінювати балансирною гайкою, розміщеною на стрілці.

*Чутливість терезів* характеризується відношенням кутового або лінійного переміщення покажчика рівноваги (стрілки) до маси навантаження ( $S = tg a/m_0$ , де  $a$  – кут відхилення стрілки при вміщенні на шальку терезів тіла масою  $m_0$ ). Чутливість важільних терезів залежить від навантаження, маси коромисла, довжини плеча і стрілки, взаємного розміщення вершин призм і центру мас коромисла, радіусів заокруглення вершин призм, жорсткості коромисла, пружних сил, які виникають у місці контакту призм і подушок.

На практиці для характеристики чутливості терезів зі шкалами користуються оберненою величиною, тобто масою тіла, яка зумовлює переміщення стрілки на одну поділку. Ця величина і є *ціною поділки*.

Важливими характеристиками терезів є точність і правильність. Під точністю розуміють розбіжність мас при повторних зважуваннях предмета. Точність аналітичних терезів дорівнює 0,0002 г. Під правильністю терезів розуміють розбіжність між результатами зважувань та істинною масою тіла.

При зважуванні на аналітичних терезах слід дотримуватися таких правил:

- 1) класти на шальки або знімати з них тіло і гирі (включаючи накладання рейтера і кільцевих гир) лише при закритому аретирі; сипкі речовини зважують на годинниковому склі;
- 2) для зручності слід класти зважуване тіло на ліву шальку терезів (у центрі), а гирі – на праву;
- 3) переносити важки лише за допомогою пінцета; міліграмові гирі беруть за зігнуті кути; спочатку кладуть тільки великі гирі, близькі за масою до маси зважуваного тіла;
- 4) звільняти терези від аретира, коли вони зрівноважені не повністю, а лише настільки, щоб було видно, яка шалька переважає; повертати аретир слід рівномірно і повільно;
- 5) коли стрілка коливається, треба терези ставити на аретир у момент проходження стрілки через середню поділку шкали;
- 6) при спостереженні коливань стрілки дверцята вітрини мають бути зачинені;
- 7) після закінчення зважування аретир закривають, знімають тіло і гирі, зачиняють дверці вітрини, гирі зберігають у футлярі.

Зважування тіл. Щоб зважити тіло на аналітичних терезах, потрібно: 1) знайти нульову точку; 2) зважити тіло; 3) визначити чутливість терезів; 4) внести поправку на недовантаження; 5) внести поправку на вплив повітря.

Зупинимося докладніше на кожній з цих операцій.

1. Перед зважуванням потрібно знайти положення рівноваги ненавантажених терезів, тобто поділку шкали, проти якої зупинилася б стрілка при відсутності тертя. Цю поділку називають нульовою поділкою терезів. Щоб виключити тертя, нульову точку визначають за методом коливань. При коливаннях коромисла стрілка поводить себе як маятник. По інерції стрілка не зупиняється в нульовій точці. Цю точку визначають, спостерігаючи за коливаннями стрілки при відкритому аретирі. Відмічають, до якої поділки вона відхиляється вліво і вправо, і роблять відлік до п'яти коливань:  $n_1, n_3, n_5$  – зліва і  $n_2, n_4$  – справа. Амплітуда коливань зменшується не пропорційно часу, а за експоненціальним законом ( $\sim e^{-\beta t}$ , де  $\beta$  – коефіцієнт згасання). Беруть середнє з відхилень у кожен бік і нульову точку знаходять так:

$$l'_0 = \frac{\frac{n_1 + n_3 + n_5}{3} \cdot \frac{n_2 + n_4}{2}}{2}.$$

Повторюють спостереження принаймні три рази і обчислюють середнє значення нульової точки

$$l_0 = \frac{l'_0 + l''_0 + l'''_0}{3}.$$

2. Зважуване тіло кладуть на середину лівої шальки, а на праву ставлять пінцетом гирі (спочатку масу тіла знаходять з нестачею до 1 г). Потім підбирають таке положення рейтера на коромислі, при якому стрілка терезів коливається поблизу нульової точки. Далі методом коливань визначають точку рівноваги навантаження терезів  $l$ .

Коли точка рівноваги терезів випадково збігається з нульовою точкою терезів  $l_0$ , то маса гир на шальці разом з рейтером точно дорівнює масі тіла  $M$ . Коли ж точка рівноваги зміщена на  $l - l_0$  поділок від нульової точки терезів, то тіло зважене або з недовантаженням, або з перевантаженням. Щоб внести відповідну поправку, треба знати ціну однієї поділки шкали, тобто визначити чутливість навантаження терезів.

3. Щоб визначити чутливість навантаження терезів, рейтером збільшують навантаження їх ще на 1 мг і методом коливань визначають нове положення їхньої рівноваги –  $l_1$ . Порівнюючи його з попередньою точкою рівноваги  $l$ , визначають чутливість навантажених терезів:

$$S = l_1 - l.$$

У першому наближенні рівняння чутливості терезів має вигляд:

$$S = \frac{\operatorname{tga}}{m_0} = \frac{a \sin \varphi}{m_1 l_1 + 2m_2 l_2},$$

де  $\alpha$  – кут відхилення стрілки;  $a$  – довжина плеча коромисла;  $\varphi$  – кут прогину плечей коромисла;  $m_0, m_1, m_2$  – відповідно маса тіла для визначення чутливості, маса коромисла і маса навантаження на кожну з шальок (корисна маса плюс маса шальки);  $l_1, l_2$  – відстані від точки опори до центру маси коромисла і від точки опори до точки прикладання рівнодійної навантажень  $m_1$  і  $m_2$ .

4. Знаючи чутливість, визначають ціну однієї поділки на шкалі терезів:

$$d = \frac{1}{l_1 - l} \text{ (мг)},$$

а потім поправку на недовантаження:

$$(l - l_0) \frac{1}{l_1 - l} \text{ (мг)}.$$

Маса зваженого тіла

$$M = m + \frac{l - l_0}{l_1 - l} (\text{мг}).$$

5. На зважуване тіло і гирі в повітрі діє архімедова виштовхувальна сила. Це призводить до того, що коли взяти дві гирі однакової маси, виготовлені з різних матеріалів (наприклад, з латуні і сталі), то латунна гиря в повітрі переважить сталю (густина латуні  $\rho_{\text{л}} = 8500 \text{ кг/м}^3$ , сталі -  $\rho_{\text{с}} = 7800 \text{ кг/м}^3$ ).

Позначаючи густину тіла  $\rho_{\text{т}}$ , важків  $\rho_{\text{в}}$ , повітря  $\rho_{\text{п}}$  і враховуючи виштовхувальну силу повітря, рівновагу сил на терезах записують так:

$$M - \frac{M}{\rho_{\text{т}}} \rho_{\text{п}} = m - \frac{m}{\rho_{\text{в}}} \rho_{\text{п}},$$

звідки маса тіла

$$M = m \frac{1 - \rho_{\text{п}}/\rho_{\text{в}}}{1 - \rho_{\text{п}}/\rho_{\text{т}}}.$$

Виконавши в останній рівності ділення, в першому наближенні для справжньої маси тіла дістанемо:

$$M = m \left( 1 - \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{т}}} \right).$$

## **3 ПІДГОТОВКА ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ, ЇЇ ВИКОНАННЯ ТА ФОРМА ЗВІТНОСТІ**

### **I Підготовка до лабораторної роботи**

1. Прочитати інструкцію до лабораторної роботи.
2. Переписати в робочий зошит назву роботи, її мету, перелік приладів і матеріалів.
3. Законспектувати теоретичні відомості й виведення розрахункових формул, основну увагу приділяючи формулюванню явищ і фізичних законів, на яких базується дана робота.
4. Зробити рисунок установки з поясненнями до нього.
5. Переписати розрахункові формули і порядок виконання роботи.
6. Підготувати таблиці для запису результатів дослідів.
7. Вивести формули для обчислення похибок.
8. Переписати контрольні запитання.

### **II Що необхідно знати перед виконанням лабораторної роботи**

1. Формулювання явищ і фізичних законів, на яких базується дана робота.
2. Назви, розмірності, спосіб визначення всіх величин, що входять у розрахункові формули.
3. Опис установки до лабораторної роботи за рисунком і пояснення її принципу дії.
4. Порядок виконання роботи.
5. Відповіді на контрольні запитання.

### **III Виконання лабораторної роботи**

1. Отримати допуск до роботи у викладача.
2. Пояснення до даної роботи отримати перед виконанням дослідів у лаборанта або інженера.
3. Виконуючи досліди, всі дані експериментів записувати у таблиці, всі проміжні розрахунки робити у зошиті, графіки виконувати на міліметровому папері.
4. Після виконання роботи на занятті дати зошит для перевірки і підпису викладачу (якщо робота виконується на відробці, то зошит перевіряється і підписується лаборантом або інженером у лабораторії).

### **IV Оформлення звіту про виконану лабораторну роботу**

1. Звіт оформляти на подвійному аркуші із зошита або на листках формату А4 з одного боку.
2. На титульному листку зверху вказати міністерство, назву вузу, кафедри, лабораторії. В центрі листка вказати номер та назву виконаної лабораторної роботи. Нижче справа вказати прізвище та ініціали, шифр групи студента, що виконав роботу та викладача, що прийняв роботу. Внизу листка вказати місто і рік.
3. Звіт повинен містити:
  - мету роботи;
  - прилади та матеріали;
  - рисунок установки з поясненнями;
  - розрахункові формули з поясненнями;
  - формули для похибок;
  - таблиці з результатами дослідів;
  - графіки (якщо це вказано у роботі);
  - **кінцеві результати.**

## ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ТІЛА ПРАВИЛЬНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ

**Мета роботи:** оволодіти практичним способом визначення густини речовини та методикою розрахунку похибок.

### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Тіло правильної геометричної форми (циліндр).
2. Штангенциркуль.
3. Мікрометр.
4. Терези.

### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Маса тіла – це фізична величина, яка є мірою інертності тіла при поступальному русі. Інертність – це властивість тіл зберігати стан спокою чи рівномірного прямолінійного руху при відсутності зовнішніх сил або коли дія цих сил компенсується. Маса є однією з основних характеристик тіла, вона залежить від розмірів тіла і від природи речовини, з якої складається тіло. Маса характеризує не тільки інертні властивості матеріального тіла, але і його гравітаційні властивості: сила притягання між двома тілами пропорційна до їх мас.

Величина маси може бути визначена за різними її проявами (інерція, гравітаційна взаємодія) шляхом порівняння з масою еталонного тіла, за домовленістю прийнятою за одиницю. В Міжнародній Системі одиниць (SI) одиницею вимірювання маси є кілограм (1 кг). Масу тіла, як правило, визначають зважуванням на терезах або вагах (про методи точного зважування див. вступ).

2.2 Густина  $\rho$  однорідної речовини, маса якої  $m$ , а об'єм  $V$ , визначається за формулою:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.1)$$

З формули видно, що густина є фізичною величиною, яка чисельно рівна масі одиниці об'єму однорідної речовини. В формулі (2.1) усі величини повинні бути виражені в одній системі одиниць.

За цією ж формулою визначається середня густина неоднорідної речовини\*:

$$\langle \rho \rangle = \frac{m}{V}. \quad (2.2)$$

У згоді із формулами (2.1) і (2.2) маса однорідного тіла

$$m = \rho \cdot V, \quad (2.3)$$

неоднорідного -

$$m = \langle \rho \rangle \cdot V. \quad (2.4)$$

---

\*у практикумі поряд з позначенням  $\langle x \rangle$  для середнього значення величини  $x$  вживається позначення  $x_c$  (при обробці результатів вимірювань у лабораторних роботах).

Якщо для неоднорідної речовини відома залежність густини від координат  $x, y, z$  точок тіла, то замість формули (2.4) маємо:

$$m = \int \rho(x, y, z) \cdot dV, \quad (2.5)$$

де інтегрування ведеться по всьому об'єму тіла.

Відношення густин двох тіл називається відносною густиною, для рідин і твердих тіл вона звичайно визначається по відношенню до густини дистильованої води.

В Міжнародній Системі одиниць (SI) одиницею вимірювання густини є кілограм, поділений на кубічний метр ( $[\rho] = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ). Для неоднорідної речовини густина

у певній точці визначається як границя відношення маси  $\Delta m$  певної кількості речовини в околі даної точки до її об'єму  $\Delta V$  за умови, що об'єм є нескінченно малим. Слід пам'ятати, що значення густини залежить від температури (в таблицях значень густини речовин вказується і ця температура).

2.3 Для визначення об'єму тіл неправильної геометричної форми використовують, зокрема, метод гідростатичного зважування. Якщо маємо тіло правильної геометричної форми, то його об'єм можна визначити за відомими з стереометрії формулами, вимірявши його лінійні розміри. Для точних вимірювань лінійних розмірів використовують мікрометри, штангенциркулі, масштабні лінійки.

### 3 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ФОРМУЛ

3.1 Об'єм циліндра визначається формулою:

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h, \quad (3.1)$$

де  $d$  - діаметр циліндра,  $h$  - його висота. Із формули (2.1) отримуємо розрахункову формулу для знаходження густини:

$$\rho = \frac{4m}{\pi \cdot d^2 \cdot h}. \quad (3.2)$$

Для визначення густини тіла необхідно провести прямі вимірювання наступних величин: маси (з допомогою терезів), діаметра (з допомогою мікрометра або штангенциркуля) та висоти циліндра (з допомогою штангенциркуля).

Для підвищення точності кожне пряме вимірювання проводять кілька разів (серію з  $n$  вимірів для кожної з величин  $m, d, h$ ).

Для розрахунку густини за формулою (3.2) необхідно знайти середнє значення кожної з величин  $m, d, h$ . Середнє значення маси обчислюємо за формулою:

$$m_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \quad (3.3)$$

де  $m_i$  - значення маси, знайдене в  $i$ -тому вимірюванні ( $i$  пробігає значення від 1 до  $n$ ). Аналогічно знаходимо середні значення  $d$  та  $h$ .

3.2 Випадкові похибки прямих вимірювань можна визначити одним із способів, описаних нижче.

а. Методом середньої арифметичної похибки.

Кожне з вимірювань маси характеризується абсолютною похибкою

$$\Delta m_i = m_c - m_i. \quad (3.4)$$

Середнє значення маси характеризується середньою абсолютною похибкою

$$\Delta m_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta m_i|. \quad (3.5)$$

б. Методом середньої квадратичної похибки (більш послідовний та точний).

На відміну від методу середньої арифметичної похибки, після знаходження абсолютних похибок кожного з вимірювань, розраховують середнє квадратичне відхилення:

$$S_{\langle m \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta m_i)^2}. \quad (3.6)$$

Для визначення границі довірчого інтервалу (інтервалу, в який із заданою ймовірністю потрапляє вимірювана величина) використовують розподіл Стьюдента. За заданими викладачем кількістю експериментів  $n$  та значенням довірчої ймовірності  $P$  ( $P$  – ймовірність того, що істинне значення лежить у межах довірчого інтервалу) з таблиці 1 вступу визначають коефіцієнт Стьюдента  $t(P, n)$ . Знаючи  $S_{\langle m \rangle}$  та  $t(P, n)$ , обчислюють випадкову похибку результату вимірювання (довірчу границю)  $\Delta m_\epsilon$ :

$$\Delta m_\epsilon = t(P, n) S_{\langle m \rangle} \quad (3.7)$$

3.3 Повну похибку прямого вимірювання визначають, знайшовши випадкову похибку  $\Delta m_\epsilon$  та похибку приладу  $\Delta m_{np}$  (за паспортними даними):

$$\Delta m_n = \sqrt{(\Delta m_\epsilon)^2 + (\Delta m_{np})^2}. \quad (3.8)$$

*Аналогічно знаходять похибки інших прямих вимірювань.*

3.4 В залежності від того, яким способом розраховані похибки прямих вимірювань, похибки визначення густини за формулою (3.2) розраховують одним із способів, наведених нижче.

а. Якщо прямі вимірювання опрацьовувалися методом середньої арифметичної похибки, використовують метод, описаний в п. 1.3.2.1 вступу. Відносну похибку знаходять за формулою\*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \rho_c}{\rho_c} = \frac{\Delta m_n}{m_c} + 2 \frac{\Delta d_n}{d_c} + \frac{\Delta h_n}{h_c}, \quad (3.9)$$

абсолютну похибку заходять із співвідношення  $\Delta \rho_c = \varepsilon \cdot \rho_c$ . Результат експерименту подають у вигляді  $\rho = \rho_c \pm \Delta \rho_c$ , вказуючи також величину  $\varepsilon$ .

б. Якщо прямі вимірювання опрацьовувалися методом середньої квадратичної похибки, використовують метод, описаний в п. 1.3.2.2 вступу. Після обчислення повних похибок вимірюваних величин за формулою (3.8) відносну похибку знаходять за формулою:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_n}{m_c}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta d_n}{d_c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_n}{h_c}\right)^2}, \quad (3.10)$$

абсолютну похибку заходять із співвідношення  $\Delta \rho_c = \varepsilon \cdot \rho_c$ . Результат експерименту подають у вигляді  $\rho = \rho_c \pm \Delta \rho_c$ , вказуючи також величину  $\varepsilon$ .

\*у практикумі поряд з позначенням  $\delta$  для відносної похибки вживається позначення  $\varepsilon$  (при обробці результатів вимірювань у лабораторних роботах).

## 4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 4.1 За допомогою аналітичних терезів  $n$  разів виміряти масу циліндра (кількість дослідів  $n$  задає викладач).
- 4.2 За допомогою мікрометра  $n$  разів виміряти діаметр циліндра.
- 4.3 За допомогою штангенциркуля  $n$  разів виміряти висоту циліндра.
- 4.4 Обчислити середні значення виміряних величин та похибки.
- 4.5 Результати вимірювань та обчислень записати в таблицю 4.1.

Таблиця 4.1

№ п/п	$d$	$\Delta d$	$m$	$\Delta m$	$h$	$\Delta h$	$\rho$	$\Delta \rho$	$\varepsilon$
	$10^{-3}$ м	$10^{-3}$ м	$10^{-3}$ кг	$10^{-3}$ кг	$10^{-3}$ м	$10^{-3}$ м	кг/м <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>	%
1									
...									
n									
с.з.									

- 4.6 Результат експерименту подати у вигляді  $\rho = \rho_c \pm \Delta \rho_c$ , вказавши також величину відносної похибки  $\varepsilon$ .

### Примітка

Таблиці до лабораторних робіт розраховані на проведення, в основному, трьох вимірювань величини і пристосовані для обробки результатів прямих вимірів за методом середньої арифметичної похибки.

## 5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 5.1 Що таке маса тіла?
- 5.2 Що називається густиною тіла?
- 5.3 Який зв'язок між масою і вагою тіла?
- 5.4 Які способи розрахунку похибок прямих вимірів ви знаєте?

## 6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 6.1 Оцінити густину підручника з фізики.
- 6.2 Запропонуйте простий спосіб визначення густини тіла неправильної форми.
- 6.3 З'ясуйте поняття "питома вага тіла".
- 6.4 Чи змінюється густина тіла в залежності від місцезнаходження тіла на поверхні Землі? А питома вага?

## Лабораторна робота № 2

### ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ НА МАШИНІ АТВУДА

**Мета роботи:** вивчити закони поступального руху твердого тіла. Визначити прискорення поступального руху твердого тіла.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Експериментальна установка (машина Атвуда).
2. Тягарці однакової маси, з'єднані ниткою.
3. Важки різної маси.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Рух матеріальної точки може бути описаний одним із трьох способів: траєкторним, векторним або координатним. Траєкторний спосіб опису руху зручний тоді, коли відома траєкторія (лінія, вздовж якої рухається матеріальна точка) точки по відношенню до вибраної системи відліку. При векторному способі опису, положення матеріальної точки по відношенню до тіла відліку визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$ , проведеним з початку координат до рухомої точки. До координатного способу опису руху матеріальної точки переходять, розклавши радіус-вектор на складові вектори, напрямлені вздовж координатних осей:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.1)$$

де  $x, y, z$  - проекції радіуса-вектора  $\vec{r}$  на відповідні координатні осі в декартовій системі координат, а  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - одиничні вектори, направлені вздовж відповідних осей.

2.2 Швидкість матеріальної точки (миттєва) може бути означена як

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \quad (2.2)$$

де  $v_x, v_y, v_z$  - проекції вектора швидкості  $\vec{v}$  на координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.3)$$

Одиницею вимірювання швидкості є  $1 \frac{m}{c}$ . Швидкість тіла в інерційній системі відліку може змінюватися під дією зовнішніх впливів на тіло. Характеристикою цієї зміни є прискорення - швидкість зміни швидкості:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad (2.4)$$

де  $a_x, a_y, a_z$  - проекції вектора прискорення  $\vec{a}$  на координатні осі:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (2.5)$$

Одиницею вимірювання прискорення є  $1 \frac{m}{c^2}$ .

2.3 Встановимо кінематичні залежності на прикладах рівномірного та рівнозмінного рухів.

а) Рівномірний рух (рух зі сталою швидкістю).

Якщо рух прямолінійний, то зручно скористатися координатним описом (направимо вісь OX уздовж руху тіла):

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}. \quad (2.6)$$

Оскільки  $v_x = \text{const}$ , то  $a_x = 0$ , і інтегрування по часу виразу для  $v_x$  з (2.6) дає

$$x = x_0 + v_x t, \quad (2.7)$$

де  $x$  - положення точки в момент часу  $t$ , а  $x_0$  - положення точки в момент часу  $t=0$ .

б) Рівнозмінний рух (рух зі сталим прискоренням).

Якщо рух прямолінійний (уздовж осі OX), то  $a_x = \text{const}$ , і послідовне інтегрування за формулами (2.6) дає швидкість точки через час  $t$  після початку руху

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad (2.8)$$

звідки

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad (2.9)$$

тут  $x_0$  - початкове положення точки (в момент часу  $t=0$ ),  $v_{0x}$  - початкова швидкість.

Рух є рівноприскореним, якщо проекції  $v_x$  та  $a_x$  мають однакові знаки, рівносповільненим, якщо різні.

2.4 В динаміці вивчаються закони механічного руху тіла через з'ясування причин, які викликають цей рух чи впливають на нього.

Основними в динаміці є поняття сили і маси. Дія одного тіла на інше тіло може викликати як деформацію тіла, так і його прискорення. Мірою цієї дії (взаємодії) є сила. Сила - величина, яка характеризується точкою прикладання, числовим значенням і напрямом дії. Якщо на тіло діють кілька сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , то рівнодійна сила  $\vec{F}$  знаходиться за правилом додавання векторів:  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ .

Мірою інертності тіла є інертна маса. Інертна маса є кількісною характеристикою речовини, з якої складається тіло. Вона характеризує властивість протидіяти зміні швидкості тіла.

В основі динаміки матеріальної точки лежать три закони, встановлені Ньютоном.

Перший закон Ньютона: існують системи відліку (інерційні системи відліку), в яких тіло перебуває у стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно, якщо на нього не діють сили чи рівнодійна сил дорівнює нулю. Властивість тіла зберігати стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху називається інертністю; у згоді з цим перший закон Ньютона називають також законом інерції.

В інерційних системах відліку, при швидкостях  $v$ , значно менших за швидкість світла ( $v \ll c$ ) справджується другий закон Ньютона (основний закон динаміки):

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (2.10)$$

тобто, прискорення, з яким рухається тіло, прямо пропорційне до рівнодійної всіх сил, що діють на тіло, і обернено пропорційне до маси тіла.

Із формули (2.10) отримується означення одиниці сили - ньютон (Н): 1 Н - це сила, яка надає масі 1 кг прискорення 1 м/с<sup>2</sup> (1 Н = 1 кг·м/с<sup>2</sup>).

Третій закон Ньютона: Якщо тіло А діє на тіло В з силою  $\vec{F}_1$ , то тіло В діє на тіло А з силою  $\vec{F}_2$ , причому ці сили рівні за величиною і протилежні за напрямом:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (2.11)$$

Третій закон Ньютона - закон рівності дії і протидії.

2.5 Найпростіші рухи твердого тіла - поступальний рух та обертальний рух навколо нерухомої осі. При поступальному русі всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями і прискореннями по однакових траєкторіях. Будь-яка пряма, що проходить через тіло, переміщується паралельно сама собі. При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій - осі обертання. Кола, по яких рухаються точки тіла, лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання. Точки тіла, які лежать на осі обертання – нерухомі.

При поступальному русі швидкості та прискорення - одні і ті ж для всіх точок твердого тіла. Таким чином, кінематичні співвідношення, встановлені для матеріальної точки, будуть справджуватися і для поступального руху твердого тіла. При описі поступального руху твердого тіла зручно використовувати поняття центра мас. Центр мас системи тіл рухається як матеріальна точка з масою, рівною масі всіх тіл, які входять до системи, і на яку діє сила, рівна векторній сумі сил, що діють на систему.

### 3 ОПИС ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЇ УСТАНОВКИ

Експериментальна установка (рис. 3.1), що носить назву “машина Атвуда”, складається з блока В, через який перекинута нитка з тягарцями С і С' однакової маси  $m$ . Блок В кріпиться на штативі А з міліметровою шкалою. На штативі також закріплені нерухомий кронштейн Е з електромагнітом та рухомі кронштейни F та G, в які вмонтовано фотоелектричні індикатори. Якщо на тягарець С покласти додатковий важок D масою  $m_1$ , то тягарці почнуть рухатися з певним прискоренням. Електронний блок вмикається при натисканні на кнопку “СЕТЬ”. У початковий момент електромагніт Е утримує тягарець С' в найнижчому положенні. На тягарець С кладуть додатковий важок D. Щоб занулити покази електронного блока, необхідно натиснути кнопку “СБРОС”. Щоб важки почали рухатися, необхідно натиснути кнопку “ПУСК” (при цьому електромагніт вимикається). Від найвищого положення до кронштейна F тягарці рухаються рівноприскорено. Коли тягарець С проходить кронштейн F, важок D затримується платформою, і після цього тягарці С і С' рухаються рівномірно. За допомогою фотоелектричних індикаторів вимірюється час рівномірного руху тягарця С від кронштейна F до кронштейна G. Відстань між цими кронштейнами вимірюють за міліметровою шкалою на штативі.

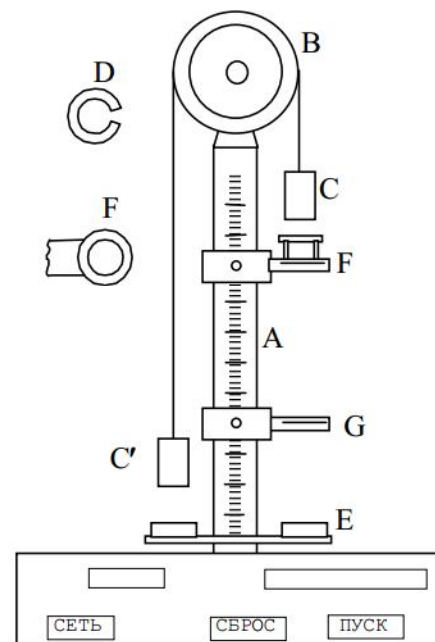


Рисунок 3.1

## 4 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ФОРМУЛ

4.1 Застосуємо для визначення прискорення руху системи рівняння кінематики рівноприскореного руху. Початкова швидкість тягарців рівна нулю. Рухаючись із прискоренням  $a_1$ , за час  $t_1$  тягарець С пройде шлях

$$S_1 = \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2}, \quad (4.1)$$

а його швидкість набуде значення

$$\mathcal{V} = a_1 \cdot t_1. \quad (4.2)$$

Після цього, рухаючись рівномірно із швидкістю  $\mathcal{V}$ , за час  $t_2$  тягарець С пройде шлях

$$S_2 = \mathcal{V} \cdot t_2. \quad (4.3)$$

З рівнянь (4.1)-(4.3) отримуємо для прискорення:

$$a_1 = \frac{S_2^2}{2S_1 t_2^2}. \quad (4.5)$$

4.2 Прискорення руху системи можна також визначити за допомогою законів динаміки.

Тягарець С взаємодіє із гравітаційним полем Землі, ниткою, важком D та навколишнім повітрям. Нехтуючи опором повітря, другий закон Ньютона для тягарця С можна записати у вигляді:

$$m\vec{g} + \vec{P} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1, \quad (4.6)$$

де  $m$  – маса тягарця,  $\vec{g}$  – прискорення вільного падіння,  $\vec{P}$  – сила, з якою важок D діє на тягарець С,  $\vec{T}_1$  – сила натягу нитки.

Проектуючи рівняння (4.6) на вертикальну вісь, спрямовану вгору, отримуємо:

$$T_1 - mg - P = -ma_1. \quad (4.7)$$

Аналогічно отримуємо рівняння руху тягарця С':

$$T_2 - mg = ma_2, \quad (4.8)$$

та рівняння руху вантажка D:

$$N - m_1 g = -m_1 a_1, \quad (4.9)$$

тут  $N$  – величина сили реакції, що діє на важок D з боку тягарця С. За третім законом Ньютона  $N=P$ . Оскільки нитку вважаємо нерозтяжною, то прискорення тягарців рівні за величиною  $a_1 = a_2 = a$ . Сили натягу нитки можна вважати рівними за величиною, тільки якщо момент інерції блока, через який перекинута нитка, є малим, а тертя в блоці відсутнє. Знехтуємо масою блока та тертям, тоді  $T_1 = T_2 = T$ . З рівнянь (4.7)-(4.9) можна отримати прискорення тягарців:

$$a = \frac{m_1}{2m + m_1} g. \quad (4.10)$$

Вирази (4.5) та (4.10) є розрахунковими формулами даної роботи.

## 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

5.1 Встановити кронштейни G та F на заданій викладачем відстані  $S_2$ .

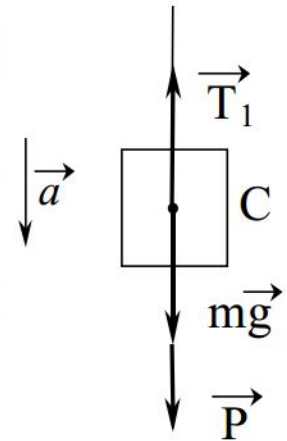


Рисунок 4.1

- 5.2 Опустити тягарець  $C'$  в найнижче положення. Увімкнути прилад. Розмістити важок  $D$  на тягарці  $C$  (масу важка  $m_1$  вказує викладач).
- 5.3 Відмітити положення тягарця  $C$  за міліметровою шкалою та визначити відстань  $S_1$ .
- 5.4 Привести систему в рух, натиснувши на кнопку "ПУСК", і виміряти час  $t_2$ .
- 5.5 Повторити дослід тричі. Визначити середні значення  $S_1$  і  $t_2$ .
- 5.6 Обчислити прискорення за формулою (4.5).
- 5.7 Визначити маси  $m$  тягарців.
- 5.8 Обчислити прискорення за формулою (4.10).
- 5.9 Порівняти величини прискорень, обчислених за формулами (4.5) та (4.10).
- 5.10 Оцінити похибки вимірювань та обчислень.
- 5.11 Результат роботи подати у вигляді  $a = a_c \pm \Delta a_c$ , вказавши також величину відносної похибки  $\varepsilon$ .
- 5.12 Результати лабораторної роботи записати в таблиці 5.1 і 5.2.

**Таблиця 5.1**

№ п/п	$S_1, 10^{-3} \text{ м}$	$\Delta S_1, 10^{-3} \text{ м}$	$S_2, 10^{-3} \text{ м}$	$\Delta S_2, 10^{-3} \text{ м}$	$t_2, \text{ с}$	$\Delta t_2, \text{ с}$	$a, \text{ м/с}^2$	$\Delta a, \text{ м/с}^2$	$\varepsilon, \%$
1									
2									
3									
с.з.									

**Таблиця 5.2**

$m, 10^{-3} \text{ кг}$	$\Delta m, 10^{-3} \text{ кг}$	$m_1, 10^{-3} \text{ кг}$	$\Delta m_1, 10^{-3} \text{ кг}$	$g, \text{ м/с}^2$	$\Delta g, \text{ м/с}^2$	$a, \text{ м/с}^2$	$\Delta a, \text{ м/с}^2$	$\varepsilon, \%$

## 6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 6.1 Охарактеризувати способи опису руху матеріальної точки.
- 6.2 Дати означення швидкості та прискорення.
- 6.3 Записати рівняння кінематики рівноприскореного руху.
- 6.4 Дати означення сили та інертної маси.
- 6.5 Сформулювати закони Ньютона.
- 6.6 Якими силами знехтувано при виведенні формули (4.10)?
- 6.7 Обґрунтувати рівності  $T_1 = T_2 = T$ , використані при виведенні формули (4.10).
- 6.8 Вивести формули для розрахунку похибок.

## 7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 7.1 Вивести формулу для знаходження сили натягу нитки.
- 7.2 Пояснити розбіжності значень прискорення, знайдених за формулами (4.5) та (4.10).
- 7.3 Вивести формулу для знаходження прискорення, враховуючи момент інерції шківів.

### Лабораторна робота № 3

## ВИВЧЕННЯ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА НА ПРИКЛАДІ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

**Мета роботи:** засвоїти основні поняття кінематики та динаміки обертального руху твердого тіла. Визначити момент інерції маятника Обербека.

### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Маятник Обербека.
2. Масштабна лінійка.
3. Секундомір.
4. Штангенциркуль.

### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому всі точки тіла описують концентричні кола, центри яких знаходяться на одній прямій, що є віссю обертання. Кола, по яких рухаються точки тіла, лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання. Точки тіла, які лежать на осі обертання, - нерухомі. Рис. 2.1 ілюструє обертальний рух, який здійснюється хрестовиною із закріпленими на ній тягарцями під дією сили натягу нитки (один кінець якої закріплений на шківі радіуса  $r$ , а до другого прикріплений тягарець  $m$ );  $\vec{F}$  - сила натягу нитки,  $\vec{T}$  - сила, яка діє на тягарець  $m$  з боку нитки,  $m\vec{g}$  - сила тяжіння.

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі положення твердого тіла визначається кутом повороту  $\varphi$  (аналог шляху при поступальному русі). Рухомі точки твердого тіла мають одні і ті ж кутові швидкості та кутові прискорення.

Вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  означимо

так:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}, \quad (2.1)$$

де  $d\varphi$  - кут повороту твердого тіла за час  $dt$ ,  $\vec{k}$  - одиничний вектор ( $|\vec{k}| = 1$ ), спрямований в додатньому напрямку осі обертання OZ. Додатній напрям осі OZ обираємо за правилом свердлика: якщо ручка свердлика обертається в площині, перпендикулярній до осі обертання, в напрямку додатних відліків кута  $\varphi$  (прийmemo, що  $d\varphi > 0$  при обертанні тіла проти руху годинникової стрілки), то поступальний рух свердлика вказує додатній

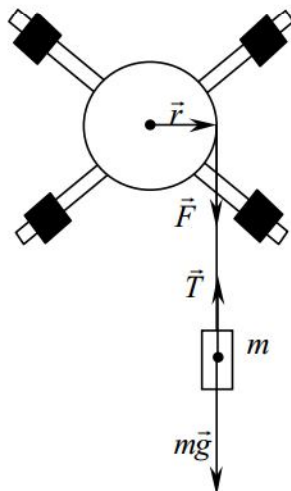


Рисунок 2.1

напрямок осі OZ. Для випадку, зображеного на рис. 2.1, стержні, шків, тягарці, що знаходяться на стержнях, мають однакову кутову швидкість, яка спрямована вздовж осі

обертання OZ за площину рисунка. Проекцією  $\vec{\omega}$  на вісь OZ є  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  (числове значення кутової швидкості). Одиницею вимірювання кутової швидкості є 1 рад/с.

За рахунок взаємодій системи із навколишніми тілами кутова швидкість тіла змінюється; ця зміна характеризується кутовим прискоренням, яке означимо як

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{k} \quad (2.2)$$

Вектор  $\vec{\varepsilon}$  має той напрямок, що і  $\vec{\omega}$  у випадку прискореного руху ( $d|\vec{\omega}|/dt > 0$ ) і протилежний напрямок до  $\vec{\omega}$ , якщо рух сповільнений ( $d|\vec{\omega}|/dt < 0$ ). Для випадку, зображеного на рис. 2.1, напрямок кутового прискорення системи співпадає із напрямком кутової швидкості.

Проекцією  $\vec{\varepsilon}$  на вісь OZ є  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  (числове значення кутового прискорення). Одиницею вимірювання кутового прискорення є 1 рад/с<sup>2</sup>.

Лінійні кінематичні величини, що характеризують окрему точку тіла (шлях  $s$ , швидкість  $\mathcal{G}$ , тангенціальне прискорення  $a_\tau$ ), пов'язані з відповідними кутовими величинами – характеристиками тіла як цілого – співвідношеннями:

$$s = \varphi \cdot r, \quad \mathcal{G} = \omega \cdot r, \quad a_\tau = \varepsilon \cdot r, \quad (2.3)$$

( $r$  – радіус кола, по якому рухається дана точка тіла).

2.2 Основні поняття динаміки обертального руху твердого тіла – момент інерції та момент сили.

2.2.1 Момент інерції  $I$  при обертальному русі відіграє ту ж роль, що й маса при поступальному, тобто є мірою інертності твердого тіла при обертальному русі. Це можна бачити, зокрема, із порівняння виразу для кінетичної енергії обертального руху тіла навколо нерухомої осі ( $I\omega^2/2$ , де  $I$  – момент інерції,  $\omega$  – кутова швидкість) з виразом для кінетичної енергії поступального руху тіла ( $m\mathcal{G}^2/2$ ).

Момент інерції тіла довільної геометричної форми відносно осі можна обчислити за формулою:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \quad (2.4)$$

тобто момент інерції твердого тіла рівний сумі добутків елементарних мас (матеріальних точок) на квадрат їх віддалей до осі, що розглядається. Сума зводиться до інтегралу:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV, \quad (2.5)$$

де  $\rho$  – густина,  $dV$  – елемент об'єму тіла,  $r$  – відстань від елемента  $dV$  до осі обертання, а інтеграл береться по всьому об'єму тіла. Одиниця вимірювання моменту інерції – 1 кг·м<sup>2</sup>.

Можна бачити, що величина моменту інерції залежить від маси тіла, його розмірів, форми та від вибору осі обертання. Момент інерції – величина адитивна, тобто для системи, що складається із кількох тіл, повний момент інерції рівний сумі моментів інерції цих тіл.

Із (2.5) маємо, зокрема, що момент інерції матеріальної точки відносно будь-якої осі обертання є:

$$I = mr^2, \quad (2.6)$$

де  $m$  – маса матеріальної точки,  $r$  – відстань до осі обертання. За цією ж формулою можна обчислювати і момент інерції тіла за умови, що віддаль від осі обертання до центру мас набагато більша від характеристичних лінійних розмірів тіла.

Момент інерції суцільного однорідного циліндра (диска) відносно осі циліндра:

$$I = \frac{1}{2}mr^2, \quad (2.7)$$

де  $m$  – маса циліндра (диска),  $r$  – його радіус.

Момент інерції стержня відносно осі, яка проходить через середину стержня, перпендикулярно до нього:

$$I = \frac{1}{12}ml^2, \quad (2.8)$$

де  $m$  – маса стержня,  $l$  – довжина стержня.

Визначити момент інерції тіла можна і експериментально – з допомогою основного закону динаміки обертального руху твердого тіла.

2.2.2 Для випадку нерухомої осі тіло може обертатися навколо цієї осі за умови, що існує зовнішня сила (або її складова)  $\vec{F}$  у площині, перпендикулярній до осі. Обертальний ефект сили  $\vec{F}$  характеризується фізичною величиною, що називається моментом сили (обертальним моментом). Обертальний момент при обертальному русі відіграє таку ж роль, що і сила при поступальному русі. Розрізняють момент сили відносно точки і момент сили відносно осі.

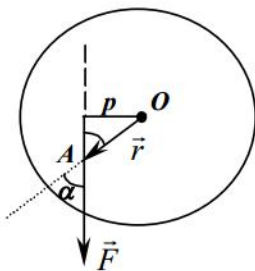


Рисунок 2.2

Виберемо на осі обертання OZ точку O в площині дії означеної вище сили  $\vec{F}$  (див. рис. 2.2). Тоді моментом сили відносно точки O буде векторна величина  $\vec{M}$ , яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного із точки O в точку A прикладання сили, і вектора сили  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (2.9)$$

Модуль моменту сили:

$$|\vec{M}| = Fr \sin \alpha = Fp,$$

де  $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ , а  $p = r \sin \alpha$  - довжина перпендикуляра, опущеного з осі обертання на напрям дії сили, – плече сили.

Момент сили відносно нерухомої осі OZ є проекцією моменту сили  $\vec{M}$  відносно точки O на вісь OZ:

$$M_z = Fr \sin \alpha. \quad (2.10)$$

Момент сили відносно нерухомої осі OZ можна означити і як векторну величину

$$\vec{M} = M_z \cdot \vec{k},$$

де  $\vec{k}$  - одиничний вектор, спрямований уздовж осі OZ (індекс z може опускатися).

Якщо на тіло діє кілька сил, то результуючий момент сил відносно точки O дорівнює векторній сумі складових моментів. Результуючий момент відносно осі є алгебраїчною сумою проекцій складових моментів.

Вимірюється момент сили в ньютон-метрах (Н·м).

2.3 Зв'язок між моментом сили, кутовим прискоренням та моментом інерції дає основний закон динаміки обертального руху:

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}, \quad (2.11)$$

де  $\vec{M}$  - результуючий момент сил. Після проектування на вісь обертання маємо

$$M = I\varepsilon,$$

де  $M$  – проекція результуючого моменту (алгебраїчної суми моментів) на вісь обертання – момент сили відносно осі обертання. Видно ( $\varepsilon = \frac{M}{I}$ ), що момент інерції-міра інертності тіла при обертальному русі.

Для прикладу, наведеного на рис. 2.1, якщо знехтувати силами тертя, величина моменту сили  $M = F \cdot r$  і спрямований він у той же бік, що і кутова швидкість. Знаючи  $M$  і  $\varepsilon$ , за формулою (2.11) можна знайти момент інерції системи, що складається з хрестовини з тягарцями та шківів (рис. 2.1).

### 3 ОПИС УСТАНОВКИ

А. Маятник Обербека (рис. 3.1) – це хрестовина, яка складається з двох стержнів, маса кожного з яких  $m_1$ . Вісь обертання маятника співпадає з центром хрестовини і центром шківів, на якому закріплені стержні довжиною  $l$ . На стержнях знаходяться тягарці однакової маси  $m_2$ , які можна закріплювати на різних відстанях  $R$  від осі обертання. На шків намотується нитка, до кінця якої прикріплений тягарець масою  $m$ .

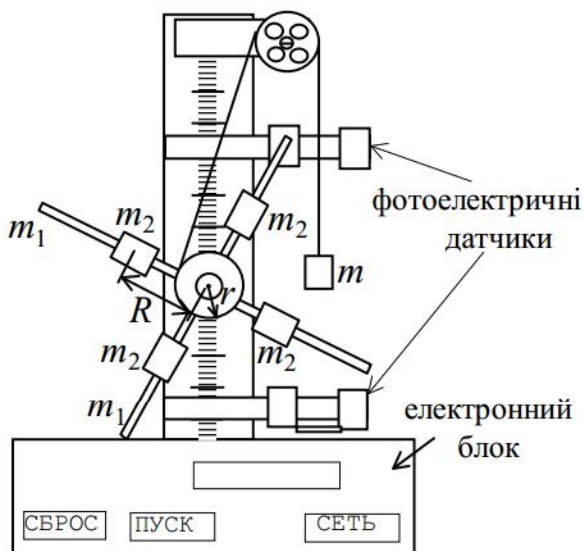


Рисунок 3.1

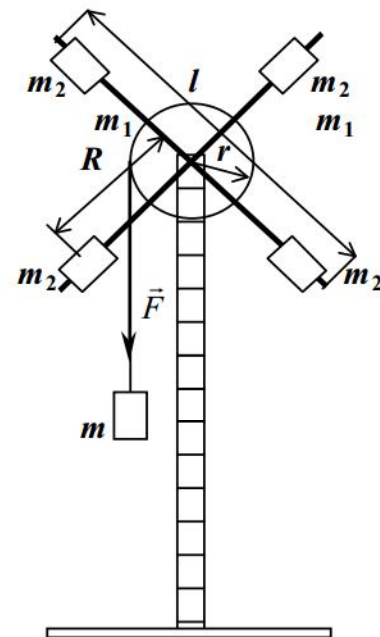


Рисунок 3.2

Перед початком досліду тягарець  $m$  піднімають у верхнє положення, намотуючи нитку на шків, і зануляють покази електронного блока, натиснувши на кнопку “СБРОС”. Щоб почати дослід, необхідно натиснути кнопку “ПУСК” на електронному блоці. Під дією тягарця  $m$  нитка розмотується і маятник починає рівноприскорено обертатися. Відлік часу починається, коли тягарець  $m$  проходить верхній фотоелектричний датчик, і закінчується, коли він проходить нижній. Відстань між датчиками (шлях, що пройшов тягарець за час, зафіксований електронним блоком) вимірюється за допомогою вертикальної масштабної лінійки.

Б. Маятник Обербека (рис. 3.2) – це хрестовина, яка складається з двох стержнів, маса кожного з яких  $m_1$ . Вісь обертання маятника співпадає з її центром і центром шківів, на якому закріплені стержні. На стержнях знаходяться тягарці

однакової маси  $m_2$ , які можуть закріплюватися на різних відстанях від осі обертання. На шків намотується нитка, до кінця якої прикріплений тягарець масою  $m$ .

Під дією тягарця  $m$  нитка розмотується і маятник починає рівноприскорено обертатися. Положення тягарця фіксується вертикальною масштабною лінійкою.

#### 4 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ФОРМУЛ

Момент інерції маятника Обербека можна знайти двома способами. Перший ґрунтується на застосуванні формули (2.4) до системи, що розглядається. Другий спосіб полягає у використанні основного закону динаміки обертального руху твердого тіла, де величини  $M$  і  $\varepsilon$  визначаються через величини, які вимірюються за допомогою дослідів.

##### Перший спосіб.

Момент інерції маятника Обербека рівний сумі моментів інерцій хрестовини, чотирьох тягарців, закріплених на хрестовині, та шківа. Момент інерції хрестовини (двох стержнів)

$$I_x = 2 \frac{1}{12} m_1 l^2 = \frac{1}{6} m_1 l^2, \quad (4.1)$$

(використовуємо формулу (2.8)). Момент інерції чотирьох тягарців

$$I_s = 4m_2 R^2 \quad (4.2)$$

(використано формулу (2.6)). Підставою для використання формули (2.6) є виконання умови  $R^2 \gg a^2$  ( $R$  – відстань від осі обертання до центру мас тягарця,  $a$  – лінійний розмір тягарця); в цьому випадку тягарець може розглядатися як матеріальна точка.

Зважаючи далі на умови

$$m_1 + 4m_2 \gg m_{ш}, \quad (4.3)$$

$$l \gg r, R \gg r \quad (4.4)$$

( $m_{ш}$  – маса шківа), можна знехтувати моментом інерції шківа. Таким чином, шуканий момент інерції

$$I = \frac{1}{6} m_1 l^2 + 4m_2 R^2. \quad (4.5)$$

##### Другий спосіб.

Момент інерції маятника  $I$  можна визначити із основного закону динаміки обертального руху твердого тіла (2.11).

У даній лабораторній роботі обертаючою силою є сила натягу нитки, яка приводить в рух хрестовину. На основі другого закону Ньютона при опусканні тягарця ця сила

$$F = mg - ma = m(g - a), \quad (4.6)$$

де  $g$  - прискорення вільного падіння;  $a$  - прискорення, з яким опускається тягарець.

Плече сили  $F$  - радіус шківа  $r$ , тому обертаючий момент рівний

$$M = Fr = m(g - a)r. \quad (4.7)$$

Кутове прискорення  $\varepsilon$  можна визначити, знаючи відстань  $h$ , яку пройде тягарець  $m$ , і час руху. Відомо, що

$$h = at^2/2, \quad (4.8)$$

тому

$$a = 2h/t^2. \quad (4.9)$$

Отже, оскільки (на основі (2.3))

$$\varepsilon = a/r, \quad (4.10)$$

то

$$\varepsilon = 2h/(t^2 r). \quad (4.11)$$

Підставивши формули (4.7), (4.10), (4.11) в формулу (2.11) і після заміни  $r=d/2$  ( $d$  – діаметр шківів), одержимо розрахункову формулу для визначення моменту інерції маятника Обербека:

$$I = \frac{md^2}{4} \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (4.12)$$

## 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 5.1 Визначити маси тягарців  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  та довжину стержня  $l$ .
- 5.2 Встановити тягарці  $m_2$  на заданій викладачем відстані  $R$  від осі обертання.  
*Увага: При виконанні роботи слідкувати, щоб тягарці були добре закріплені.*
- 5.3 Обчислити момент інерції маятника за формулою (4.5).
- 5.4 Штангенциркулем виміряти діаметр шківів в різних місцях і обчислити його середнє значення.
- 5.5 Відстань  $h$ , що проходить тягарець  $m$  при опусканні, задається викладачем.
- 5.6 Намотуючи нитку на шків, підняти тягарець  $m$  у верхнє положення.
- 5.7 Провести вимірювання часу опускання тягарця  $t$ .
- 5.8 Дослід повторити тричі і обчислити середнє значення  $t_c$ .
- 5.9 Визначити момент інерції за формулою (4.12).
- 5.10 Оцінити відносні та абсолютні похибки результатів.
- 5.11 Результати лабораторної роботи записати в таблиці 5.1 і 5.2.

**Таблиця 5.1**

$m_1,$ $10^{-3}$ кг	$\Delta m_1,$ $10^{-3}$ кг	$l,$ $10^{-3}$ м	$\Delta l,$ $10^{-3}$ м	$m_2,$ $10^{-3}$ кг	$\Delta m_2,$ $10^{-3}$ кг	$R,$ $10^{-3}$ м	$\Delta R,$ $10^{-3}$ м	$I,$ $10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup>	$\Delta I,$ $10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup>	$\varepsilon,$ %

**Таблиця 5.2**

№ п/п	$m,$ $10^{-3}$ кг	$\Delta m,$ $10^{-3}$ кг	$d,$ $10^{-3}$ м	$\Delta d,$ $10^{-3}$ м	$t,$ с	$\Delta t,$ с	$h,$ $10^{-3}$ м	$\Delta h,$ $10^{-3}$ м	$I,$ $10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup>	$\Delta I,$ $10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup>	$\varepsilon,$ %
1	////	////							////	////	////
2											
3											
с.з.											

- 5.12 Результат роботи подати у вигляді  $I = I_c \pm \Delta I_c$  (для обох способів розрахунку), вказуючи також величини відносних похибок  $\varepsilon$ .

## **6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ**

- 6.1 Дати означення моменту сили та вказати одиниці вимірювання.
- 6.2 Дати означення моменту інерції та вказати одиниці вимірювання.
- 6.3 Сформулювати основний закон динаміки обертального руху твердого тіла.
- 6.4 Обґрунтувати положення: момент інерції є міра інертності твердого тіла при обертальному русі.
- 6.5 При яких положеннях тягарців момент інерції маятника Обербека буде максимальним? Мінімальним?
- 6.6 Вивести формули для розрахунку похибок.**

## **7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ**

- 7.1 Пояснити причини розбіжності результатів роботи, одержаних за формулами (4.5) і (4.12).
- 7.2 Як практично можна визначити силу тертя при русі маятника?
- 7.3 Які наближення зроблені при виведенні формули (4.5)? Уточніть цю формулу.
- 7.4 Обґрунтуйте використаний вами метод обробки результатів вимірювань.

## Лабораторна робота № 4

### ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ МАХОВОГО КОЛЕСА ТА МОМЕНТУ СИЛИ ТЕРТЯ В ОПОРІ

**Мета роботи:** засвоїти основні поняття кінематики та динаміки обертального руху твердого тіла. Визначити момент інерції махового колеса і момент сил тертя в опорі.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Махове колесо.
2. Масштабна лінійка.
3. Вантаж на нитці.
4. Секундомір.
5. Штангенциркуль.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому всі точки тіла описують концентричні кола, центри яких знаходяться на одній прямій, що є віссю обертання. Кола, по яких рухаються точки тіла, лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання. Точки тіла, які лежать на осі обертання, - нерухомі. Рис. 2.1 ілюструє обертальний рух махового колеса під дією сили  $\vec{F}$ , рівної за величиною силі  $\vec{T}$  натягу нитки, до якої прикріплений вантаж масою  $m$ .

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі положення твердого тіла визначається кутом повороту  $\varphi$  (аналог шляху при поступальному русі). Рухомі точки твердого тіла мають одні і ті ж кутові швидкості та кутові прискорення.

Вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  означимо так:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}, \quad (2.1)$$

де  $d\varphi$  - кут повороту твердого тіла за час  $dt$ ,  $\vec{k}$  - одиничний вектор ( $|\vec{k}|=1$ ), спрямований вздовж осі обертання OZ.

Додатній напрям осі OZ обираємо за правилом свердлика: якщо ручка свердлика обертається в площині, перпендикулярній до осі обертання, в напрямку додатніх відліків кута  $\varphi$  (прийmemo, що  $d\varphi > 0$  при обертанні тіла проти руху годинникової стрілки), то поступальний рух свердлика вказує додатній напрям осі OZ. На рис 2.1 показано напрям вектора  $\vec{\omega}$  при розмотуванні нитки. Проекцією  $\vec{\omega}$  на вісь OZ є  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ . Одиницею вимірювання кутової швидкості є 1 рад/с.

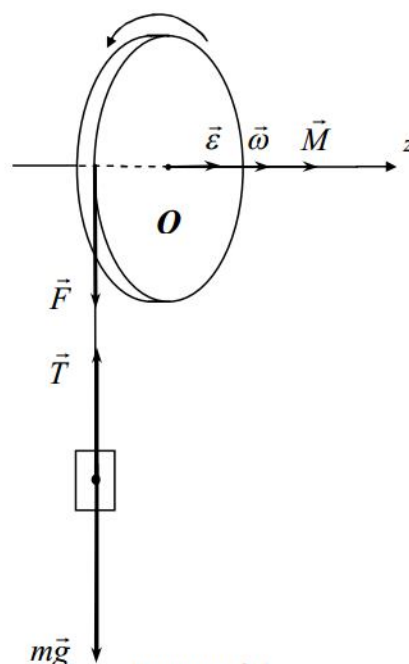


Рисунок 2.1

За рахунок взаємодій системи із навколишніми тілами кутова швидкість тіла змінюється; ця зміна характеризується кутовим прискоренням, яке означимо як:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{k}. \quad (2.2)$$

Вектор  $\vec{\varepsilon}$  має той напрямок, що і  $\vec{\omega}$  у випадку прискореного руху ( $d|\vec{\omega}|/dt > 0$ ) і протилежний напрямок до  $\vec{\omega}$ , якщо рух сповільнений ( $d|\vec{\omega}|/dt < 0$ ). На рис 2.1 показано напрямок вектора  $\vec{\varepsilon}$  при розмотуванні нитки. Проекцією  $\vec{\varepsilon}$  на вісь OZ є  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ . Одиницею вимірювання кутового прискорення є 1 рад/с<sup>2</sup>.

Лінійні кінематичні величини, що характеризують окрему точку тіла (шлях  $s$ , швидкість  $\mathcal{V}$ , тангенціальне прискорення  $a_\tau$ ) пов'язані з відповідними кутовими величинами – характеристиками тіла як цілого – співвідношеннями

$$s = \varphi \cdot r, \quad \mathcal{V} = \omega \cdot r, \quad a_\tau = \varepsilon \cdot r \quad (2.3)$$

( $r$  – радіус кола, по якому рухається дана точка тіла).

2.2 Основні поняття динаміки обертального руху твердого тіла – момент інерції та момент сили.

2.2.1 Момент інерції  $I$  відіграє при обертальному русі ту ж роль, що й маса при поступальному, тобто є мірою інертності твердого тіла при обертальному русі. Це можна бачити, зокрема, із порівняння виразу для кінетичної енергії обертального руху тіла навколо нерухомої осі ( $I\omega^2/2$ , де  $I$  – момент інерції,  $\omega$  – кутова швидкість) з виразом для кінетичної енергії поступального руху тіла ( $m\mathcal{V}^2/2$ ).

Момент інерції тіла довільної геометричної форми відносно осі можна обчислити за формулою:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \quad (2.4)$$

тобто момент інерції твердого тіла рівний сумі добутків елементарних мас (матеріальних точок) на квадрат їх віддалей до осі, що розглядається. Сума зводиться до інтегралу

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV, \quad (2.5)$$

де  $\rho$  – густина,  $dV$  – елемент об'єму тіла,  $r$  – відстань від елемента  $dV$  до осі обертання, а інтеграл береться по всьому об'єму тіла. Одиниця вимірювання моменту інерції – 1 кг·м<sup>2</sup>.

Можна бачити, що величина моменту інерції залежить від маси тіла, його розмірів, форми та від вибору осі обертання. Момент інерції – величина адитивна, тобто для системи, що складається із кількох тіл, повний момент інерції рівний сумі моментів інерції цих тіл.

Із (2.5) маємо, зокрема, що момент інерції матеріальної точки відносно будь-якої осі обертання є:

$$I = mr^2, \quad (2.6)$$

де  $m$  – маса матеріальної точки,  $r$  – відстань до осі обертання.

Момент інерції суцільного однорідного циліндра (диска) відносно осі циліндра:

$$I = \frac{1}{2} mr^2, \quad (2.7)$$

де  $m$  – маса циліндра (диска),  $r$  – його радіус.

Визначити момент інерції тіла можна і експериментально – з допомогою основного закону динаміки обертального руху твердого тіла.

2.2.2 Для випадку нерухомої осі тіло може обертатися навколо цієї осі за умови, що існує зовнішня сила (або її складова)  $\vec{F}$  у площині, перпендикулярній до осі. Обертальний ефект сили  $\vec{F}$  характеризується фізичною величиною, що називається моментом сили (обертальним моментом). Обертальний момент відіграє при обертальному русі таку ж роль, що і сила при поступальному русі. Розрізняють момент сили відносно точки і момент сили відносно осі.

Виберемо на осі обертання OZ точку O в площині дії означеної вище сили  $\vec{F}$  (див. рис. 2.2). Тоді моментом сили відносно точки O буде векторна величина  $\vec{M}$ , яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного із точки O в точку A прикладання сили і вектора сили:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (2.8)$$

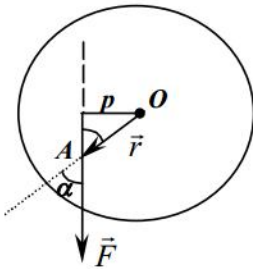


Рисунок 2.2

Модуль моменту сили

$$|\vec{M}| = Fr \sin \alpha = Fp,$$

де  $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ , а  $p = r \sin \alpha$  - довжина перпендикуляра, опущеного з осі обертання на напрям дії сили – плече сили.

Момент сили відносно нерухомої осі OZ є проекцією моменту сили  $\vec{M}$  відносно точки O на вісь OZ:

$$M_z = Fr \sin \alpha. \quad (2.9)$$

Момент сили відносно нерухомої осі OZ можна означити і як векторну величину

$$\vec{M} = M_z \cdot \vec{k},$$

де  $\vec{k}$  - одиничний вектор, спрямований вздовж осі OZ (індекс z може опускатися).

Якщо на тіло діє кілька сил, то результуючий момент сил відносно точки O дорівнює векторній сумі складових моментів. Результуючий момент відносно осі є алгебраїчною сумою проекцій складових моментів.

Вимірюється момент сили в ньютон-метрах (Н·м).

У даній роботі результуючий обертальний момент є  $M = M_n - M_{mp}$ , де  $M_n$  – обертальний момент, викликаний силою натягу нитки ( $M_n = Fr$ ), а  $M_{mp}$  – момент сил тертя, які виникають при обертанні шківів. Напрямок вектора результуючого обертального моменту вказаний на рис. 2.1.

2.3 Зв'язок між моментом сили, кутовим прискоренням та моментом інерції дає основний закон динаміки обертального руху:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}, \quad (2.10)$$

де  $\vec{M}$  - результуючий момент сил. Після проектування на вісь обертання маємо:

$$M = I\varepsilon,$$

де  $M$  – проекція результуючого моменту (алгебраїчної суми моментів) на вісь обертання – момент сили відносно осі обертання. Видно ( $\varepsilon = \frac{M}{I}$ ), що момент інерції - міра інертності тіла при обертальному русі.

2.4 При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі на елементарний кут  $d\varphi$  під дією моменту сили  $\vec{M}$  виконується елементарна робота:

$$dA = M d\varphi; \quad (2.11)$$

робота при обертанні тіла на кут  $\varphi$  рівна:

$$A = \int_0^{\varphi} M d\varphi; \quad (2.12)$$

якщо величина  $\vec{M}$  є сталою, то:

$$A = M\varphi. \quad (2.13)$$

Порівняння цієї формули з виразом для роботи, що виконується силою  $\vec{F}$  при переміщенні  $s$  ( $A = F_s \cdot s$ ) показує, що момент сили відіграє при обертальному русі ту ж роль, що і сила при поступальному, а кут повороту твердого тіла  $\varphi$  аналогічний переміщенню  $s$ .

У даній роботі при обертанні махового колеса на кут  $\varphi$  (внаслідок опускання вантажу) виконується робота:

$$A = (Fr - M_{mp})\varphi. \quad (2.14)$$

2.5 За рахунок роботи, виконаної зовнішніми силами, система, що обертається, набуває кінетичної енергії

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} \quad (2.15)$$

( $I$  - момент інерції системи,  $\omega$  - її кутова швидкість; у нашому випадку  $I$  - сумарний момент інерції махового колеса і шківів).

### 3 ОПИС ДОСЛІДНОЇ УСТАНОВКИ

Лабораторна установка складається з махового колеса  $C$  (рис. 3.1), закріпленого на штативі  $A$ . На шківі  $B$  прикріплена нитка, до другого кінця якої прикріплений вантаж  $m$ . Під дією вантажу нитка розмотується і махове колесо починає рівноприскорено обертатися під дією сталої сили. Положення вантажу фіксується масштабною лінійкою.

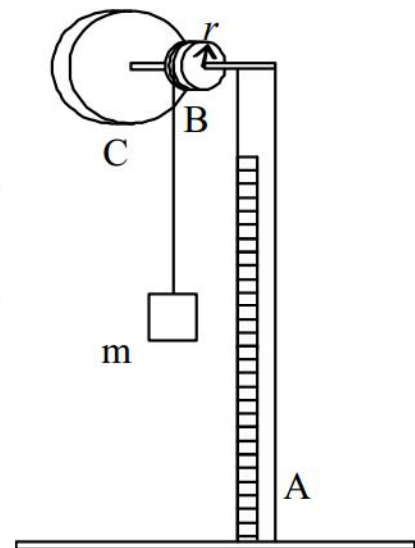


Рисунок 3.1

### 4 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ФОРМУЛ

#### 4.1 Визначення моменту сил тертя

В початковий момент система має потенціальну енергію  $mgH$  ( $H$  – відстань, на яку опуститься вантаж до повного розмотування нитки). Ця потенціальна енергія витрачається на виконання роботи проти сил тертя в опорі  $A = M_{mp}\varphi_1$  ( $M_{mp}$  – момент сили тертя,  $\varphi_1 = \frac{H}{r}$  - кут, на який повернеться махове колесо до повного розмотування нитки,  $r$  - радіус шківів) та на набуття системою кінетичної енергії

$$\frac{m\vartheta^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (4.1)$$

де  $\frac{m\vartheta^2}{2}$  – кінетична енергія поступального руху вантажу,  $\frac{I\omega^2}{2}$  – кінетична енергія обертального руху махового колеса,  $\vartheta$ ,  $\omega$  – лінійна та кутова швидкості відповідно.

Таким чином:

$$mgH = \frac{m\vartheta^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + M_{mp}\varphi_1. \quad (4.2)$$

Після досягнення вантажем найнижчого положення, махове колесо, обертаючись за інерцією, піднімає вантаж на висоту  $h$ . При цьому:

$$\frac{m\vartheta^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mgh + M_{mp}\varphi_2, \quad (4.3)$$

тут  $\varphi_2 = \frac{h}{r}$  – кут, на який повернеться махове колесо при підйманні вантажу. Додаючи (4.2) та (4.3), маємо:

$$mgH - mgh = M_{mp}(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (4.4)$$

З формули (4.4) визначимо момент сил тертя:

$$M_{mp} = mgr \frac{H-h}{H+h}. \quad (4.5)$$

#### 4.2 Визначення моменту інерції

Момент інерції обертальної системи (рис. 2.1) знайдемо з основного рівняння динаміки обертального руху:

$$I = \frac{M}{\varepsilon}. \quad (4.6)$$

У формулі (4.6) результуючий момент прикладених сил рівний:

$$M = Fr - M_{mp} = m(g-a) - mgr \frac{H-h}{H+h}, \quad (4.7)$$

а кутове прискорення махового колеса пов'язане з прискоренням тягарця:

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2H}{rt^2} \quad (4.8)$$

(у випадку, що розглядається, рух вантажу – рівноприскорений, початкова швидкість рівна нулю).

Після підстановки формул (4.7)-(4.8) у вираз (4.6), отримуємо формулу для визначення моменту інерції через вимірювані на досліді масу вантажу  $m$ , час  $t$  і висоту  $H$  опускання вантажу, висоту піднімання вантажу  $h$ :

$$I = mr^2 \left[ gt^2 \frac{h}{H(H+h)} - 1 \right]. \quad (4.9)$$

Враховуючи, що в роботі безпосередньо вимірюється діаметр шківів  $d$ , розрахункову формулу подаємо у вигляді:

$$I = \frac{md^2}{4} \left[ gt^2 \frac{h}{H(H+h)} - 1 \right]. \quad (4.10)$$

## 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 5.1 Визначити масу вантажу.
- 5.2 Тричі виміряти діаметр шківів, на який намотується нитка.
- 5.3 Намотуючи нитку на шків, підняти вантаж  $m$  на задану викладачем відстань  $H$ .
- 5.4 Тричі виміряти час опускання вантажу  $t$  та одночасно висоту піднімання вантажу  $h$ .
- 5.5 Обчислити середні значення  $d$ ,  $H$ ,  $h$ ,  $t$  і визначити середні значення моменту сили тертя та моменту інерції за формулами (4.5) та (4.10) відповідно.
- 5.6 Оцінити відносні та абсолютні похибки результатів.
- 5.7 Результати роботи подати у вигляді  $I = I_c \pm \Delta I_c$  та  $M_{тр} = M_c \pm \Delta M_c$ , вказуючи також величини відносних похибок.
- 5.8 Результати лабораторної роботи записати в таблицю 5.1.

**Таблиця 5.1**

№ п/п	$m$ , $10^{-3}$ кг	$\Delta m$ , $10^{-3}$ кг	$d$ , $10^{-3}$ м	$\Delta d$ , $10^{-3}$ м	$t$ , с	$\Delta t$ , с	$H$ , $10^{-3}$ м	$\Delta H$ , $10^{-3}$ м	$h$ , $10^{-3}$ м	$\Delta h$ , $10^{-3}$ м
1										
2										
3										
с.з.										

**Продовження таблиці 5.1**

$I$ , $10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup>	$\Delta I$ , $10^{-2}$ кг·м <sup>2</sup>	$\varepsilon_I$ , %	$M_{тр}$ , Н·м	$\Delta M_{тр}$ , Н·м	$\varepsilon_M$ , %

## 6. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 6.1 Дати означення моменту сили та вказати одиниці вимірювання.
- 6.2 Дати означення моменту інерції та вказати одиниці вимірювання.
- 6.3 Сформулювати основний закон динаміки обертального руху твердого тіла.
- 6.4 Охарактеризувати кінетичну енергію твердого тіла при обертальному русі.
- 6.5 Пояснити застосування закону збереження енергії до експерименту, що використовується в роботі.
- 6.6 Яким буде характер руху махового колеса при відсутності тертя?

6.7 Вивести формули для розрахунку похибок.

### **7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ**

- 7.1 Користуючись формулою (2.5), обчислити момент інерції диска відносно геометричної осі.
- 7.2 Вивести формули (2.14), (2.15), (4.1).
- 7.3 Обґрунтуйте вирази для  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$ , використані при отриманні формули (4.4).
- 7.4 Як визначити лінійне прискорення тягарця та кутове прискорення махового колеса?
- 7.5 Сформулюйте основний закон динаміки обертального руху для випадку, що розглядається (запишіть вираз для результуючого моменту сили).

## Лабораторна робота № 5

### ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ТІЛА ЗА ДОПОМОГОЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА FPM-5

**Мета роботи:** визначити момент інерції тіла методом крутильних коливань.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Крутильний маятник FPM-5.
2. Еталонне тіло (сталевий куб).
3. Досліджуване тіло.
4. Штангенциркуль.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Обертотвим рухом твердого тіла навколо нерухокої осі називається такий рух, при якому всі точки тіла описують концентричні кола, центри яких знаходяться на одній прямій, що є віссю обертання. Кола, по яких рухаються точки тіла, лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання. Точки тіла, які лежать на осі обертання - нерухомі.

Прикладом системи, що може обертатися навколо певної осі є крутильний маятник, що складається з тіла, підвішеного на пружній дротині так, щоб вісь обертання проходила через центр мас. На рис. 2.1 зображений крутильний маятник, що складається з рамки, що підвішена на сталевій дротині, та тіла, закріпленого в рамці.

При обертотвому русі твердого тіла навколо нерухокої осі положення твердого тіла визначається кутом повороту  $\varphi$  (аналог шляху при поступальному русі). Рухомі точки твердого тіла мають одні і ті ж кутові швидкості та кутові прискорення.

Вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  означимо так:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k}, \quad (2.1)$$

де  $d\varphi$  - кут повороту твердого тіла за час  $dt$ ,  $\vec{k}$  - одиничний вектор ( $|\vec{k}| = 1$ ), спрямований у додатньому напрямку осі обертання OZ. Додатній напрям осі OZ обираємо за правилом свердлика: якщо ручка свердлика обертається в площині, перпендикулярній до осі обертання, в напрямку додатніх відліків кута  $\varphi$  (прийемо, що  $d\varphi > 0$  при обертанні тіла проти руху годинникової стрілки), то поступальний рух свердлика вказує додатній напрям осі OZ. Проекцією  $\vec{\omega}$  на вісь OZ є  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  (числове значення кутової швидкості). Одиницею вимірювання кутової швидкості є 1 рад/с.

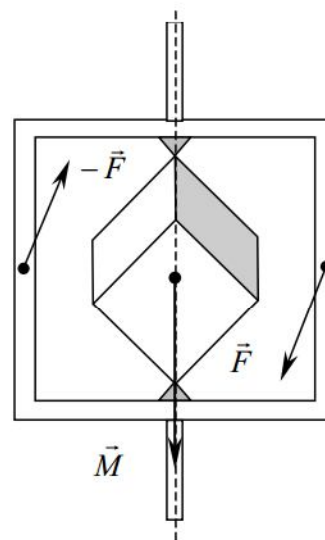


Рисунок 2.1

За рахунок взаємодій системи із навколишніми тілами кутова швидкість тіла змінюється; ця зміна характеризується кутовим прискоренням:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{k}. \quad (2.2)$$

Вектор  $\vec{\varepsilon}$  має той напрямок, що і  $\vec{\omega}$  у випадку прискореного руху ( $d|\vec{\omega}|/dt > 0$ ) і протилежний напрямок до  $\vec{\omega}$ , якщо рух сповільнений ( $d|\vec{\omega}|/dt < 0$ ). Проекцією  $\vec{\varepsilon}$  на вісь OZ є  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  (числове значення кутового прискорення). Одиницею вимірювання кутового прискорення є  $1 \text{ рад/с}^2$ . При крутильних коливаннях напрямки векторів  $\vec{\omega}$  та  $\vec{\varepsilon}$  періодично змінюються.

Лінійні кінематичні величини, що характеризують окрему точку тіла (шлях  $s$ , швидкість  $\mathcal{G}$ , тангенціальне прискорення  $a_\tau$ ), пов'язані з відповідними кутовими величинами – характеристиками тіла як цілого – співвідношеннями:

$$s = \varphi \cdot r, \quad \mathcal{G} = \omega \cdot r, \quad a_\tau = \varepsilon \cdot r, \quad (2.3)$$

( $r$  – радіус кола, по якому рухається дана точка тіла).

2.2 Основні поняття динаміки обертового руху твердого тіла – момент інерції та момент сили.

2.2.1 Момент інерції  $I$  відіграє при обертовому русі ту ж роль, що й маса при поступальному, тобто є мірою інертності твердого тіла при обертовому русі. Це можна бачити, зокрема, із порівняння виразу для кінетичної енергії обертового руху тіла навколо нерухомої осі ( $I\omega^2/2$ , де  $I$  – момент інерції,  $\omega$  – кутова швидкість) з виразом для кінетичної енергії поступального руху тіла ( $m\mathcal{G}^2/2$ ).

Момент інерції тіла довільної геометричної форми відносно осі можна обчислити за формулою:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2, \quad (2.4)$$

тобто момент інерції твердого тіла рівний сумі добутків елементарних мас (матеріальних точок) на квадрат їх віддалей до осі, що розглядається. Сума зводиться до інтегралу

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV, \quad (2.5)$$

де  $\rho$  – густина,  $dV$  – елемент об'єму тіла,  $r$  – відстань від елемента  $dV$  до осі обертання, а інтеграл береться по всьому об'єму тіла. Одиниця вимірювання моменту інерції –  $1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

Можна бачити, що величина моменту інерції залежить від маси тіла, його розмірів, форми та від вибору осі обертання. Момент інерції – величина адитивна, тобто для системи, що складається із кількох тіл повний момент інерції рівний сумі моментів інерції цих тіл.

Із (2.5) маємо, зокрема, що момент інерції матеріальної точки відносно будь-якої осі обертання є:

$$I = mr^2, \quad (2.6)$$

де  $m$  – маса матеріальної точки,  $r$  – відстань до осі обертання. За цією ж формулою можна обчислювати і момент інерції тіла за умови, що віддаль від осі обертання до центру мас набагато більша від характеристичних лінійних розмірів тіла.

На основі формули (2.5) момент інерції куба відносно осі, яка співпадає з однією з його головних діагоналей,

$$I = \frac{ma^2}{6}, \quad (2.7)$$

де  $m$  – маса куба,  $a$  – довжина його ребра.

2.2.2 Для випадку нерухомої осі тіло може обертатися навколо неї за умови, що існує зовнішня сила (або її складова)  $\vec{F}$  у площині, перпендикулярній до осі. Обертаний ефект сили  $\vec{F}$  характеризується фізичною величиною, що називається моментом сили (обертаним моментом). Обертальний момент відіграє при обертальному русі таку ж роль, що і сила при поступальному русі. Розрізняють момент сили відносно точки і момент сили відносно осі.

Виберемо на осі обертання OZ точку O в площині дії означеної вище сили  $\vec{F}$  (див.рис. 2.2). Тоді моментом сили відносно точки O буде векторна величина  $\vec{M}$ , яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного із точки O в точку A прикладання сили, і вектора сили  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (2.8)$$

Модуль моменту сили:

$$|\vec{M}| = Fr \sin \alpha = Fp,$$

де  $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ , а  $p = r \sin \alpha$  - довжина перпендикуляра, опущеного з осі обертання на напрям дії сили – плече сили.

Момент сили відносно нерухомої осі OZ є проекцією моменту сили  $\vec{M}$  відносно точки O на вісь OZ:

$$M_z = Fr \sin \alpha. \quad (2.9)$$

Момент сили відносно нерухомої осі OZ можна означити і як векторну величину

$$\vec{M}_z = M_z \vec{k},$$

де  $\vec{k}$  - одиничний вектор, спрямований уздовж осі OZ (індекс z може опускатися).

Якщо на тіло діє кілька сил, то результуючий момент сил відносно точки O дорівнює векторній сумі складових моментів. Результуючий момент відносно осі є алгебраїчною сумою проекцій складових моментів.

Вимірюється момент сили в ньютон-метрах (Н·м).

2.3 Зв'язок між моментом сили, кутовим прискоренням та моментом інерції дає основний закон динаміки обертального руху:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}, \quad (2.10)$$

де  $\vec{M}$  - результуючий момент сил. Після проектування на вісь обертання маємо:

$$M = I\varepsilon,$$

де  $M$  – проекція результуючого моменту (алгебраїчної суми моментів) на вісь обертання – момент сили відносно осі обертання. Видно ( $\varepsilon = \frac{M}{I}$ ), що момент інерції-міра інертності тіла при обертальному русі.

2.4 При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі на елементарний кут  $d\varphi$  під дією моменту сили  $\vec{M}$  виконується елементарна робота:

$$dA = Md\varphi, \quad (2.11)$$

робота при обертанні тіла на кут  $\varphi$  рівна:

$$A = \int_0^{\varphi} Md\varphi; \quad (2.12)$$

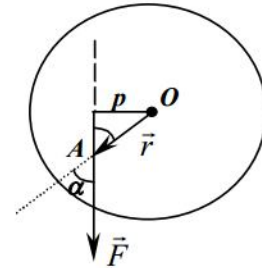


Рисунок 2.2

якщо величина  $\vec{M}$  є сталою, то:

$$A = M\varphi. \quad (2.13)$$

Порівняння цієї формули з виразом для роботи, що виконується силою  $\vec{F}$  при переміщенні  $s$  ( $A = F_s \cdot s$ ) показує, що момент сили відіграє при обертовому русі ту ж роль, що і сила при поступальному, а кут повороту твердого тіла  $\varphi$  – аналогічний до переміщення  $s$ .

2.5 Нехай тіло висить на пружній дротині, верхній кінець якої закріплений. Розглянемо обертовий рух тіла, момент інерції якого відносно осі обертання рівний  $I$ , під дією моменту пружних сил, що виникає при закручуванні дротини. За допомогою пари зовнішніх сил  $\vec{F}$  та  $\vec{F}'$  ( $\vec{F} = -\vec{F}'$ ) повернемо тіло відносно положення рівноваги на кут  $\varphi$  (на рис. 2.1 зображена пара сил та рамка з тілом у початковий момент часу). При цьому виникне обертовий момент сили, викликаний пружною деформацією кручення дротини, залежний від кута повороту  $\varphi$  (на рис. 2.3 зображені момент пари сил  $\vec{M}$  та момент пружних сил  $\vec{M}_{np}$ ).

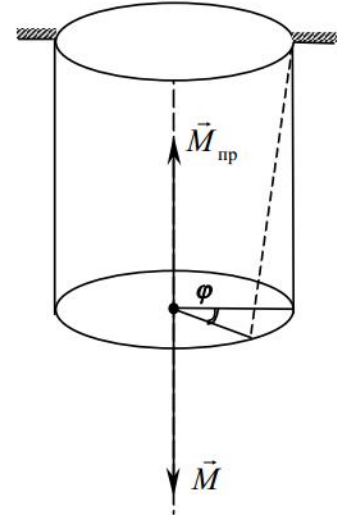


Рисунок 2.3

Під дією моменту  $\vec{M}_{np}$  (після усунення пари сил) тіло буде повертатися до положення рівноваги. При цьому потенціальна енергія пружно деформованої дротини буде зменшуватися, а кінетична енергія обертового руху тіла –

зростати. В момент, коли тіло повернеться в положення рівноваги ( $\varphi=0$ ), потенціальна енергія дротини буде рівна нулю, а кінетична енергія досягне максимальної величини. Внаслідок цього тіло продовжить обертатися за інерцією до моменту, коли кутова швидкість тіла  $\omega$  стане рівною нулю (кінетична енергія обертового руху тіла перейде в потенціальну енергію закрученої дротини). В цьому положенні на тіло знову діятиме сила пружності, що повертатиме його до положення рівноваги. Таким чином, під дією пружної сили тіло здійснюватиме незгасаючі коливання навколо положення рівноваги. Встановимо закон руху тіла. Кінетична енергія обертового руху дається виразом:

$$E_K = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2.14)$$

а потенціальна енергія закрученої дротини – виразом:

$$E_{II} = \frac{k\varphi^2}{2}, \quad (2.15)$$

тут  $k$  позначає модуль кручення дротини (характеризує жорсткість дротини).

Повна енергія системи дається виразом:

$$E = E_{II} + E_K = \frac{k\varphi^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.16)$$

Із закону збереження енергії для системи, в якій діють пружні сили -

$$\frac{I\omega^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2} = const, \quad (2.17)$$

диференціюючи, отримаємо:

$$I\omega d\omega + k\varphi d\varphi = 0. \quad (2.18)$$

Оскільки  $d\varphi = \omega dt$ , а  $d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$ , то рівняння обертового руху тіла, підвешеного на пружній дротині, матиме вигляд:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{I}\varphi = 0. \quad (2.19)$$

2.6 Розв'язком рівняння (2.19) є вираз:

$$\varphi = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + \alpha\right), \quad (2.20)$$

де  $A$ ,  $\alpha$ - сталі,  $t$  – час. Якщо фізична величина змінюється з часом за законом синуса або косинуса, то така зміна цієї фізичної величини називається гармонічним коливанням. Таким чином, тіло, підвешене на пружній дротині, під дією пружної сили здійснює гармонічні незгасаючі (за умови відсутності тертя) коливання навколо положення рівноваги. Формула (5.20) визначає закон гармонічних коливань. Стала  $A$  називається амплітудою коливань (максимальним відхиленням від положення рівноваги); стала  $\alpha$  називається початковою фазою (визначає відхилення в момент часу  $t=0$ ).

2.7 Період гармонічних коливань - час, за який здійснюється одне повне коливання (відхилення приймає попереднє значення). Одиниця вимірювання періоду – 1 с. Оскільки період косинуса (або синуса)  $2\pi$ , то період коливання  $T$  знайдемо з умови:

$$A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}(t+T) + \alpha\right) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + 2\pi + \alpha\right), \quad (2.21)$$

звідки:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}. \quad (2.22)$$

Період гармонічних коливань не залежить від початкового відхилення від положення рівноваги, а визначається виключно властивостями системи (моментом інерції тіла та жорсткістю дротини).

### 3 ОПИС ДОСЛІДНОЇ УСТАНОВКИ

Крутильний маятник FPM-5 (рис. 3.1) складається з рамки, що підвішена на сталевій дротині і може обертатися, та приладу, що за допомогою фотоелектричного датчика визначає час та кількість коливань.

Досліджуване тіло закріплюють за допомогою затискачів у рамці. Після цього рамку відхиляють до положення, в якому її фіксує електромагніт. Щоб маятник почав коливатися, необхідно натиснути кнопку “ПУСК”. Фотоелектричний датчик фіксує кількість коливань  $N$  і час  $t$ , протягом якого відбувалися коливання. Використовуючи ці дані, можна знайти період коливань  $T=t/N$ .

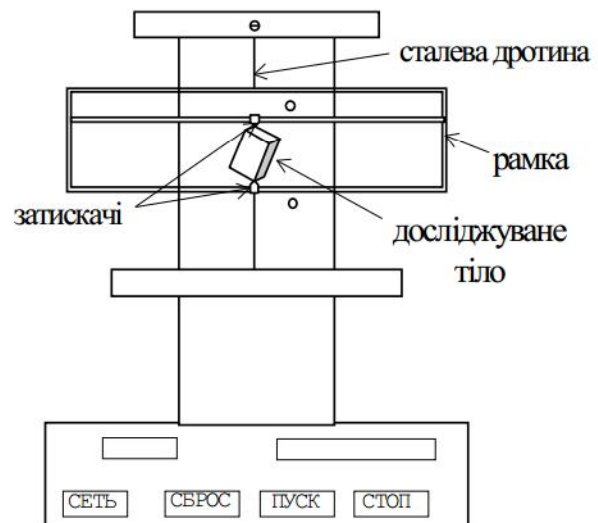


Рисунок 3.1

Щоб зупинити відлік часу після певної кількості коливань, необхідно натиснути кнопку “СТОП” у кінці останнього коливання.

#### 4. ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

Період коливань крутильного маятника визначається за формулою:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{k}}, \quad (4.1)$$

де  $I_0$  – момент інерції рамки крутильного маятника,  $k$  – модуль кручення дротини.

Якщо в рамці закріпити сталевий куб так, щоб вісь обертання співпадала з його головною діагоналлю, період коливань навантаженого маятника буде рівний:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1}{k}}, \quad (4.2)$$

де  $I_1$  – момент інерції куба відносно головної діагоналі,  $a$  – довжина ребра куба. Поділивши рівняння (4.2) на рівняння (4.1) отримуємо:

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{I_0 + I_1}{I_0}, \quad (4.3)$$

звідки знаходимо момент інерції рамки:

$$I_0 = I_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}. \quad (4.4)$$

Закріпивши досліджуване тіло відносно вказаної викладачем осі обертання, знайдемо період коливання навантаженого маятника:

$$T_x = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_x}{k}}, \quad (4.5)$$

де  $I_x$  – момент інерції досліджуваного тіла відносно осі обертання. Із рівнянь (4.1) та (4.5) маємо:

$$I_x = I_0 \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_0^2}. \quad (4.6)$$

В підсумку шуканий момент інерції (враховуючи  $I_0$  з рівняння (4.4)):

$$I_x = I_1 \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}. \quad (4.4)$$

Використовуючи вираз для моменту інерції куба відносно осі, яка співпадає з його головною діагоналлю (2.7), отримаємо розрахункову формулу:

$$I_x = \frac{1}{6} m a^2 \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}. \quad (4.5)$$

Тут  $m$  – маса куба,  $a$  – довжина його ребра,  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_x$  – періоди коливань рамки, рамки з еталонним тілом (кубом), рамки з досліджуваним тілом відповідно.

#### 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 5.1 За допомогою штангенциркуля визначити довжину  $a$  ребра куба (масу сталевого куба повідомляє керівник занять).
- 5.2 Тричі визначити період коливань ненавантаженого маятника  $T_0$  (правила роботи з приладом описані в п. III, кількість коливань  $N$  задає керівник занять), обчислити середнє значення.

5.3 Визначити  $T_1$  та  $T_x$ , закріпивши в рамці спочатку куб відносно його головної діагоналі, а потім досліджуване тіло відносно вказаної викладачем осі.

**Важливо надійно закріпити в рамці досліджуване тіло.**

5.4 Обчислити середнє значення  $I_x$  за формулою (4.5).

5.5 Оцінити відносну та абсолютну похибки.

5.6 Результат роботи подати у вигляді  $I_x = I_{xc} \pm \Delta I_{xc}$ , вказуючи також величину відносної похибки  $\varepsilon$ .

5.7 Результати лабораторної роботи записати в таблицю 5.1.

**Таблиця 5.1**

№ п/п	$m$ , $10^{-3}$ кг	$\Delta m$ , $10^{-3}$ кг	$a$ , $10^{-3}$ м	$\Delta a$ , $10^{-3}$ м	$T_0$ , с	$\Delta T_0$ , с
1	////	////				
2						
3						
с.з.						

**Продовження таблиці 5.1**

$T_1$ , с	$\Delta T_1$ , с	$T_x$ , с	$\Delta T_x$ , с	$I_x$ , $10^{-3}$ кг м <sup>2</sup>	$\Delta I_x$ , $10^{-3}$ кг м <sup>2</sup>	$\varepsilon$ , %
				////	////	////

## 6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 6.1 Дати означення моменту інерції та вказати одиниці його вимірювання.
- 6.2 Сформулювати основний закон динаміки обертового руху твердого тіла.
- 6.3 Що таке гармонічне коливання? Яке рівняння описує гармонічні коливання?
- 6.4 Вивести формули для розрахунку похибок.

## 7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 7.1 Користуючись формулою (2.5), обчислити момент інерції диска відносно геометричної осі.
- 7.2 Вивести робочу формулу, якщо замість куба в установці буде знаходитися куля тієї ж маси, а вісь обертання проходить на відстані  $R/2$  від центру кулі ( $R$  – радіус кулі).
- 7.3 Безпосередньо підстановкою перевірити, що вираз (2.20) є розв'язком рівняння (2.19).

## Лабораторна робота № 6

### ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ЮНГА МЕТОДОМ ПРОГИНУ СТЕРЖНЯ

**Мета роботи:** ознайомитися з видами деформації та визначити модуль Юнга методом прогину стержня.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Лабораторна установка.
2. Тягарці.
3. Штангенциркуль.
4. Мікрометр.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Тіло під дією сили, прикладеної до нього, може деформуватися – змінювати форму і розміри; при цьому одні частинки тіла зміщуються відносно інших. Деформації, які зникають після припинення дії сили називаються пружними, деформації, які не зникають після припинення дії сили – пластичними. За способом зовнішньої дії на тіло розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву, кручення, згину. Довільну складну деформацію можна звести до двох: деформації розтягу (стиску) та деформації зсуву.

Пружні деформації описуються законом Гука, який для деформації розтягу стержня має вигляд:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.1)$$

де  $\varepsilon = \Delta l / l_0$  – відносне видовження стержня (відносна деформація),  $\Delta l = l - l_0$  – абсолютне видовження стержня,  $l$  – довжина деформованого стержня,  $l_0$  – довжина недеформованого стержня,  $E = 1/\alpha$  – модуль Юнга,  $\alpha$  – коефіцієнт, який характеризує пружні властивості стержня;  $\sigma = F_n / S$  – напруження (зусилля) – сила, яка діє на одиницю площі поперечного перерізу стержня перпендикулярно до нього.

Із (6.1) видно, що

$$E = \sigma / \varepsilon, \quad (2.2)$$

тобто модуль Юнга рівний такому напруженню, при якому відносне видовження рівне одиниці,  $[E] = 1 \text{ Н/м}^2$ .

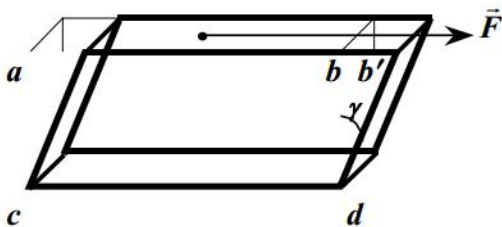


Рисунок 2.1

Деформацією зсуву (зсувом) називається така деформація, при якій всі плоскі шари, паралельні до площини, вздовж якої діє прикладена до тіла сила, зсунуті один відносно одного. Зсув ілюструє рис. 2.1: прямокутний паралелепіпед, нижня грань якого закріплена, а до верхньої прикладена сила  $\vec{F}$  (яка лежить у площині цієї грані) перетворюється у косокутний.

Переміщення  $bb'$  називають абсолютним зсувом грані  $ab$  відносно грані  $cd$ . Кут  $\gamma$  називають кутом зсуву, а  $tg\gamma$  - відносним зсувом. Для малого зсуву  $tg\gamma \approx \gamma$  ( $\gamma$  вимірюється в радіанах). При зсуві всередині тіла виникають пружні сили  $\vec{F}_{пр}$ , які протидіють зміні форми тіла, причому

$$\vec{F}_{пр} = -\vec{F}.$$

Величина

$$\tau = \frac{F}{S},$$

де  $S$  – площа шару, що зсувається, називається тангенціальним (дотичним) напруженням.

У межах пружних деформацій відносний зсув  $\gamma$  ізотропного матеріалу пов'язаний із напруженням  $\tau$  законом Гука (для зсуву):

$$\tau = \gamma G, \quad (2.3)$$

де  $G$  – модуль зсуву для даного матеріалу.

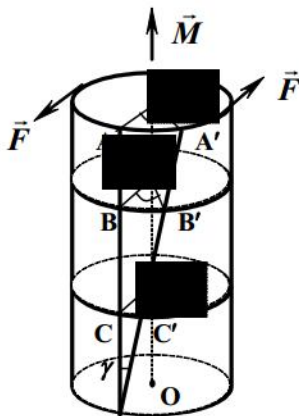


Рисунок 2.2

Деформація кручення. Кручення – деформація, яка виникає в стержні, якщо закріпити один його кінець і закручувати інший (рис. 2.2, нижній кінець стержня закріплено).

При деформації кручення перерізи стержня, що лежать вище нижнього (закріпленого) перерізу, повертаються навколо осі стержня, причому чим вище лежить переріз, тим більший його кут повороту ( $\varphi_a > \varphi_b > \varphi_c \dots$ ); твірні циліндричної поверхні при цьому зсуваються на кут  $\gamma$  (рис. 2.2). Іншими словами, деформацію кручення можна представити як суму деформацій зсуву. Отже, при закручуванні стержень зазнає деформації зсуву.

Нехай верхній (незакріплений) переріз

стержня повернувся на кут  $\varphi$  під дією обертального моменту зовнішніх сил  $\vec{M}$  (докладніше щодо цього див. далі). Тоді, як встановлено на досліді, в межах пружних деформацій

$$M = k\varphi, \quad (2.4)$$

де  $k$  – модуль кручення стержня – величина, що залежить від розмірів і пружних властивостей стержня. Формула (2.4) – закон Гука для деформації кручення. Оскільки кручення зводиться до деформації зсуву, то між модулем кручення стержня  $k$  і його модулем зсуву  $G$  існує зв'язок:

$$k = \frac{\pi r^4 G}{2l}, \quad (6.5)$$

де  $r$  – радіус стержня,  $l$  – його довжина.

Деформація згину. Розглянемо деформацію згину на прикладі однорідної балки, поперечний переріз якої є однаковим по всій її довжині. Нехай до деформації балка мала прямокутну форму. Уявно виділимо в балці нескінченно малий елемент

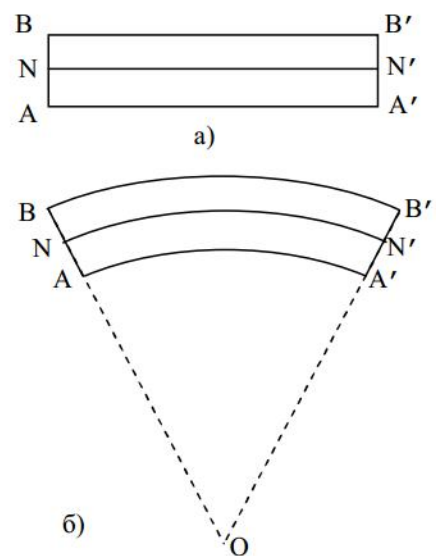


Рисунок 2.3

AA' B' B (рис. 2.3, а), вісь NN' якої і грані AA' та BB' є паралельними до осі балки. Оскільки ми вибрали елемент нескінченно малим, то можна вважати, що в результаті згину прями AA', BB', NN' та всі прями, паралельні до них, перейдуть в кола з центрами, що лежать на осі O, перпендикулярній до площини рисунка (рис. 2.3, б). Вісь O називається віссю згину. В результаті згину довжина відрізка NN' не змінюється, довжина всіх відрізків, що лежать вище від NN' (наприклад, BB') – збільшується, довжина всіх відрізків, що лежать нижче від NN' (наприклад, AA') – зменшується. Таким чином, елемент BB' N' N зазнає розтягу, елемент AA' N' N – стиску (див. пункт 2).

### 3 ОПИС УСТАНОВКИ

Прилад складається з дерев'яних стійок, на яких встановлені призми П<sub>1</sub> і П<sub>2</sub> (див. рис. 3.1). На призми покладена лінійка Л з гачком для підвішування вантажу В. Над лінійкою на штативі Ш закріплений мікрометр М, дотик мікрометра до лінійки викликає протікання струму в колі, внаслідок чого загоряється індикаторна лампочка ІЛ.

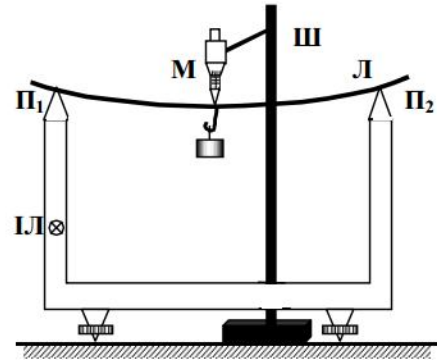


Рисунок 3.1

### 4 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

В даній роботі для визначення модуля Юнга використовується деформація прогину. Прогин – вид деформації, що характеризується викривленням осі деформованого тіла (стержня, пластинки, плити, балки) під дією зовнішніх сил, прикладених перпендикулярно до його осі. Деформацію прогину проілюстровано на рис. 4.1. Тут зовнішня сила  $\vec{F}$  прикладена до середини лінійки. Величина деформації характеризується стрілою прогину; стріла прогину – зміщення центра лінійки під дією прикладеної сили.

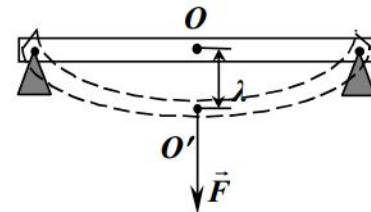


Рисунок 4.1

Якщо знехтувати вагою лінійки, то стріла прогину  $\lambda$  дається формулою:

$$\lambda = \frac{FL^3}{48EI_s}, \quad (4.1)$$

де  $F$  – величина прикладеної сили,  $L$  – довжина лінійки,  $E$  – модуль Юнга,  $I_s$  – момент інерції поперечного перерізу тіла. Тут величина  $I_s$  вводиться подібно до моменту інерції тіла при обертовому русі навколо нерухомої осі з тією відмінністю, що замість маси стоїть площа поперечного перерізу (інтегрування ведеться по всьому поперечному перерізу тіла):

$$I_s = \int r^2 dS. \quad (4.2)$$

Таким чином, величина  $I_s$  у формулі (4.1) має розмірність четвертого степеня довжини.

Якщо ми маємо лінійку довжиною  $L$ , шириною  $a$ , товщиною  $b$ , то момент інерції поперечного перерізу отримується шляхом заміни:

$$\frac{1}{12}mb^2 \rightarrow \frac{1}{12}abb^2 = \frac{1}{12}ab^3. \quad (4.3)$$

Підставляючи (4.3) в (4.1), модуль Юнга визначається формулою:

$$E = \frac{FL^3}{4a\lambda b^3}. \quad (4.4)$$

Вираз (4.4) є розрахунковою формулою.

## 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 5.1 Виміряти штангенциркулем ширину лінійки  $a$  і мікрометром товщину  $b$ .
- 5.2 Штангенциркулем виміряти відстань між вершинами призми  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ ; ця відстань рівна довжині робочої частини лінійки  $L$ . Лінійку помістити на призми.
- 5.3 Вістря мікрометра доторкнути до стержня (дотик фіксується загорянням індикаторної лампочки) і зняти початкові покази мікрометра  $n_0$ .
- 5.4 Навантажити лінійку (кількість тягарців задає викладач) і вістря мікрометра знову доторкнути до лінійки. При загорянні індикаторної лампочки зняти покази мікрометра  $n_1$  і визначити стрілу прогину  $\lambda = n_0 - n_1$ .
- 5.5 Визначити масу тягарця і обчислити величину сили  $F$ .
- 5.6 Дослід повторити тричі.
- 5.7 Визначити модуль Юнга, підставляючи у формулу (6.9) середні значення  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$ .
- 5.8 Оцінити абсолютну та відносну похибки.
- 5.9 Результат роботи подати у вигляді  $E = E_c \pm \Delta E_c$ , вказуючи також величину відносної похибки  $\varepsilon$ .
- 5.10 Дані вимірювань та розрахунків записати в таблицю 5.1.

**Таблиця 5.1**

№	$F$ , Н	$\Delta F$ , Н	$L$ , $10^{-2}$ м	$\Delta L$ , $10^{-2}$ м	$\lambda$ , $10^{-3}$ м	$\Delta \lambda$ , $10^{-3}$ м	$a$ , $10^{-3}$ м	$\Delta a$ , $10^{-3}$ м	$b$ , $10^{-3}$ м	$\Delta b$ , $10^{-3}$ м	$E$ , $10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>	$\Delta E$ , $10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>	$\varepsilon$ , %
1.	///	///									///	///	///
2.													
3.													
С.3													

## 6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 6.1 З'ясувати суть деформацій розтягу (стиску), згину.
- 6.2 Сформулювати закон Гука.
- 6.3 З'ясувати фізичний зміст модуля Юнга.
- 6.4 Вивести формули для розрахунку похибок.

## 7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 7.1 Обчислити момент інерції перерізу круглого стержня за формулою (4.2).
- 7.2 Описати діаграму напружень (залежність напруження від величини деформації).

## Лабораторна робота № 7

### ЗАСТОСУВАННЯ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ ВІЛЬНОГО ПАДІННЯ

**Мета роботи:** дослідити коливання фізичного маятника. Визначити прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Фізичний маятник.
2. Шкала.
3. Секундомір.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Із закону всесвітнього тяжіння випливає, що на тіло, яке знаходиться на висоті  $h$  над поверхнею Землі, діятиме сила, рівна за величиною

$$\frac{\gamma mM}{(R_3 + h)^2} = mg, \quad (2.1)$$

де величина  $g$  називається прискоренням вільного падіння,  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$  ( $\text{Нм}^2 \text{ кг}^{-2}$ ) – гравітаційна стала,  $m$  - маса тіла,  $M$  - маса Землі ( $M = 5,98 \cdot 10^{24}$  кг),  $R_3$  - радіус Землі. У векторній формі сила тяжіння

$$\vec{F} = m\vec{g}; \quad (2.2)$$

$\vec{F}$  і  $\vec{g}$  спрямовані до центру Землі. Для тіла, що знаходиться біля поверхні Землі  $h \ll R_3$  ( $R_3 \cong 6,37 \cdot 10^6$  м)

$$g = \gamma \frac{M}{R_3^2}. \quad (2.3)$$

Величина прискорення вільного падіння залежить від широти місцевості: на екваторі прискорення вільного падіння рівне  $g = 9,780 \text{ м/с}^2$ , на полюсі –  $g = 9,832 \text{ м/с}^2$ .

2.2 У даній роботі величина  $g$  визначається дослідним шляхом за допомогою фізичного маятника. Фізичний маятник – тіло, що коливається під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі, що не проходить через центр мас. У даній роботі в якості фізичного маятника використовується стержень (рис. 2.1), що коливається відносно горизонтальної осі, яка проходить через кінець стержня.

Сума кінетичної і потенціальної енергії фізичного маятника

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + mgL(1 - \cos \alpha), \quad (2.4)$$

де  $I$  – момент інерції маятника відносно осі обертання, який визначається за теоремою

Штейнера,  $\omega$  - кутова швидкість маятника  $\left(\omega = \frac{d\alpha}{dt}\right)$ ,  $m$  – маса маятника,  $g$  –

прискорення вільного падіння біля поверхні Землі,  $L$  - віддаль від осі обертання до центру мас,  $\alpha$  - кут відхилення маятника від положення рівноваги; потенціальну енергію відраховуємо від положення стійкої рівноваги маятника. Продиференціюємо (2.4) по часу:

$$I\omega d\omega + mgL \sin \alpha d\alpha = 0. \quad (2.5)$$

Оскільки  $d\alpha = \omega dt$ , а кутове прискорення  $d\omega/dt = d^2\alpha/dt^2$ , то замість (2.5) маємо:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgL \sin\alpha = 0. \quad (2.6)$$

Поділимо обидві сторони рівняння (2.6) на  $I$ , введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I} \quad (2.7)$$

і розглянемо випадок малих відхилень від положення рівноваги ( $\sin\alpha \cong \alpha$ ). Тоді замість (2.7) отримуємо:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (2.8)$$

Розв'язком рівняння (2.8) є:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.9)$$

де  $\alpha_0$  - максимальний кут відхилення маятника від положення рівноваги (амплітуда коливань),  $\omega_0$  - кутова частота,  $\varphi$  - початкова фаза (якщо в початковий момент часу маятник максимально відхилений від положення рівноваги,  $\varphi=0$ ).

Період коливань фізичного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}. \quad (2.10)$$

З формули (2.10) можна визначити прискорення вільного падіння

$$g = \frac{4\pi}{T^2} \frac{I}{mL}, \quad (2.11)$$

вимірявши на досліді період коливань стержня та визначивши його момент інерції відносно кінця.

### 3 ОПИС УСТАНОВКИ

Досліджуваний маятник – це стержень з масою  $m$  і довжиною  $l$ . Для нього момент інерції відносно осі, що проходить через центр маси, визначається за формулою:

$$I_0 = \frac{1}{12} Ml^2, \quad (3.1)$$

момент інерції відносно осі, що проходить через верхній кінець, визначається за теоремою Штейнера:

$$I = I_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} Ml^2, \quad (3.2)$$

а віддаль від осі обертання до центра маси:

$$L = \frac{l}{2}. \quad (3.3)$$

З формули (2.11), враховуючи вирази (3.1)-(3.3), можна визначити прискорення вільного падіння

$$g = \frac{8\pi^2}{3} \cdot \frac{l}{T^2}. \quad (3.4)$$

Це є розрахункова формула для визначення прискорення вільного падіння.

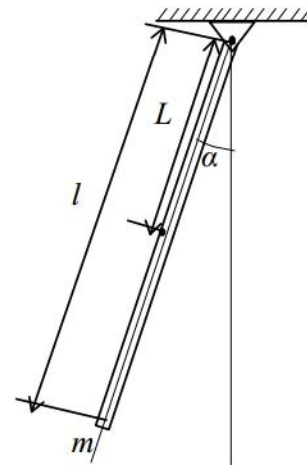


Рисунок 3.1

#### 4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 4.1 Визначити довжину стержня  $l$ .
- 4.2 Визначити період коливань фізичного маятника  $T$ . Для цього секундоміром виміряти час  $t$  певного числа  $n$  коливань ( $n$  задає викладач) і підставити ці дані в формулу:

$$T = \frac{t}{n}.$$

- 4.3 Повторити дослід 3 рази. Знайти середнє значення  $T$ .
- 4.4 Обчислити значення прискорення вільного падіння за формулою (3.4).
- 4.5 Оцінити відносну і абсолютну похибки.
- 4.6 Результат роботи подати у вигляді  $g = g_c \pm \Delta g_c$ , вказуючи також величину відносної похибки  $\varepsilon$ .
- 4.7 Результати лабораторної роботи записати в таблицю 4.1.

**Таблиця 4.1**

	$l$ , м	$\Delta l$ , м	$T$ , с	$\Delta T$ , с	$g$ , м/с <sup>2</sup>	$\Delta g$ , м/с <sup>2</sup>	$\varepsilon$ , %
<b>1</b>							
<b>2</b>							
<b>3</b>							
<b>с.з.</b>							
<b>в.в.</b>							

#### 5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 5.1 Сформулювати закон всесвітнього тяжіння.
- 5.2 З'ясувати фізичний зміст прискорення вільного падіння тіл.
- 5.3 Що таке фізичний маятник?
- 5.4 Записати вирази для моменту сили та моменту інерції в даній роботі.
- 5.5 Записати рівняння гармонічного коливання.
- 5.6 Що таке амплітуда, період, частота, початкова фаза коливань?
- 5.7 Вивести формули для розрахунку похибок.

#### 6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 6.1 Безпосередньою підстановкою формули (2.9) в рівняння (2.8) перевірити, що (2.9) є розв'язком рівняння (2.8).
- 6.2 Які допущення зроблені при виводі формули (2.8)?
- 6.3 Використовуючи теорему Штейнера та формулу (3.1), отримати момент інерції стержня відносно осі, що проходить через його кінець.
- 6.4 Вивести рівняння руху маятника (2.8), користуючись основним законом динаміки обертового руху твердого тіла.

## Лабораторна робота № 8

### ВИЗНАЧЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНОГО ДЕКРЕМЕНТА ТА КОЕФІЦІЄНТА ЗГАСАННЯ КОЛИВАНЬ

**Мета роботи:** засвоїти основні поняття теорії згасаючих коливань. Визначити логарифмічний декремент та коефіцієнт згасання коливань.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Маятник зі шкалою.
2. Секундомір.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Гармонічне коливання – зміна фізичної величини  $\alpha$  з часом за законом синуса або косинуса:

$$\alpha = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.1)$$

де  $\alpha$  – значення цієї величини в довільний момент часу  $t$ ,  $A$  – амплітуда коливань (максимальне значення фізичної величини  $\alpha$ ),  $(\omega_0 t + \varphi_0)$  – фаза коливань (визначає відхилення),  $\varphi_0$  – початкова фаза (визначає відхилення в момент часу  $t=0$ ),  $\omega_0$  – кутова частота.

Період гармонічних коливань  $T$  – час, за який здійснюється одне повне коливання:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu} \quad [T]=1\text{с}, \quad (2.2)$$

$\nu$  – частота коливань (кількість коливань за одну секунду).  
Одиниця вимірювання частоти – Гц (Герц).

Гармонічні коливання можуть відбуватися лише під дією пружної або квазіпружної сил (квазіпружною називається сила, яка за своєю природою є непружною, але математично описується так, як і пружна сила, тобто  $F_{\text{квп}} = -k\alpha$ , де  $\alpha$  – відхилення,  $k$  – коефіцієнт пропорційності).

2.2 У роботі досліджуються згасаючі коливання на прикладі руху фізичного маятника (рис. 2.1). Фізичний маятник – тіло, що коливається під дією сили тяжіння навколо горизонтальної осі, що не проходить через центр мас.

Знайдемо закон руху фізичного маятника за умови згасання на основі закону збереження енергії.

В довільний момент часу сума кінетичної та потенціальної енергій маятника

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{k\alpha^2}{2}, \quad (2.3)$$

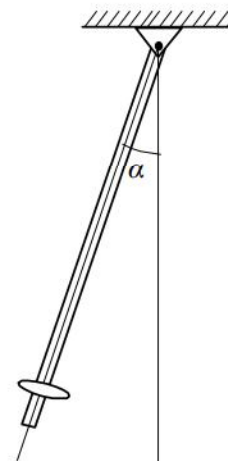


Рисунок 2.1

де  $I$  – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу,  $\omega$  – кутова швидкість маятника в даний момент часу,  $k = mgd$ ,  $m$  – маса маятника,  $g$  – прискорення вільного падіння біля поверхні Землі,  $d$  – віддаль від осі обертання маятника до центру мас,  $\alpha$  – кут відхилення маятника від положення рівноваги (див. вивід цієї формули у теоретичному вступі до ЛР № 7). Зменшення енергії системи  $dE$  при обертанні маятника на кут  $d\alpha$  викликане втратами її на подолання сил тертя,

$$dE = dA,$$

де елементарна робота моменту сил тертя  $M_T$

$$dA = -M_T d\alpha, \quad (2.4)$$

знак “мінус” тому, що робота сили тертя призводить до зменшення енергії системи ( $dE < 0$ ).

Прийmemo, що момент сили тертя пропорційний до кутової швидкості:

$$M_T = r\omega, \quad (2.5)$$

де  $r$  – коефіцієнт, що характеризує тертя,  $\omega$  – кутова швидкість ( $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ ). Залежність (2.5) взята за аналогією із силами тертя, які враховуються при розгляді згасаючих коливань матеріальної точки (наприклад, математичного маятника).

Оскільки

$$dE = I\omega d\omega + k\alpha d\alpha, \quad (2.6)$$

то

$$I\omega d\omega + k\alpha d\alpha = -r\omega d\alpha.$$

Так як  $d\alpha = \omega dt$ , то

$$I \frac{d\omega}{dt} + k\alpha + r \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad (2.7)$$

або, враховуючи, що

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega,$$

маємо

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad (2.8)$$

де введено позначення  $\beta = \frac{r}{2I}$  та  $\omega_0^2 = \frac{k}{I}$ . Величину  $\beta$  називають коефіцієнтом згасання коливань,  $\omega_0$  – власною кутовою частотою коливань.

Розв’язком диференціального рівняння (2.8) буде вираз:

$$\alpha = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.9)$$

який описує згасаючі коливання. Тут  $A(t)$  – амплітуда згасаючих коливань

$$A(t) = A_0 \exp(-\beta t), \quad (2.10)$$

$A_0$  – амплітуда в момент часу  $t=0$ ,  $\omega$  – кутова частота згасаючих коливань

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (2.11)$$

Період згасаючих коливань дається формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.12)$$

Залежності (2.9)-(2.12) мають місце лише за умови  $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ , якщо ж  $\beta^2 < \omega_0^2$  (випадок значних сил опору середовища), то коливань не існує.

### 3 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

Нехай у момент часу  $t_1$  амплітуда згасаючих коливань має значення:

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}, \quad (3.1)$$

а в момент часу  $t_2$ :

$$A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}. \quad (3.2)$$

Поділимо (3.1) на (3.2) і отримаємо:

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{-\beta(t_1-t_2)} = e^{\beta(t_2-t_1)} = e^{\beta \Delta t} = e^{\beta n T}, \quad (3.3)$$

де  $n$  – число повних коливань за час  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $T = \frac{\Delta t}{n}$  – період цих коливань.

Прологарифмувавши рівняння (3.3), отримаємо:

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \beta n T.$$

Звідси:

$$\beta = \frac{1}{nT} \ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{t} \ln \frac{A_1}{A_2}. \quad (3.4)$$

З формули (3.4) випливає, що коефіцієнт згасання – це величина, обернена до часу, протягом якого амплітуда зменшується  $e$  раз ( $\ln(A_1/A_2) = \ln(e) = 1$ ).  $[\beta] = c^{-1}$ .

Логарифмічним декрементом згасання називається величина:

$$\lambda = \beta T = \frac{1}{n} \ln \frac{A_1}{A_2}. \quad (3.5)$$

З формули (3.5) випливає, що логарифмічний декремент згасання – це величина, обернена до числа коливань, за яке амплітуда зменшується в  $e$  раз.

Розрахункова формула для знаходження прискорення вільного падіння  $g$  (ця частина лабораторної роботи виконується лише за вказівкою викладача).

Формула (2.12) для періоду коливань фізичного маятника з урахуванням згасання може бути використана для знаходження прискорення вільного падіння  $g$ . Оскільки

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I} = \frac{mgd}{I},$$

то  $g$  входить у вираз для періоду коливань. Введемо позначення:

$$l_{зв} = \frac{I}{md}, \quad (3.6)$$

тоді

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l_{зв}}. \quad (3.7)$$

Величина  $l_{зв}$  називається зведеною довжиною фізичного маятника. Якщо фізичним маятником є стержень довжиною  $l$ , що коливається відносно горизонтальної осі, що проходить через верхній кінець стержня, то:

$$I = \frac{1}{3} ml^2, \quad d = \frac{l}{2}$$

і

$$l_{зв} = \frac{2}{3} l.$$

Знання періоду коливань  $T$ , зведеної довжини та коефіцієнта згасання коливань  $\beta$  дозволяє знайти  $g$ .

Із формули (2.12) маємо:

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} + \beta^2. \quad (3.8)$$

Враховуючи формулу (3.7), отримуємо:

$$\frac{g}{l_{зв}} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \beta^2, \quad (3.9)$$

Звідси для прискорення вільного падіння отримуємо:

$$g = l_{зв} \left( \frac{4\pi^2}{T^2} + \beta^2 \right), \quad (3.10)$$

де  $\beta$  знаходиться із формули (3.4).

#### 4 ОПИС ДОСЛІДНОЇ УСТАНОВКИ

Дослідна установка (рис. 4.1) складається з фізичного маятника, що може коливатися відносно фіксованої осі, та електронного блока, призначеного для вимірювання кількості коливань та їх часу. Період коливань маятника можна змінювати, змінюючи положення вантажу на стержні. Щоб почати дослід, необхідно відхилити маятник від положення рівноваги (для вимірювання відхилення від положення рівноваги служить шкала, проградуєвана в градусах), занулити покази електронного блока (натиснувши на кнопку “СБРОС”) і відпустити маятник. Фотоелектричний індикатор фіксує кількість коливань  $N$  і час  $t$ , протягом якого відбувалися коливання. Використовуючи ці дані, можна знайти період коливань  $T=t/N$ . Щоб зупинити відлік через певну кількість коливань (наприклад, 10), необхідно натиснути кнопку “СТОП”.

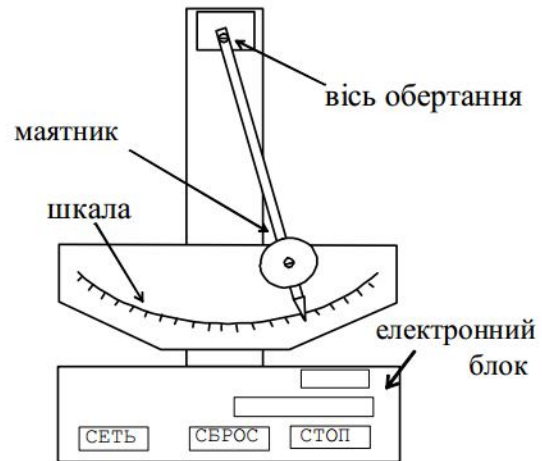


Рисунок 4.1

#### 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 5.1 Відхилити маятник на кут  $A_1$  (значення  $A_1$  задає викладач).
- 5.2 Привести маятник в рух. Визначити час  $N$  коливань ( $N$  задає викладач) та кінцеву амплітуду  $A_2$ .
- 5.3 Визначити коефіцієнт згасання та логарифмічний декремент згасання за формулами (3.4) та (3.5), відповідно.
- 5.4 Повторити дослід ще два рази.
- 5.5 Обчислити середні значення  $\beta_c$  і  $\lambda_c$ .
- 5.6 Оцінити похибки вимірювань.
- 5.7 Результати роботи подати у вигляді  $\beta = \beta_c \pm \Delta\beta_c$  та  $\lambda = \lambda_c \pm \Delta\lambda_c$ , вказуючи також величини відносних похибок  $\varepsilon$ .
- 5.8 Результати роботи записати в таблицю 5.1.

**Таблиця 5.1**

№ п/п	$n$	$t,$ с	$\Delta t,$ с	$A_1,$ ...°	$\Delta A_1,$ ...°	$A_2,$ ...°	$\Delta A_2,$ ...°	$\beta,$ с <sup>-1</sup>	$\Delta \beta,$ с <sup>-1</sup>	$\varepsilon_\beta$ %	$\lambda$	$\Delta \lambda$	$\varepsilon_\lambda$ %
1										///			///
2										///			///
3										///			///
с.з.													

5.11 За формулою (2.10) знайти 5-6 додаткових значень амплітуди в інтервалі  $[A_1, A_2]$  через рівні проміжки часу. За цими точками побудувати графік залежності амплітуди від часу.

### **6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ**

- 6.1 Що таке гармонічні коливання; які їх основні характеристики?
- 6.2 Які коливання називаються згасаючими?
- 6.3 Як амплітуда згасаючих коливань залежить від часу?
- 6.4 Що таке коефіцієнт згасання коливань?
- 6.5 Дати означення логарифмічного декременту згасання.
- 6.6 Вивести формули для розрахунку похибок.

### **7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ**

- 7.1 Показати, що (2.9) є розв'язком диференціального рівняння (2.8).
- 7.2 Зобразити залежність амплітуди згасаючих коливань від часу.
- 7.3 Вивести формулу для прискорення вільного падіння з урахуванням моменту інерції тягарця, закріпленого на стержні.

## Лабораторна робота № 9

### ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ МЕХАНІКИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

**Мета роботи:** засвоїти основні поняття і закони механіки обертально-коливних рухів. Визначити модуль кручення стержня за допомогою крутильного маятника.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Крутильний маятник.
2. Штангенциркуль.
3. Секундомір.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

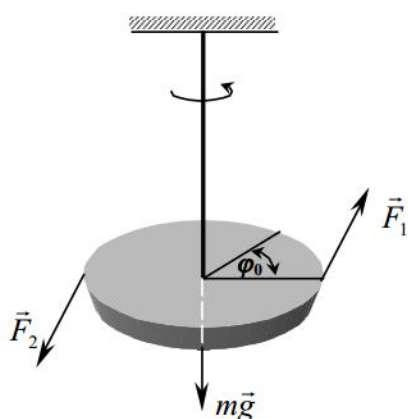


Рисунок 2.1

Найпростіший пристрій, в якому можуть відбуватися крутильні коливання – крутильний маятник, що складається зі стержня, закріпленого у верхній частині, і диска, який внизу жорстко скріплений з цим стержнем (рис. 2.1).

Якщо за допомогою пари сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  диск (а разом з ним і нижній кінець стержня) повернути на певний кут  $\varphi_0$ , а потім припинити дію цих сил, - диск здійснюватиме обертально-коливні рухи навколо початкового положення рівноваги (звідси назва “крутильний маятник”).

З’ясуємо основні поняття механіки крутильних коливань та дамо математичний опис явищ, які відбуваються в системі, показаній на рис. 2.1.

2.1 Деформаційні явища в системі, що розглядається. Деформація – зміна форми і розмірів тіла під дією сили. Деформація називається пружною, якщо тіло після припинення дії сили набуває попередніх форми і розмірів (пружно-деформівне тіло). Деформування реальних тіл завжди супроводжується так званими залишковими деформаціями (після припинення дії сили деформація не зникає повністю); якщо ці деформації малі, ними можна нехтувати і вважати тіло пружно-деформівним. Надалі розглядатимуться лише пружні деформації.

Розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву, кручення, згину; доведено, що всі види пружних деформацій можуть бути зведені до одночасної дії деформації розтягу (стиску) і деформації зсуву.

2.2 Деформація розтягу в системі, що розглядається (рис. 2.1) реалізується при розтягу стержня під дією ваги диска  $mg$  ( $m$  – маса диска,  $g$  – прискорення вільного падіння).

Введемо позначення:

$$\frac{mg}{S} = \sigma, \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon,$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу стержня,  $\Delta l = l - l_0$  ( $l_0$  – початкова довжина стержня без прикріпленого диска,  $l$  – довжина стержня, коли до нього прикріплений диск). Величина  $\sigma$  називається напруженням,  $\Delta l$  – абсолютним видовженням,  $\varepsilon$  – відносним видовженням. За законом Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.1)$$

де  $E$  – модуль Юнга – величина, яка характеризує пружні властивості середовища (знаходиться за таблицями).

2.3 Деформацією зсуву (зсувом) називається така деформація, при якій всі плоскі шари, паралельні до площини, вздовж якої діє прикладена до тіла сила, зсунуті один відносно одного. Зсув ілюструє рис. 2.2: прямокутний паралелепіпед, нижня грань якого закріплена, а до верхньої прикладена сила  $\vec{F}$  (яка лежить у площині цієї грані) перетворюється у косокутний.

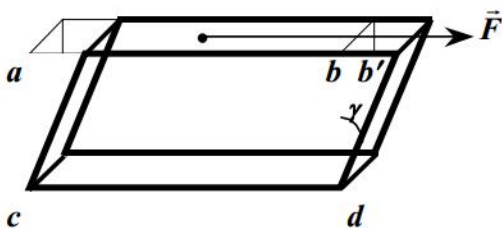


Рисунок 2.2

Переміщення  $bb'$  називають абсолютним зсувом грані  $ab$  відносно грані  $cd$ . Кут  $\gamma$  називають кутом зсуву, а  $\text{tg}\gamma$  – відносним зсувом. Для малого зсуву  $\text{tg}\gamma \approx \gamma$  ( $\gamma$  вимірюється в радіанах). При зсуві всередині тіла виникають пружні сили  $\vec{F}_{\text{пр}}$ , які протидіють зміні форми тіла, причому

$$\vec{F}_{\text{пр}} = -\vec{F}.$$

Величина

$$\tau = \frac{F}{S},$$

де  $S$  – площа шару, що зсувається, називається тангенціальним (дотичним) напруженням.

У межах пружних деформацій відносний зсув  $\gamma$  ізотропного матеріалу пов'язаний із напруженням  $\tau$  законом Гука (для зсуву):

$$\tau = \gamma G, \quad (2.2)$$

де  $G$  – модуль зсуву для даного матеріалу.

2.4 Деформація кручення. Кручення – деформація, яка виникає в стержні, якщо закріпити один його кінець і закручувати інший (рис. 2.3, нижній кінець стержня закріплено).

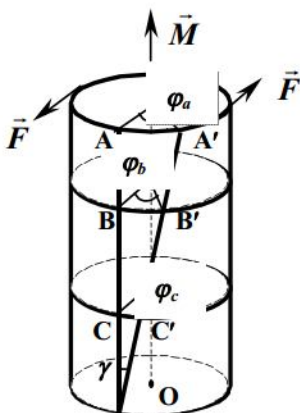


Рисунок 2.3

При деформації кручення перерізи стержня, що лежать вище нижнього (закріпленого) перерізу, повертаються довкола осі стержня, причому чим вище лежить переріз, тим більший його кут повороту ( $\varphi_a > \varphi_b > \varphi_c \dots$ ); твірні циліндричної поверхні при цьому зсуваються на кут  $\gamma$  (рис. 2.3). Іншими словами, деформацію кручення можна представити як суму деформації зсуву. Отже, при закручуванні стержень зазнає деформації зсуву.

Нехай верхній (незакріплений) переріз стержня повернувся на кут  $\varphi$  під дією обертового моменту зовнішніх сил  $\vec{M}$  (докладніше щодо цього див. далі). Тоді, як

встановлено на досліді, в межах пружних деформацій

$$M = k\varphi, \quad (2.3)$$

де  $k$  – модуль кручення стержня – величина, що залежить від розмірів і пружних властивостей стержня. Модуль кручення стержня чисельно дорівнює моменту сил пружності, що виникає при закручуванні стержня на одиничний кут. Формула (2.3) – закон Гука для деформації кручення. Оскільки кручення зводиться до деформації зсуву, то між модулем кручення стержня  $k$  і його модулем зсуву  $G$  існує зв'язок:

$$k = \frac{\pi r^4 G}{2l}, \quad (2.4)$$

де  $r$  – радіус стержня,  $l$  – його довжина.

## 2.5 Момент сили. Момент пари сил. Момент пружних сил.

2.5.1 Рух тіла навколо нерухомої осі може викликати лише зовнішня сила (або її складова)  $\vec{F}$ , яка лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання. Здатність тіла обертатися під дією цієї сили залежить не тільки від величини сили, її напрямку, але і від точки прикладання сили.

Фізичною величиною, яка характеризує ефективність дії сили при обертальному русі тіла, є момент сили. Розрізняють момент сили відносно точки і момент сили відносно осі.

Виберемо на осі обертання  $OZ$  точку  $O$  в площині дії означеної вище сили  $\vec{F}$ . Тоді моментом сили відносно точки  $O$  буде векторна величина  $\vec{M}$ , яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного із точки  $O$  в точку  $A$  прикладання сили, і вектора сили  $\vec{F}$ :

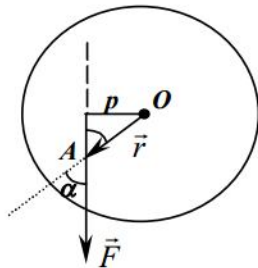


Рисунок 2.4

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (2.5)$$

Рис. 2.4 ілюструє обертання диска навколо горизонтальної осі під дією сили  $\vec{F}$ , прикладеної в точці  $A$ . Напрямок вектора  $\vec{M}$  співпадає з поступальним рухом правого гвинта, орієнтованого вздовж осі  $OZ$ , при повороті головки гвинта в напрямку обертання диска.  $\vec{M}$  буде спрямований від площини рисунка – “до нас”. Модуль моменту сили

$$|\vec{M}| = Fr \sin \alpha = Fp, \quad (2.6)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{r}$  і  $\vec{F}$ , а  $p = r \sin \alpha$  – довжина перпендикуляра, опущеного з осі обертання на напрям дії сили – плече сили.

Момент сили відносно нерухомої осі  $OZ$  є проекцією моменту сили  $\vec{M}$  відносно точки  $O$  на вісь  $OZ$ :

$$M_z = Fr \sin \alpha. \quad (2.7)$$

Момент сили відносно нерухомої осі  $OZ$  можна означити і як векторну величину

$$\vec{M} = M_z \cdot \vec{k},$$

де  $\vec{k}$  – одиничний вектор, спрямований уздовж осі  $OZ$  (індекс  $z$  може опускатися).

Якщо на тіло діє кілька сил, то результуючий момент сил відносно точки  $O$  дорівнює векторній сумі складових моментів. Результуючий момент відносно осі є алгебраїчною сумою проекцій складових моментів.

Вимірюється момент сили в ньютон-метрах (Н·м).

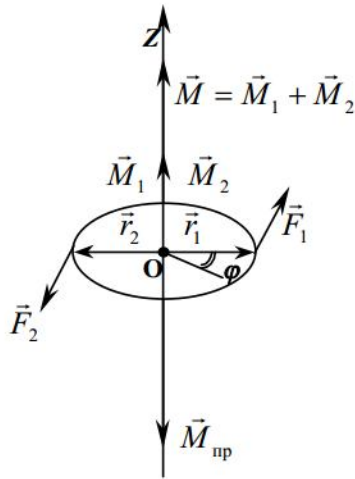


Рисунок 2.5

2.5.2 Для випадку крутильного маятника обертання диска, а разом з цим і деформацію кручення стержня, зручно реалізувати за рахунок пари сил – сил, які рівні за абсолютною величиною і спрямовані вздовж паралельних прямих у протилежних напрямках. На рис. 2.5 це сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , які прикладені до диска з протилежних боків і лежать в горизонтальній площині. Моменти сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  є

$$\vec{M}_1 = [\vec{r}_1 \times \vec{F}_1], \quad \vec{M}_2 = [\vec{r}_2 \times \vec{F}_2],$$

а результуючий момент (момент пари сил)

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Напрями векторів  $\vec{M}_1$ ,  $\vec{M}_2$ ,  $\vec{M}$  показані на рис.

2.5. Проекція результуючого моменту сил на вісь обертання є:

$$M_z = rF_1 + rF_2 = pF, \quad (2.8)$$

де  $F_1 = F_2 = F$ ,  $r$  – радіус диска,  $p = 2r$  – плече пари сил.

Під дією моменту пари сил  $M_z$  диск повертається на певний кут.

2.5.3 При повороті диска на кут  $\varphi$  нижній кінець стержня, який жорстко скріплений з диском, також повернеться на кут  $\varphi$ ; виникне деформація кручення стержня, описана вище. Реакція стержня на дію зовнішнього моменту сил  $\vec{M}$  полягає у появі моменту сил пружності  $\vec{M}_{пр}$ , прикладеного до диска; при цьому

$$\vec{M}_{пр} = -\vec{M} \quad (2.9)$$

(рис. 2.5). Проекція  $\vec{M}_{пр}$  на вісь  $OZ$

$$M_{прz} = -k\varphi \quad (2.10)$$

(використана формула (2.3)).

2.6 Момент інерції (динамічний момент інерції) – фізична величина, яка є мірою інертності тіла при обертальному русі подібно до того, як маса є мірою інертності тіла при поступальному русі. Момент інерції залежить від маси тіла, його форми, розмірів та вибору осі обертання.

Момент інерції тіла відносно заданої осі визначається за формулою:

$$I = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(V)} \rho r^2 dV, \quad (2.11)$$

де  $dm = \rho dV$  – елемент маси тіла,  $\rho$  – густина,  $r$  – віддаль елементарного об'єму  $dV$  від осі обертання. Для однорідних тіл (густина стала)

$$I = \rho \int_{(V)} r^2 dV.$$

Для матеріальної точки, яка має масу  $m$ , що знаходиться на віддалі  $r$  від осі обертання

$$I = mr^2.$$

Інтегрування, зокрема, дає для суцільного циліндра (диска) момент інерції відносно повздовжньої осі симетрії:

$$I = \frac{1}{2} mR^2,$$

$m$  – маса циліндра,  $R$  – його радіус.

Момент інерції вимірюється у  $\text{кг}\cdot\text{м}^2$ .

### 2.7 Основний закон динаміки обертового руху твердого тіла.

Зв'язок між моментом сили, кутовим прискоренням та моментом інерції дає основний закон динаміки обертового руху:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}, \quad (2.12)$$

де  $\vec{M}$  - результуючий момент сили. Після проектування на вісь обертання маємо:

$$M = I\varepsilon,$$

де  $M$  – проекція результуючого моменту (алгебраїчної суми моментів) на вісь обертання – момент сили відносно осі обертання.

### 2.8 Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2.13)$$

де  $I$  – момент інерції тіла відносно заданої осі,  $\omega$  - кутова швидкість обертання. У нашому випадку  $I$  – момент інерції диска,  $\omega$  - його кутова швидкість. Вираз (2.13) визначає кінетичну енергію крутильного маятника; при цьому ми нехтуємо кінетичною енергією стержня, яка є набагато меншою від кінетичної енергії диска.

2.9 Робота при обертальному русі. Робота, що виконується зовнішніми силами при обертанні тіла навколо нерухомої осі:

$$A = \int_0^{\varphi_0} M_z d\varphi,$$

де  $M_z$  - проекція моменту зовнішніх сил на вісь обертання,  $\varphi_0$  – кут, на який повернулося тіло. В нашому випадку

$$M_z = k\varphi$$

(див. формулу (2.3)), і

$$A = \frac{k\varphi_0^2}{2}. \quad (2.14)$$

Це – робота проти сил пружності, які діють з боку стержня на диск. Разом з тим  $\frac{k\varphi_0^2}{2}$  - робота, яка виконується силами пружності (моментом сил пружності) при поверненні системи в початкове положення:

$$A = \int_{\varphi_0}^0 M_{пр.,z} d\varphi = - \int_{\varphi_0}^0 k\varphi d\varphi = \frac{k\varphi_0^2}{2}.$$

2.10 Потенціальна енергія деформації кручення. Із формули (2.14) виходить, що потенціальна енергія розглядуваної системи

$$E_p = \frac{k\varphi_0^2}{2}; \quad (2.15)$$

тут модуль кручення стержня  $k$  може бути виражений через модуль зсуву за формулою (2.4).

При закручуванні диска (кінця стержня) на довільний кут  $\varphi$

$$E_p = \frac{k\varphi^2}{2}. \quad (2.16)$$

2.11 Перетворення кінетичної та потенціальної енергії при крутильних коливаннях.

Після припинення дії зовнішніх сил (диск повернули на кут  $\varphi_0$  і відпустили) диск повертається до положення рівноваги під дією пружних сил, які діють на нього з боку закрученого стержня. При цьому потенціальна енергія деформованого стержня

зменшуватиметься, а кінетична енергія диска збільшуватиметься. При досягненні початкового положення рівноваги ( $\varphi=0$ ) вся потенціальна енергія перейде в кінетичну (деформація зникає!); після проходження положення рівноваги маятник продовжуватиме обертання (долаючи сили пружності) до повного переходу кінетичної енергії диска в потенціальну енергію закрученого на кут  $\varphi_0$  стержня (втратами енергії нехтуємо). Перетворення потенціальної енергії в кінетичну і навпаки відбуватимуться за схемою:

$$\frac{k\varphi_0^2}{2} \leftrightarrow \frac{I\omega_m^2}{2} \leftrightarrow \frac{k\varphi_0^2}{2},$$

де  $\omega_m$  – максимальне значення кутової швидкості (в положенні рівноваги). В довільний момент часу повна енергія

$$E = E_k + E_p = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2} \quad (2.17)$$

величина стала.

### 2.12 Рівняння руху крутильного маятника.

Продиференціюємо вираз для повної енергії системи

$$\frac{I\omega^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2} = const$$

по часу. Маємо:

$$I\omega d\omega + k\varphi d\varphi = 0. \quad (2.18)$$

Оскільки  $d\varphi = \omega dt$ , а

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$$

( $\varepsilon$  - кутове прискорення), то (2.18) запишемо у вигляді:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\varphi = 0$$

або

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (2.19)$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{k}{J}; \quad (2.20)$$

інша форма запису рівняння (2.19)

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Рівняння (2.19) є рівнянням руху крутильного маятника.

Розв'язком рівняння (2.19) є:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.21)$$

де  $\varphi_0$  – максимальне відхилення диска від положення рівноваги,  $\omega_0$  – кутова частота, а  $\alpha$  - початкова фаза коливань. Якщо в момент часу  $t=0$  (початок коливань) диск був відхилений на кут  $\varphi_0$ , то  $\alpha=0$ .

Таким чином, диск здійснюватиме гармонійні коливання навколо положення рівноваги з періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (2.22)$$

(вираз (2.22) отримується із (2.19) як наслідок того, що період косинуса  $2\pi$ ).

Кутова швидкість і кутове прискорення диска змінюватимуться як за величиною, -

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\varphi_0 \omega_0 \sin \omega_0 t,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\varphi_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t,$$

так і за напрямом.

### 3 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

Модуль кручення стержня визначаємо з формули (2.22):

$$k = \frac{4\pi^2 I}{T^2}. \quad (3.1)$$

Оскільки момент інерції диска

$$I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{8} m d^2$$

( $d$  – діаметр диска), а маса диска

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} h$$

( $\rho$  - густина,  $h$  – висота диска), то

$$k = \frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{\rho h d^4}{T^2}. \quad (3.2)$$

(3.2) є розрахунковою формулою.

### 4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 4.1 Тричі виміряти діаметр та висоту диска та визначити їх середні значення.
- 4.2 Тричі визначити період коливань маятника. Для цього поворотом диска закрутити дротину на  $90^\circ$  і відпустити диск. Маятник почне коливатися. Виміряти час  $t$  заданого викладачем числа  $N$  коливань і визначити період  $T = \frac{t}{N}$ .
- 4.3 Визначити середні значення  $T$  та обчислити середні значення модуля кручення за формулою (3.2).
- 4.4 Оцінити відносну та абсолютну похибки обчислень.
- 4.5 Результат роботи подати у вигляді  $k = k_c \pm \Delta k_c$ , вказуючи також величину відносної похибки  $\varepsilon$ .
- 4.6 Результати лабораторної роботи записати в таблицю 4.1.

**Таблиця 4.1**

№ п/п	$d$ , $10^{-3}$ м	$\Delta d$ , $10^{-3}$ м	$h$ , $10^{-3}$ м	$\Delta h$ , $10^{-3}$ м	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\Delta \rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$T$ , с	$\Delta T$ , с	$k$ , Н·м	$\Delta k$ , Н·м	$\varepsilon_k$ , %
1											
2											
3											
с.з.											

### 5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 5.1 З'ясувати суть деформацій розтягу (стиску), зсуву, кручення. Записати закон Гука для цих видів деформацій.
- 5.2 Означити момент сили відносно осі, момент пари сил.
- 5.3 Який фізичний зміст моменту інерції?
- 5.4 Прослідкувати за переходом кінетичної енергії в потенціальну і навпаки при крутильних коливаннях.
- 5.5 Як означити модуль кручення як фізичну величину?
- 5.6 Як змінюється кутова швидкість і кутове прискорення диска?
- 5.7 Переконайтеся, що (2.21) є розв'язком для (2.19).
- 5.8 Обґрунтуйте формулу (2.22) для періоду коливань диска.
- 5.9 Вивести формули для розрахунку похибок.

## **6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ**

- 6.1 Обґрунтуйте таке означення модуля зсуву: “модуль зсуву дорівнює такому тангенціальному напруженню, при якому кут зсуву  $\gamma$  дорівнював би  $\pi/4$ , якби при таких деформаціях не була перевищена межа пружності”.
- 6.2 Знайти максимальну кутову швидкість диска.
- 6.3 Знайти модуль зсуву для заліза на основі отриманої величини модуля кручення стержня.
- 6.4 Показати, що середнє (за період коливання) значення кінетичної енергії  $E_k$  дорівнює середньому значенню потенціальної енергії  $E_p$ .
- 6.5 Отримайте вираз для  $k$  із урахуванням згасання крутильних коливань.
- 6.6 Використовуючи формулу (2.4), розрахувати модуль зсуву  $G$  для стержня.

## Лабораторна робота № 10

### ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗВУКУ В ПОВІТРІ МЕТОДОМ ІНТЕРФЕРЕНЦІЇ

**Мета роботи:** ознайомитися з явищем інтерференції звукових хвиль. Визначити швидкість поширення звуку в повітрі.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Генератор звукових хвиль.
2. Прилад Квінке.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Хвилі – це збурення (зміна стану середовища), які поширюються в середовищі зі скінченною швидкістю і переносять енергію (без переносу речовини). Частинки середовища, що беруть участь у процесі поширення хвилі, здійснюють коливання відносно своїх положень рівноваги. Якщо коливання частинок відбувається в тому ж напрямку, що й поширення енергії хвилі, то хвиля називається повздовжньою, якщо ж коливання відбувається в перпендикулярному напрямку, вона називається поперечною. Звукові хвилі в рідинах і газах є прикладом повздовжніх хвиль. Розрізняють плоскі та сферичні хвилі в залежності від форми фронту хвилі (фронт хвилі – геометричне місце точок, яких досяг хвильовий процес у даний момент часу).

2.2 У хвильовому процесі кожна наступна точка середовища, до якої доходить хвиля, відтворює (за умови відсутності згасання) рух попередніх точок середовища, але з певним запізненням. Якщо закон коливання початкової точки (початку координат) задається виразом

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega \cdot t + \alpha), \quad (2.1)$$

де  $A$  – амплітуда коливань (максимальне відхилення точки від положення рівноваги),  $\omega$  – кутова частота,  $\alpha$  – початкова фаза коливань, то закон коливання точки, розміщеної на віддалі  $x_1$  від початкової (рис. 2.1), є:

$$\xi(x_1, t) = A \cos(\omega \cdot (t - t_1) + \alpha), \quad (2.2)$$

де  $t_1 = \frac{x_1}{g}$  – час, необхідний для поширення

хвилі на відстань  $x_1$ ,  $g$  – швидкість поширення хвилі. Таким чином, для довільної гармонічної плоскої хвилі зміщення від положення рівноваги точки  $x$  в момент часу  $t$  дається виразом:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{g}) + \alpha). \quad (2.3)$$

Користуючись виразами, які пов'язують кутову частоту  $\omega$  з періодом коливань  $T$  і лінійною частотою  $\nu$  ( $\omega = 2\pi/T$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ ), виразу (2.3) можна надати вигляду:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi x}{gT} + \alpha). \quad (2.4)$$

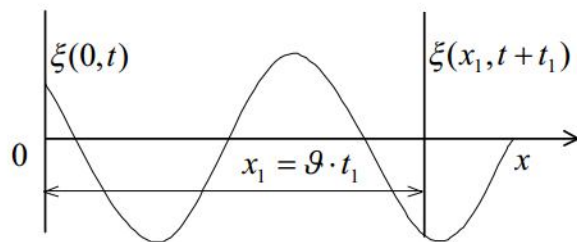


Рисунок 2.1

Величина  $\vartheta \cdot T$  має зміст віддалі, на яку поширюється хвиля за час  $T$ . Це – довжина хвилі  $\lambda$ :

$$\lambda = \vartheta T = \vartheta / \nu. \quad (2.5)$$

Враховуючи (2.5), рівняння біжучої плоскої хвилі запишемо у вигляді:

$$\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (2.6)$$

де величина  $k=2\pi/\lambda$  називається кутовим хвильовим числом.

2.3 Поширення хвиль від різних джерел відбувається незалежно. Принцип суперпозиції для незалежних хвиль твердить, що зміщення частинок середовища внаслідок накладання хвиль від різних джерел визначається як геометрична сума зміщень, викликаних окремими хвилями.

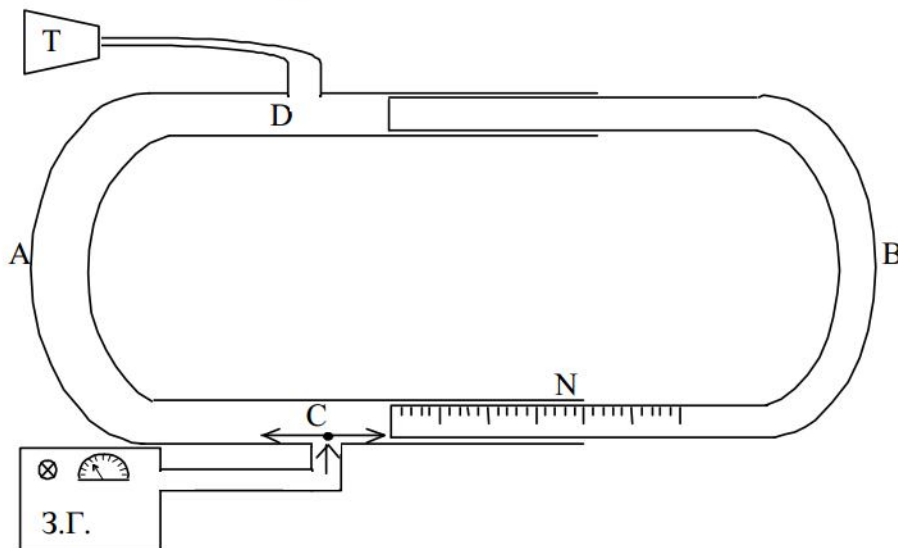
2.4 Хвилі, які:

- мають однакові частоти,
- викликають коливання частинок середовища вздовж однієї прямої,
- мають сталу (незалежну від часу) різницю фаз коливань у кожній точці середовища називаються когерентними.

При накладанні когерентних хвиль відбувається інтерференція – підсилення коливань в одних точках середовища і послаблення в інших.

### 3 ОПИС УСТАНОВКИ

Інтерференцію акустичних хвиль можна вивчати за допомогою інтерферометра Квінке (типу тромбона) (рис. 3.1).



**Рисунок 3.1**

Прилад Квінке складається з двох U-подібних трубок різного діаметра, причому трубка В може входити в трубку А, і слухової трубки Т. Трубка А з допомогою гумової трубки під'єднана до звукового генератора.

### 4 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

Принцип дії інтерферометра Квінке такий: збуджені генератором звукових коливань хвилі

$$\xi_0 = A \cos(\omega t - kx), \quad (4.1)$$

приходять у точку С і викликають поширення звукових хвиль у двох протилежних напрямках. Оскільки ці хвилі збуджені одним джерелом, то вони когерентні. В точці D відбувається накладання двох хвиль:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A \cos(\omega t - kx_1), \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t - kx_2),\end{aligned}\tag{4.2}$$

Результуюче коливання, у згоді з принципом суперпозиції, є сумою коливань  $\xi_1$  та  $\xi_2$ :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} d\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(x_1 + x_2)}{2}\right).\tag{4.3}$$

Тут  $d=x_1-x_2$  – різниця ходу першої та другої хвиль до точки D. За допомогою слухової трубки, під'єднаної до отвору P, можна чути посилення або послаблення гучності звуку (гучність звуку пропорційна до квадрата амплітуди результуючого коливання), в залежності від величини різниці ходу хвиль.

Рівняння (4.3) описує стоячу хвилю, амплітуда якої рівна  $2A \cos(\pi d / \lambda)$ . У стоячій хвилі, що утворюється в приладі Квінке, величина амплітуди звукових коливань у певній точці залежить від положення точки. В точках, де  $\cos(\pi d / \lambda) = 0$  (це відбувається при  $\pi d / \lambda = (2m + 1)\pi / 2$ , де  $m$  – ціле число), амплітуда результуючого коливання рівна нулю (коливань немає). Ці точки називаються вузлами стоячої хвилі. В них виконується умова інтерференційного мінімуму:

$$d = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (m=0, 1, 2, \dots).\tag{4.4}$$

В точках, де  $\cos(\pi d / \lambda) = 1$  (це відбувається при  $\pi d / \lambda = m\pi$ , де  $m$  – ціле число), амплітуда є максимальною. Ці точки називаються пучностями стоячої хвилі. В них виконується умова інтерференційного максимуму:

$$d = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (m=0, 1, 2, \dots).\tag{4.5}$$

Нехай  $l$  - віддаль між двома поділками на трубці В, котрі, при співпаданні їх з краєм трубки А, відповідали сусіднім мінімумам гучності (цю віддаль фіксуємо по шкалі N). Тоді для двох сусідніх мінімумів ( $m$ -го і  $m + 1$ -го) маємо:

$$\begin{aligned}d_1 &= (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \\ d_2 &= (2(m + 1) + 1) \frac{\lambda}{2}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Оскільки при переміщенні трубки В на віддаль  $l$  довжина шляху, який проходить хвиля у трубці В, змінюється на  $2l$ , то  $d_2 = d_1 + 2l$ , звідки:

$$l = \frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{[2(m + 1) + 1] \frac{\lambda}{2} - 2(m + 1) \frac{\lambda}{2}}{2} = \frac{\lambda}{2}.\tag{4.7}$$

Таким чином,

$$\lambda = 2l.\tag{4.8}$$

Підстановка виразу (4.8) у вираз (2.5) дає розрахункову формулу для визначення швидкості поширення звуку в повітрі:

$$g = 2lv.\tag{4.9}$$

## 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 5.1 Увімкнути генератор звукових хвиль та встановити задану викладачем частоту  $\nu$ .
- 5.2 Витягнути трубку В з трубки А на максимальну відстань і повільно пересувати її в зворотньому напрямку всередині трубки А; за допомогою слухової трубки відмітити точки, в яких звук найслабший (мінімум гучності). Положення цих точок  $n$  зафіксувати за допомогою шкали N.
- 5.3 Визначити відстані  $l$  між точками, що відповідають сусіднім мінімумам:  

$$l_1 = n_2 - n_1; l_2 = n_3 - n_2; \dots$$
- 5.4 Визначити середнє значення  $l_c$  та за формулою (4.9) обчислити середнє значення  $\vartheta_c$ .
- 5.5 Оцінити похибки вимірювань.
- 5.6 Результат роботи подати у вигляді  $\vartheta = \vartheta_c \pm \Delta\vartheta_c$ , вказуючи також величину відносної похибки  $\varepsilon$ .
- 5.7 Результати лабораторної роботи записати в таблицю 5.1.

**Таблиця 5.1**

№ п/п	$\nu$ , Гц	$\Delta \nu$ , Гц	$l$ , $10^{-3}$ м	$\Delta l$ , $10^{-3}$ м	$\vartheta$ , м/с	$\Delta \vartheta$ м/с	$\varepsilon$ %
1							
2							
3							
С.з.							

## 6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 6.1 Що таке хвилі? Які види хвиль ви знаєте?
- 6.2 Записати рівняння хвилі та формули зв'язку між характеристиками хвилі (довжиною хвилі, частотою, періодом, швидкістю хвилі).
- 6.3 Дати означення явища інтерференції хвиль.
- 6.4 Які хвилі називаються когерентними?
- 6.5 Сформулювати умови максимуму та мінімуму при інтерференції.
- 6.6 Вивести формули для розрахунку похибок.

## 7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 7.1 Отримати формулу (4.3) із формул (4.4).
- 7.2 Як зміниться довжина звукової хвилі, якщо дослід проводити у воді?
- 7.3 Як зміниться умова максимуму, якщо одна з трубок заповнена водою?

## Лабораторна робота № 11

### ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ДИНАМІЧНОЇ В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ МЕТОДОМ СТОКСА

**Мета роботи:** засвоїти основні поняття механіки рідин. Визначити коефіцієнт в'язкості рідини, використовуючи метод Стокса.

#### 1 ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ

1. Прилад Стокса.
2. Кулька.
3. Мікрометр.
4. Штангенциркуль.
5. Секундомір.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 В багатьох практично важливих випадках механіка рідин, що ґрунтується на уявленні про ідеальну рідину, незастосовна. На відміну від ідеальних рідин у реальних рідинах діють сили, які дотичні до площини контакту шарів. Ці сили називають силами в'язкого тертя (внутрішнього тертя) або *силами в'язкості*.

*В'язкістю* називають властивість рідини або газу чинити опір при відносному переміщенні їхніх шарів.

2.2 У потоках реальних рідин поблизу змочуваних твердих тіл різні шари мають неоднакову швидкість. Швидкість шару, який безпосередньо торкається твердого тіла, дорівнює нулю; в міру віддалення від поверхні твердого тіла швидкість шарів збільшується.

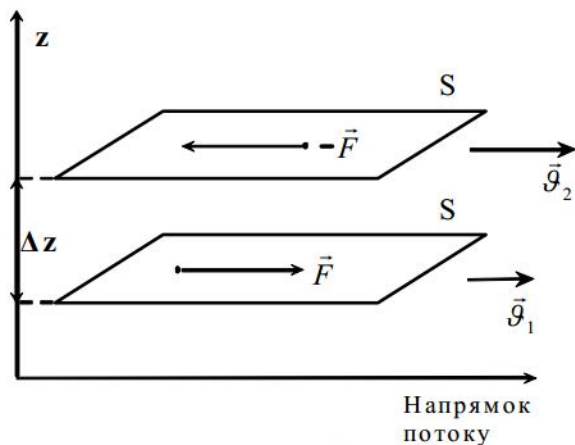


Рисунок 2.1

Уявно потік рідини можна поділити на нескінченну кількість шарів. При відносному переміщенні на кожен з шарів діють сили тертя. Виділимо в потоці два паралельних шари рідини з рівними площами  $S$  і відстанню між ними  $\Delta z$  (рис. 2.1). На досліді встановлено, що на кожен шар діє дотична сила, причому на шар рідини, який рухається з меншою швидкістю, діє сила  $\vec{F}$  у напрямку потоку, а на шар рідини, що рухається з більшою швидкістю - сила  $-\vec{F}$ . Величина цієї сили (сили в'язкості)

визначається законом Ньютона

$$F = \eta S \left| \frac{\Delta g}{\Delta z} \right|, \quad (2.1)$$

де  $\eta$  - коефіцієнт динамічної в'язкості або коефіцієнт внутрішнього тертя;  $S$  - площа поверхні шару рідини;

$\left| \frac{\Delta \vartheta}{\Delta z} \right|$  - величина, що показує, наскільки швидко змінюється швидкість течії у напрямі, перпендикулярному до напрямку руху рідини.

2.3 Використовуючи (2.1), маємо:

$$\eta = \frac{F}{\left| \frac{\Delta \vartheta}{\Delta z} \right| S} \quad (2.2)$$

Коефіцієнт в'язкості чисельно дорівнює силі тертя, що діє на одиницю поверхні шару газу (рідини), якщо зміна швидкості в перпендикулярному до руху напрямку рівна 1 м/с на 1 м. В системі СІ одиницею вимірювання в'язкості є

$$[\eta] = \frac{1 \text{ Н}}{1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1 \text{ м}^2} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

(також для вимірювання в'язкості використовують допоміжну одиницю

$$1 \text{ пуаз} = 10^{-1} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

на честь французького фізика Пуазейля).

В'язкість рідини сильно залежить від температури і зменшується з її підвищенням.

2.4 Розглянемо рух симетричного тіла у реальній рідині. Внаслідок в'язкості рідина не може вільно ковзати по поверхні тіла; тому досить тонкий шар рідини покриває поверхню тіла і рухається разом з ним. Виникає сила тертя в'язкості між шарами рідини, а не між твердим тілом і рідиною (ця сила не залежить від матеріалу, з якого зроблене тіло, а визначається лише формою тіла і властивостями рідини).

Дослід показує, що величина результуючої сили в'язкості, що діє на тіло, пропорційна швидкості (при малих швидкостях):

$$F = C \vartheta \quad (2.3)$$

Коефіцієнт пропорційності С залежить від форми тіла, його характеристичних розмірів, орієнтації в потоці рідини та властивостей досліджуваної рідини.

При русі тіла в реальній рідині величина тиску перед рухомим тілом і за ним відрізняються (перший більший, ніж другий). Внаслідок цього на тіло діятиме сила, яка напрямлена проти його руху, тобто сила лобового опору:

$$F_{\text{л.оп.}} = C_1 \vartheta^2 \quad (2.4)$$

$C_1$  – коефіцієнт пропорційності, що залежить від форми тіла, його характеристичних розмірів, орієнтації в потоці рідини та властивостей досліджуваної рідини.

Отже, на симетричне тіло в потоці рідини одночасно діють сили в'язкості і сили лобового опору. Сили в'язкості діють на бокову поверхню тіла, сили лобового опору – на поверхню тіла, на яку набігає потік рідини. Критерієм того, яка сила відіграє основну роль, є швидкість потоку. В умовах даної лабораторної роботи (малі швидкості) силою лобового опору можна знехтувати.

### 3 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

Одним із методів визначення коефіцієнта динамічної в'язкості  $\eta$  є метод Стокса, що ґрунтується на вимірюванні швидкості рівномірного руху тіла сферичної форми (кульки) в досліджуваній рідині.

У випадку невеликих швидкостей (коли потік ламінарний) за законом Стокса сила в'язкості рідини  $F$  (на основі формули 2.3) пропорційна коефіцієнту в'язкості  $\eta$ , радіусу кульки  $r$  і швидкості її руху  $\vartheta$ :

$$F = 6\pi\eta r\vartheta. \quad (3.1)$$

Розглянемо падіння кульки в нерухомій рідині. На кульку діють три сили (рис. 3.1): сила тяжіння  $\vec{P}$ , виштовхувальна (архімедова) сила  $\vec{F}_A$  та сила в'язкості (внутрішнього тертя)  $\vec{F}$ , спрямована проти руху кульки. Спочатку тіло рухається рівноприскорено, однак зі збільшенням швидкості сила в'язкості збільшується, тому настає рівновага сил (див. рис. 3.1):

$$P = F + F_A. \quad (3.2)$$

Виштовхувальна сила визначається виразом:

$$F_A = m_p g = V\rho_p g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p g, \quad (3.3)$$

де  $m_p$  - маса рідини в об'ємі кульки;  $\rho_p$  - густина рідини;  $V$  - об'єм кульки;  $g$  - прискорення вільного падіння.

Вага кульки визначається виразом:

$$P = m_k g = V\rho_k g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g, \quad (3.4)$$

де  $\rho_k$  - густина кульки. Підставляючи вирази для сил (3.1), (3.3) та (3.4) у формулу (3.2), отримуємо:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g = 6\pi\eta r\vartheta + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p g, \quad (3.5)$$

звідки коефіцієнт в'язкості

$$\eta = \frac{2r^2(\rho_k - \rho_p)g}{9\vartheta}. \quad (3.6)$$

Формула Стокса (3.1) та формула (3.6) справджуються для випадку, коли кулька рухається рівномірно, без обертання, при відсутності турбулентності, в однорідній рідині, що має необмежену протяжність у всіх напрямках.

У даній роботі падіння кульки відбувається в довгій циліндричній посудині з внутрішнім радіусом  $R$ . З поправкою на вплив стінок циліндра формула (3.6) набуває вигляду:

$$\eta = \frac{2r^2(\rho_k - \rho_p)g}{9\vartheta(1 + 2,4\frac{r}{R})}. \quad (3.7)$$

Прилад для визначення коефіцієнта в'язкості складається з довгої циліндричної трубки, заповненої рідиною; на трубці є дві мітки – А та В (рис. 3.1). Верхня мітка розміщена на такій відстані від рівня рідини, щоб кулька, пройшовши цю відстань, вже рухалась рівномірно. На відстані  $l_{AB}$  між мітками А та В кулька матиме швидкість рівномірного руху:

$$\vartheta = \frac{l_{AB}}{t}, \quad (3.8)$$

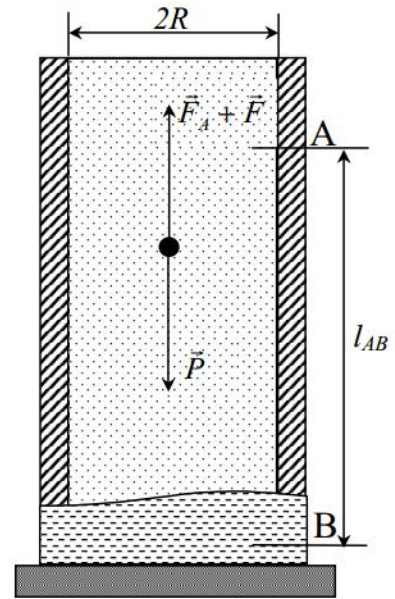


Рисунок 3.1

де  $t$  – час руху кульки між мітками.

Підставляючи (3.6) в (3.5) та враховуючи, що в досліді будуть вимірюватися діаметр кульки  $d$  та внутрішній діаметр  $D$  циліндричної трубки, отримуємо розрахункову формулу:

$$\eta = \frac{1}{18} \frac{d^2 (\rho_k - \rho_p) g t}{l_{AB} (1 + 2,4 \frac{d}{D})} \quad (3.9)$$

#### 4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 4.1 Мікрометром 3 рази виміряти діаметр кульки  $d$  та обчислити його середнє значення.
- 4.2 Штангенциркулем виміряти внутрішній діаметр скляної трубки  $D$ .
- 4.3 Штангенциркулем виміряти відстань  $l_{AB}$  між мітками на трубці.
- 4.4 Опустити кульку в рідину; при проходженні кулькою мітки А ввімкнути секундомір. При проходженні кулькою мітки В, вимкнути секундомір. Визначити час падіння кульки між мітками.
- 4.5 За таблицями встановити густини кульки  $\rho_k$  та рідини  $\rho_p$ .
- 4.6 Визначити значення коефіцієнта в'язкості за формулою (3.9).
- 4.7 Дані вимірювань та розраховані величини записати в таблицю 4.1.

**Таблиця 4.1**

№ п/п	$d$ , $10^{-3}$ м	$\Delta d$ , $10^{-3}$ м	$\rho_k$ , $10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\Delta \rho_k$ , $10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\rho_p$ , $10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\Delta \rho_p$ , $10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$t$ , с	$\Delta t$ , с	$D$ , $10^{-3}$ м	$\Delta D$ , $10^{-3}$ м
1			////	////	////	////	////	////		
2										
3										
С.з.										

**Продовження таблиці 4.1**

№ п/п	$l_{AB}$ , $10^{-2}$ м	$\Delta l_{AB}$ , $10^{-2}$ м	$g$ , м/с <sup>2</sup>	$\eta$ , Па·с	$\Delta \eta$ , Па·с	$\varepsilon$ , %
1						
2	////	////	////	////	////	////
3						
С.з.						

- 4.8 Оцінити відносну та абсолютну похибки обчислень.
- 4.9 Результат роботи подати у вигляді  $\eta = \eta_c \pm \Delta \eta_c$ , вказавши також величину  $\varepsilon$ .

#### 5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 5.1 Сформулювати закон Ньютона для сили в'язкого тертя.
- 5.2 Розкрити фізичний зміст коефіцієнта в'язкості, вказати одиниці його вимірювання.
- 5.3 Сформулювати закон Стокса для сили в'язкості.

- 5.4 Які сили діють на тіло при його русі в рідині? Які умови рівномірного руху тіла в рідині?
- 5.5 При яких умовах формули (3.1) та (3.6) справджуються?
- 5.6 Чому необхідно, щоб кульки мали діаметр значно менший, ніж внутрішній діаметр циліндричної посудини?
- 5.7 Вивести формули для розрахунку похибок.

## **6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ**

- 6.1 Чому коефіцієнт в'язкості більш в'язких рідин можна виміряти методом Стокса з більшою точністю, ніж коефіцієнт в'язкості менш в'язких рідин?
- 6.2 Оцінити максимальну швидкість дощової краплі з діаметром  $d$ , якщо відома динамічна в'язкість повітря.
- 6.3 Чи збільшиться точність визначення коефіцієнта в'язкості, якщо для досліду брати кульку з меншим діаметром?

## Лабораторна робота № 12

### ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ДИНАМІЧНОЇ В'ЯЗКОСТІ РІДИНИ КАПІЛЯРНИМ ВІСКОЗИМЕТРОМ

**Мета роботи:** засвоїти основні поняття механіки рідин. Визначити коефіцієнт в'язкості рідини, використовуючи капілярний віскозиметр.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Термостат.
2. Капілярний віскозиметр.
3. Термометр.
4. Секундомір.
5. Дистильована вода.
6. Досліджувана рідина.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 *В'язкістю* називають властивість рідини або газу чинити опір при відносному переміщенні їхніх шарів. При вивченні руху рідин або газів спостерігається два види їхнього руху. Якщо шари рідини ковзають один відносно одного не змішуючись, то течія називається *ламінарною* (ламінарна течія є стаціонарною). При збільшенні швидкості потоку може початися перемішування шарів і відбутися перехід до *турбулентної* течії. В турбулентній течії швидкості частинок в даній точці простору не мають певного значення, можна говорити лише про середні значення швидкості. Внаслідок перемішування шарів рідини середня швидкість майже незмінна вздовж перерізу труби; градієнт швидкості дуже малий, за виключенням шару, що прилягає до труби. Характерною ознакою турбулентного руху є *вихори* – ділянки, на яких частинки рідини рухаються по замкнених траєкторіях. Утворення вихорів є проявом в'язкості на границях розділення рідини і твердого тіла.

Рейнольдс встановив, що характер течії в трубі – ламінарний чи турбулентний, залежить від значення безрозмірної величини – числа Рейнольдса  $Re = \frac{\rho g D}{\eta}$ , де  $\rho$  - густина рідини,  $g$  - середня (у перерізі труби) швидкість потоку,  $D$  – діаметр труби,  $\eta$  - в'язкість рідини.

При малих значеннях  $Re$  протікання рідини є ламінарним, а при великих – турбулентним. Значення числа Рейнольдса, при якому відбувається перехід від ламінарної течії до турбулентної, називається критичним ( $Re_{кр.}$ ). На досліді встановлено, що для руху рідини (і газів) по трубах  $Re_{кр} = \frac{\rho g_{кр} D}{\eta} = 2300$ ; тут  $g_{кр}$  – критична швидкість – швидкість, при якій відбувається перехід від ламінарної течії до турбулентної. Остання формула дозволяє знайти значення швидкості, вище якої течія рідини стає турбулентною. В даній лабораторній роботі течія рідини є ламінарною.

2.2 Уявно потік рідини можна поділити на нескінченну кількість шарів. При відносному переміщенні на кожен з шарів діє сила тертя (рис.2.1). Величина цієї сили (сили в'язкості) визначається законом Ньютона:

$$F = \eta S \left| \frac{\Delta g}{\Delta z} \right|, \quad (2.1)$$

де  $\eta$  - коефіцієнт динамічної в'язкості або коефіцієнт внутрішнього тертя;  $S$  - площа поверхні шару рідини;  $\left| \frac{\Delta g}{\Delta z} \right|$  - величина, що показує, наскільки швидко змінюється швидкість течії у напрямі, перпендикулярному до напрямку руху рідини.

Використовуючи (2.1), маємо

$$\eta = \frac{F}{\left| \frac{\Delta g}{\Delta z} \right| S}. \quad (2.2)$$

Коефіцієнт в'язкості чисельно дорівнює силі тертя, що діє на одиницю поверхні шару газу (рідини), якщо зміна швидкості в перпендикулярному до руху напрямку рівна 1м/с на 1 м. У системі СІ одиницею вимірювання в'язкості є:

$$[\eta] = \frac{1 \text{ Н}}{1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1 \text{ м}^2} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

(також для вимірювання в'язкості використовують допоміжну одиницю

$$1 \text{ пуаз} = 10^{-1} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

на честь французького фізика Пуазейля.

2.3 Коефіцієнт в'язкості рідини залежить від складу рідини, тиску, температури. Залежність від температури дається формулою:

$$\eta(t) = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2}, \quad (2.3)$$

де  $\eta_0$  - коефіцієнт в'язкості при 0°C;  $t$  - температура;  $a, b$  - константи, що залежать від виду рідини.

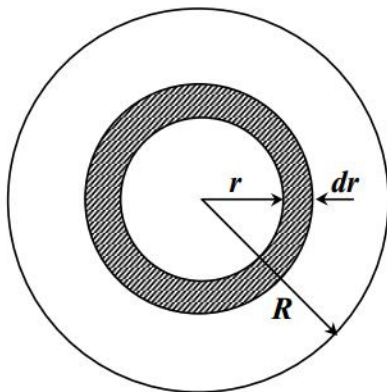


Рисунок 2.2

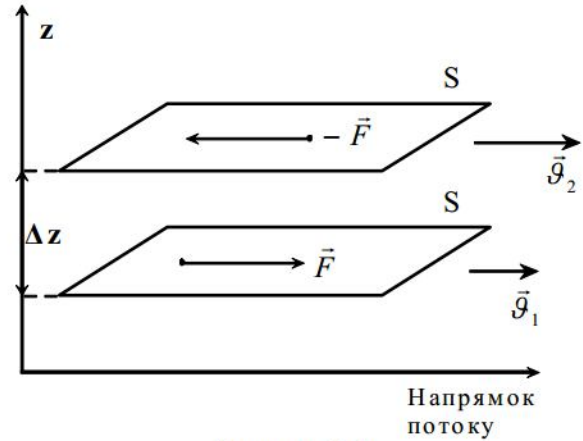


Рисунок 2.1

2.4 Для визначення коефіцієнта в'язкості застосовують різні методи, два з яких базуються на законах Стокса і Пуазейля.

Якщо тіло рухається в рідині, воно покривається тонким шаром рідини і тертя виникає між шарами рідини, а не між тілом і рідиною. За законом Стокса сила в'язкості рідини  $F$  пропорційна коефіцієнту в'язкості  $\eta$ , радіусу кульки  $r$  і швидкості її руху  $g$ :

$$F = 6\pi\eta r g. \quad (2.4)$$

Інший метод, запропонований Пуазейлем, буде використаний у цій роботі.

Розглянемо стаціонарний потік рідини у

горизонтальній трубці сталого перерізу, радіус якої  $R$ . Знайдемо об'єм рідини  $V$ , що протікає через поперечний переріз труби за проміжок часу  $t$ .

Уявно поперечний переріз труби поділимо на концентричні кільця, ширина яких  $dr$  (рис 2.2). Площа кільця  $dS = 2\pi r dr$ . За час  $t$  через таке кільце протікає об'єм рідини

$$dV = g t dS = g t 2\pi r dr. \quad (2.5)$$

У потоках реальних рідин поблизу змочуваних твердих тіл різні шари мають неоднакову швидкість. Швидкість шару, який безпосередньо торкається твердого тіла, дорівнює нулю; при віддаленні від поверхні твердого тіла швидкість шарів збільшується. При русі рідини в круглій трубці гідродинаміка дає для швидкості протікання рідини наступну залежність від відстані  $r$  до центру труби:

$$g = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2), \quad (2.6)$$

де  $\Delta p$  - різниця тисків на кінцях труби;  $\eta$  - коефіцієнт в'язкості;  $l$  - довжина труби.

Підставимо (2.6) в (2.5):

$$dV = \frac{\Delta p}{2\eta l} \pi t (R^2 - r^2) r dr. \quad (2.7)$$

Проінтегрувавши останній вираз (2.7), одержимо:

$$V = \frac{\Delta p}{2\eta l} \pi t \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\Delta p}{2\eta l} \pi t \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \text{ або } V = \frac{\Delta p}{8\eta l} \pi t R^4. \quad (2.8)$$

Якщо рідина витікає під дією власної ваги, то різниця тисків дорівнює гідростатичному тиску стовпа рідини:

$$\Delta p = \rho g h, \quad (2.9)$$

де  $\rho$  - густина рідини,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $h$  - висота рідини в капілярі.

Таким чином:

$$V = \frac{\rho g h \pi R^4}{8\eta l}. \quad (2.10)$$

Рівняння (2.10) справджується для ламінарної течії рідини при значному часі протікання. Вимірявши в процесі досліду об'єм рідини, що витікла, а також інші величини, можна з формули (2.10) знайти коефіцієнт в'язкості  $\eta$ .

### 3 ОПИС ДОСЛІДНОЇ УСТАНОВКИ ТА МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Метод Пуазейля спрощується, коли вимірювати коефіцієнт в'язкості рідини відносним способом. При цьому досить виміряти час протікання однакового об'єму різних рідин через той самий капіляр та взяти відношення відповідних рівностей за законом Пуазейля (2.10):

$$V = \frac{\pi R^4 \rho_1 g h t_1}{8\eta_1 l}; \quad V = \frac{\pi R^4 \rho_2 g h t_2}{8\eta_2 l}, \quad (3.1)$$

де  $\rho_1, \rho_2$  - густини еталонної та досліджуваної рідин;  $t_1, t_2$  - час витікання еталонної та досліджуваної рідин;  $\eta_1, \eta_2$  - коефіцієнт в'язкості еталонної та досліджуваної рідин.

Поділивши в (3.1) одне рівняння на друге, отримуємо розрахункову формулу:

$$\eta_2 = \eta_1 \frac{t_2 \rho_2}{t_1 \rho_1}. \quad (3.2)$$

Для визначення коефіцієнта в'язкості в даній роботі використовується капілярний віскозиметр, який являє собою U-подібну скляну трубку, коліно якої АВ закінчується розширенням В. Друге коліно складається з капіляра С, з'єднаного з колбою D (рис 3.1). Знизу та зверху колби D знаходяться мітки  $L_1$  та  $L_2$ , що визначають об'єм рідини, час витікання якої вимірюється на досліді.

Віскозиметр, а також термометр Т, закріплений на штативі, поміщають у посудину з водою G (термостат). Всмоктування води в капіляр здійснюється з допомогою насоса, з'єднаного через буферну посудину P з віскозиметром. Буферна посудина захищає насос від попадання в нього рідини і забезпечує плавне всмоктування.

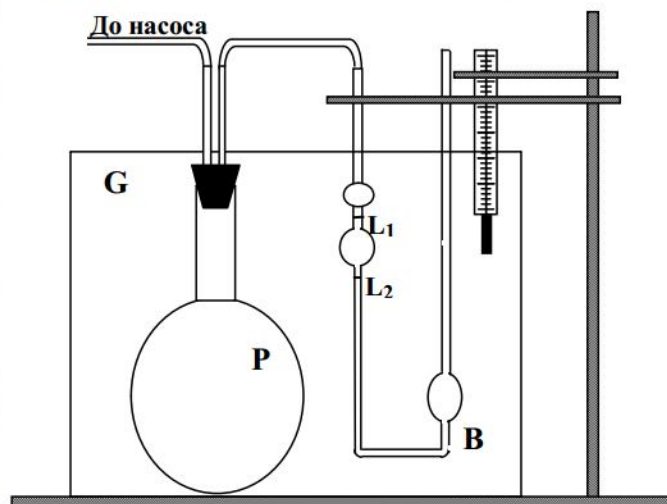


Рисунок 3.1

#### 4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 4.1 Вийняти віскозиметр з термостата, промити кілька разів рідиною, з якою буде проводитися дослід, і закріпити в штативі у вертикальному положенні.
- 4.2 Опустити віскозиметр в термостат з водою (рівень води в термостаті не повинен перевищувати мітки  $L_1$ ).
- 4.3 В широке коліно віскозиметра налити рідину, якою промитий віскозиметр (рівень рідини не повинен бути вищим розширення В).
- 4.4 З допомогою насоса втягувати рідину в колбочку D через капіляр С.
- 4.5 Коли рідина підніметься на 1-2 см вище мітки  $L_1$ , припинити втягування рідини насосом: рідина почне опускатися.
- 4.6 При проходженні рівня рідини через мітку  $L_1$  включити секундомір, через мітку  $L_2$  – виключити.
- 4.7 Проробити пункти 4.3-4.6 для даної рідини ще два рази; розрахувати середнє значення часу протікання рідини, що знаходиться в об'ємі між мітками  $L_1$  та  $L_2$  через капіляр С.
- 4.8 Вилити рідину з віскозиметра і промити його другою дослідною рідиною.
- 4.9 Залити другу дослідну рідину і проробити аналогічні досліди за пунктами 4.3-4.7.
- 4.10 З допомогою термометра, закріпленого в штативі, визначити температуру води в термостаті.
- 4.11 Визначити за таблицями  $\eta_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  при температурі досліду.
- 4.12 Розрахувати середнє значення  $\eta_2$ , підставляючи у формулу (3.2) середні значення  $t_1$  і  $t_2$ , знайдені величини  $\eta_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ .
- 4.13 Дані вимірювань та обчислень записати в таблицю 4.1.

**Таблиця 4.1**

№ п/п	$\eta_1,$ $10^{-3}$ Па·с	$\Delta\eta_1,$ $10^{-3}$ Па·с	$t_1,$ с	$\Delta t_1,$ с	$t_2,$ с	$\Delta t_2,$ с	$\rho_1,$ $10^3$ $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\Delta\rho_1,$ $10^3$ $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\rho_2,$ $10^3$ $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\Delta\rho_2,$ $10^3$ $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\eta_2,$ $10^{-3}$ Па·с	$\Delta\eta_2,$ $10^{-3}$ Па·с	$\varepsilon,$ %
1													
2													
3													
с.з.													

4.14 Оцінити відносну та абсолютну похибки обчислень.

4.15 Результат роботи подати у вигляді  $\eta_2 = \eta_{2c} \pm \Delta\eta_{2c}$ , вказавши також величину  $\varepsilon$ .

## 5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 5.1 Дати означення ламінарного та турбулентного потоків.
- 5.2 Що таке число Рейнольдса?
- 5.3 Сформулювати закон Ньютона для в'язкості.
- 5.4 Розкрити фізичний зміст коефіцієнта в'язкості, вказати одиниці вимірювання.
- 5.5 Сформулювати та пояснити закон Стокса для в'язкості.
- 5.6 Пояснити формулу Пуазейля.
- 5.7 Вивести формули для розрахунку похибок.

## 6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 6.1 Розрахувати критичну швидкість для води і розчину спирту в даній лабораторній роботі (використовуючи поняття числа Рейнольдса).
- 6.2 Оцінити величину числа Рейнольдса при умовах даного досліду.
- 6.3 Отримати формулу для розподілу швидкості потоку рідини у перерізі трубки у вигляді  $\vartheta = \vartheta_0 f\left(\frac{r}{R}\right)$  (скористатися формулою (2.6)). Результат зобразити графічно.
- 6.4 Об'єм рідини, що протікає через поперечний переріз трубки за одиницю часу, можна задати у формі  $V = \vartheta_{cp} S$ . Користуючись формулою (2.8), отримати вираз для середньої швидкості потоку рідини  $\vartheta_{cp}$ .

## Лабораторна робота № 13

### ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОЇ ДОВЖИНИ ВІЛЬНОГО ПРОБІГУ І ЕФЕКТИВНОГО ДІАМЕТРА МОЛЕКУЛ ПОВІТРЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ВНУТРІШНЬОГО ТЕРТЯ

**Мета роботи:** ознайомитися з поняттями середньої довжини вільного пробігу і ефективного діаметра молекул. Визначити ці величини для молекул повітря, використовуючи коефіцієнт внутрішнього тертя.

#### 1 ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ

1. Посудина з краном у нижній частині.
2. Капіляр.
3. Мензурка.
4. Секундомір.
5. Термометр.
6. Барометр.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 В реальних умовах молекули газу, внаслідок численних зіткнень між собою, рухаються по складних траєкторіях. Природно говорити про *середню довжину вільного пробігу* молекул – середню відстань, яку проходить молекула між двома послідовними зіткненнями.

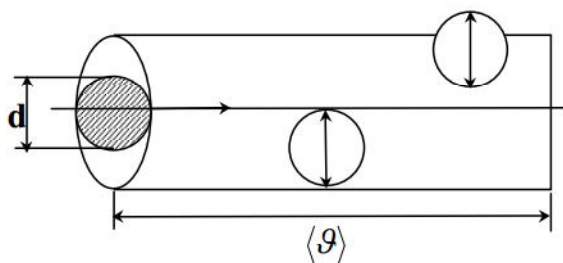


Рисунок 2.1

циліндра з площею основи  $\pi d^2$  та висотою  $\langle g \rangle$  (рис. 2.1).

Об'єм такого циліндра

$$V = \pi d^2 \langle g \rangle. \quad (2.1)$$

Середнє число зіткнень молекул за одиницю часу  $\langle z \rangle$  дорівнює числу молекул газу в об'ємі циліндра:

$$\langle z \rangle = Vn = \pi d^2 \langle g \rangle n, \quad (2.2)$$

де  $n$  – число молекул в одиниці об'єму.

При виведенні формули (2.2) вважалося, що всі молекули, крім тієї, що розглядається, перебувають у стані спокою; врахування їх руху призводить до поправки  $\sqrt{2}$ . Тоді:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2\pi d^2 n} \langle g \rangle. \quad (2.3)$$

Для величини вільного пробігу  $\langle l \rangle$  одержимо:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle g \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}}. \quad (2.4)$$

2.2 Середня довжина вільного пробігу молекул пов'язана з коефіцієнтом динамічної в'язкості газу. Внутрішнє тертя (в'язкість) є особливістю поведінки реальних газів (рідин). Як явище, воно обумовлене переносом імпульсу тепловим рухом мікрочастинок у газі з неоднорідним розподілом швидкостей.

Згідно з законом Ньютона величина сили внутрішнього тертя (в'язкості) між рухомими шарами рідини або газу задається виразом:

$$F = \eta S \frac{d\vartheta}{dn}, \quad (2.5)$$

де  $\eta$  - коефіцієнт динамічної в'язкості або коефіцієнт внутрішнього тертя;  $S$  - площа поверхні шару рідини,  $\frac{d\vartheta}{dn}$  - характеризує зміну швидкості на одиницю довжини в напрямі, перпендикулярному до напрямку швидкості. Сила внутрішнього тертя має напрям, протилежний до напрямку руху шару, що розглядається.

З цієї формули можна встановити фізичний зміст коефіцієнта в'язкості:

$$\eta = \frac{F}{\frac{d\vartheta}{dn} S}. \quad (2.6)$$

*Коефіцієнт в'язкості* чисельно дорівнює силі тертя, що діє на одиницю поверхні шару газу (рідини), якщо зміна швидкості в перпендикулярному до руху напрямку рівна 1 м/с на 1 м. В системі СІ одиницею вимірювання в'язкості є:

$$[\eta] = \frac{1 \text{ Н}}{1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1 \text{ м}^2} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$$

(також для вимірювання в'язкості використовують допоміжну одиницю

$$1 \text{ пуаз} = 10^{-1} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

на честь французького фізика Пуазейля).

### 3 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ ФОРМУЛ

3.1 Молекулярно-кінетична теорія ідеальних газів встановлює зв'язок коефіцієнта в'язкості  $\eta$  з середньою довжиною вільного пробігу молекули  $\langle l \rangle$ :

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle l \rangle \langle g \rangle, \quad (3.1)$$

$\rho$  - густина газу,  $\langle g \rangle$  - середня арифметична швидкість молекул газу.

Відомо, що середня арифметична швидкість молекул ідеального газу  $\langle g \rangle$  в молекулярно-кінетичній теорії визначається виразом:

$$\langle g \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad (3.2)$$

де  $R$  - універсальна газова стала;  $\mu$  - молярна маса повітря.

Густина газу (залежна від зовнішніх умов) визначається формулою (отриманою з рівняння Менделєєва-Клапейрона):

$$\rho = \frac{\mu p}{RT}, \quad (3.3)$$

де  $p$  – зовнішній тиск;  $T$  – абсолютна температура.

Підставляючи (3.2) та (3.3) у (3.1) для середньої довжини вільного пробігу молекули, отримуємо:

$$\langle l \rangle = \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}}. \quad (3.4)$$

Для визначення коефіцієнта в'язкості в даній роботі скористаємося методом витікання рідини чи газу через капілярну трубку – методом Пуазейля.

3.2. У згоді із законом Пуазейля (детальне виведення формули Пуазейля наведене в лабораторній роботі № 16) об'єм газу, що протікає через капілярну трубку, прямо пропорційний діаметру капіляра в четвертій степені  $d^4$ , різниці тисків на кінцях капіляра  $\Delta p$ , часу  $t$  і обернено пропорційний довжині капіляра  $L$ :

$$V = \frac{\pi d^4 \Delta p t}{128 L \eta}. \quad (3.5)$$

З останнього рівняння для коефіцієнта в'язкості отримуємо:

$$\eta = \frac{\pi d^4 \Delta p t}{128 L V}. \quad (3.6)$$

Усі величини, що входять у формулу (3.5), можуть бути визначені експериментально. На основі знайденого коефіцієнта в'язкості також можна розрахувати середню довжину вільного пробігу молекул  $\langle l \rangle$  за формулою (3.4).

3.3. Ефективним діаметром називають найменшу віддаль між центрами двох молекул при їх зіткненні. Ефективний діаметр молекули на основі розрахованої середньої довжини вільного пробігу молекул можна знайти з формули (2.4):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle l \rangle n}}. \quad (3.7)$$

З використанням основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії число молекул  $n$  в одиниці об'єму визначається формулою:

$$n = \frac{p}{kT}, \quad (3.8)$$

де  $k$  – стала Больцмана,  $p$ ,  $T$  – тиск і температура в умовах дослідів.

Таким чином, для ефективного діаметра молекули отримуємо формулу:

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2\pi} \langle l \rangle p}}. \quad (3.9)$$

Формули (3.4), (3.6) та (3.9) є розрахунковими формулами даної роботи.

## 4 ОПИС ДОСЛІДНОЇ УСТАНОВКИ

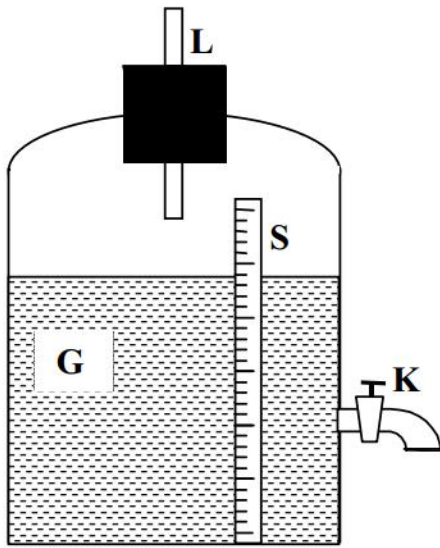


Рисунок 4.1

Установка для роботи являє собою посудину G з краном K (рис. 4.1). Рівень води (дистильованої) в посудині не повинен бути вищим від шкали S. Через корок у посудину вставлено капіляр L, довжина і радіус якого відомі. Кінчик капіляра повинен бути над водою. Отвір крана K повинен мати переріз більший, ніж переріз капіляра.

Коли кран K закритий, то тиск повітря над рідиною всередині посудини G дорівнює атмосферному (внаслідок з'єднання посудини з атмосферою через капіляр L). При відкриванні крана K почнеться витікання води під дією гідростатичного тиску води, що знаходиться над рівнем крана. Воно відбуватиметься доти, поки сумарний тиск газу та рідини всередині посудини на рівні отвору не зрівняється з атмосферним тиском:

$$p_1 + \rho_p g h_1 = p_{\text{атм}},$$

де  $p_1$  - тиск газу всередині посудини;  $\rho_p$  - густина рідини;  $h_1$  - висота стовпа рідини в даний момент часу;  $g$  - прискорення вільного падіння.

При цьому на кінцях капіляра встановиться різниця тисків  $\Delta p = p_{\text{атм}} - p_1 = \rho_p g h_1$ , яка зумовить протікання повітря через капіляр у посудину. Ця різниця тисків з плином часу змінюється, оскільки зменшується висота стовпа рідини. Так як площа перерізу посудини A велика, а об'єм рідини, що витікає, порівняно малий, то зміна висоти стовпа рідини буде незначною і зміна тиску буде малою. Тому у формулі (3.6) замість  $\Delta p$  необхідно взяти середню різницю тисків на кінцях капіляра на початку та в кінці досліду, тобто:

$$\Delta p = \rho_p g \frac{h_1 + h_2}{2}. \quad (4.1)$$

Об'єм повітря  $V$ , що протікає через капіляр, буде дорівнювати об'єму води, котра витікає через кран K у мензурку.

## 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 5.1 Відкрити кран K. У момент, коли вода почне витікати серіями крапель, підставити мензурку та одночасно включити секундомір і зазначити висоту рівня води  $h_1$  на шкалі S.
- 5.2 Коли в мензурці буде заданий керівником занят об'єм води (70-100 см<sup>3</sup>), зупинити секундомір, визначити час витікання рідини, відмітити рівень води в посудині  $h_2$  на шкалі S.
- 5.3 За таблицями визначити густину рідини  $\rho_p$  при температурі досліду (температуру навколишнього середовища  $T$  визначити з допомогою термометра) та розрахувати  $\Delta p$  за формулою (4.1).

- 5.4 Записавши значення діаметра та довжини капіляра, за формулою (3.6) визначити коефіцієнт внутрішнього тертя.
- 5.5 Визначити атмосферний тиск  $p$  і за формулою (3.4) розрахувати  $\langle l \rangle$ .
- 5.6 За формулою (3.9) визначити ефективний діаметр молекул  $\sigma$ .
- 5.7 Результати вимірювань та обчислень занести в таблицю 5.1. Порівняти отримані значення середньої довжини вільного пробігу та ефективного діаметра молекул із значеннями у довіднику.

**Таблиця 5.1**

$R=8,314$ Дж/моль·К
$\mu=0,029$ кг/моль
$k=1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

$d,$ $10^{-3}$ м	$L,$ $10^{-2}$ м	$V,$ $10^{-6}$ м <sup>3</sup>	$t,$ с	$h_1,$ $10^{-2}$ м	$h_2,$ $10^{-2}$ м	$\Delta p,$ Па	$\eta,$ $10^{-5}$ Па·с	$p,$ $10^5$ Па	$T,$ К	$\langle l \rangle,$ $10^{-7}$ м	$\sigma,$ $10^{-9}$ м

## 6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 6.1 Означити середню довжину вільного пробігу молекул, ефективний діаметр молекул.
- 6.2 Сформулювати закон Ньютона для в'язкого тертя.
- 6.3 Означити фізичний зміст коефіцієнта в'язкості.
- 6.4 Як в молекулярно-кінетичній теорії газів пов'язані середня довжина вільного пробігу та коефіцієнт в'язкості?
- 6.5 Як пов'язані середня довжина вільного пробігу та тиск у випадку сталої температури?
- 6.6 Чому коефіцієнт внутрішнього тертя рідин з температурою зменшується, а в газах зростає?
- 6.7 Пояснити розрахункові формули для  $\eta$ ,  $\langle l \rangle$ ,  $\sigma$ .

## 7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 7.1 Отримати формулу для середньої довжини вільного пробігу молекули.
- 7.2 Показати, що середня арифметична швидкість молекул ідеального газу визначається формулою (3.2).
- 7.3 Отримати вираз (3.3) для густини газу.
- 7.4 Вивести формулу Пуазейля (3.5).

## Лабораторна робота № 14

### ВИВЧЕННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ ТА ЗАКОНІВ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ. ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОШЕННЯ ТЕПЛОЄМНОСТЕЙ $C_p/C_v$ ДЛЯ ПОВІТРЯ

**Мета роботи:** засвоїти основні поняття молекулярної фізики і термодинаміки. Визначити дослідним шляхом відношення теплоємностей  $C_p/C_v$  для повітря.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Скляний балон.
2. Манометр.
3. Насос.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

##### 2.1 Рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона)

Рівняння, яке пов'язує параметри газу в рівноважному стані, називається рівнянням стану газу. Ідеальним називається газ, молекули якого можна вважати матеріальними точками, що взаємодіють між собою та зі стінками посудини лише через пружні зіткнення. Рівняння стану ідеального газу –

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (2.1)$$

де  $p$  – тиск, який чинить газ на стінки посудини, в якій він знаходиться (вимірюється в паскалях,  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ),  $V$  – об'єм посудини (в метрах кубічних),  $m$  – маса газу (в кілограмах),  $\mu$  – маса одного моля газу (вимірюється в кілограмах на моль – кг/моль),  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$  – універсальна газова стала,  $T$  – абсолютна температура (вимірюється в кельвінах – К).

Якщо газ переходить із одного стану ( $p_1, V_1, T_1$ ) в інший ( $p_2, V_2, T_2$ ) при сталій температурі ( $T_1 = T_2$ ) – процес ізотермний, то

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (pV = \text{const}).$$

Крива, що описує зв'язок між  $p$  і  $V$  при  $T = \text{const}$  називається ізотермою.

При зміні стану газу за умови  $V_1 = V_2$  маємо ізохорний процес:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

За умови  $p_1 = p_2$  (процес ізобарний):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Важливу роль у фізиці відіграють так звані адіабатні процеси, які також відносяться до ізопроесів. Зв'язки між термодинамічними параметрами  $p, V, T$  при адіабатних процесах будуть встановлені далі.

##### 2.2 Внутрішня енергія ідеального газу

Внутрішньою енергією газу називають сукупну енергію теплових рухів молекул газу та енергію їх взаємодії між собою. Внутрішня енергія одного моля ідеального газу

визначається як добуток середньої кінетичної енергії молекули  $\langle \varepsilon_k \rangle$  на число Авогадро  $N_A$ :

$$U = \langle \varepsilon_k \rangle N_A;$$

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

де  $i$  – число ступенів вільності молекули ( $i=3$  для одноатомної молекули,  $i=5$  для двоатомної молекули,  $i=6$  для молекул з трьох (і більше) атомів).

Для довільної маси газу  $m$ , молярна маса якого  $\mu$ , внутрішня енергія

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT. \quad (2.2)$$

### 2.3 Перший закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки – закон збереження енергії в найбільш загальній формі, застосовний, зокрема, і до розгляду теплових процесів.

В диференціальній формі перший закон термодинаміки –

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (2.3)$$

де  $\delta Q$  – нескінченно мала кількість теплоти, якою система обмінюється з зовнішнім середовищем,  $dU$  – зміна внутрішньої енергії системи,  $\delta A$  – нескінченно мала робота, виконана системою. Під теплою розуміють енергію, що передається в процесі теплообміну у формі теплових (невпорядкованих) рухів атомів та молекул. Різні способи написання нескінченно малих величин  $\delta Q$ ,  $\delta A$  та  $dU$  зумовлені тим, що  $dU$  має зміст зміни внутрішньої енергії,  $\delta Q$  і  $\delta A$  не мають подібного змісту (термін “зміна теплоти”, “зміна роботи” позбавлені сенсу); з математичної точки зору  $dU$  – повний диференціал,  $\delta Q$  і  $\delta A$  не є повними диференціалами.

Величина  $\delta A$  може бути записана так:

$$\delta A = pdV$$

(добуток тиску на нескінченно малу зміну об’єму системи). Якщо зміна об’єму скінченна, то при цьому робота, що виконується системою:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (2.4)$$

В інтегральній формі перший закон термодинаміки має вигляд:

$$Q = \Delta U + A, \quad (2.5)$$

де  $Q$  – кількість теплоти, якою система обмінюється з зовнішнім середовищем,  $\Delta U$  – зміна внутрішньої енергії,  $A$  – робота, виконана системою. У формулі (2.5) величини  $Q$ ,  $\Delta U$ ,  $A$  можуть бути як додатні, так і від’ємні. Якщо  $Q > 0$ , – теплота надається системі, якщо  $Q < 0$ , – теплота віддається системою.  $A > 0$  при збільшенні об’єму системи (робота виконується системою) і  $A < 0$ , якщо об’єм системи зменшується (робота виконується над системою).

### 2.4 Застосування першого закону термодинаміки до розгляду ізопроцесів в ідеальних газах

Для ідеального газу

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT,$$

або

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T,$$

де

$$C_V = \frac{i}{2} R \quad (2.6)$$

стала для даного газу величина, фізичний зміст якої буде з'ясований далі; таким чином:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT.$$

Оскільки  $\delta A = pdV$ , то перший закон термодинаміки для ідеального газу можна записати так:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV. \quad (2.7)$$

Застосуємо (2.7) для опису ізопроеесів в ідеальних газах.

1. Ізотермний процес ( $T = const$ ). У цьому випадку  $dT=0$ , отже  $dU=0$ , і

$$\delta Q = pdV,$$

або (коли системі надана, або системою віддана скінченна кількість теплоти  $Q$ )

$$Q = A$$

( $A$  визначається виразом (2.4)), тобто вся підведена до системи теплота або віддана системою теплота визначається відповідною роботою. Можна показати, що:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

( $p_1, V_1$  – початкові тиск і об'єм,  $p_2, V_2$  – кінцеві тиск і об'єм).

2. Ізохорний процес ( $V = const$ ). Оскільки  $\delta A = pdV$ , а  $dV=0$ , то  $\delta A=0$ , і

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT.$$

Якщо температура змінюється на скінченну величину (від  $T_1$  до  $T_2$ ) за рахунок скінченної теплоти  $Q$ , то

$$Q = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$$

або

$$Q = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T. \quad (2.8)$$

3. Ізобарний процес ( $p = const$ ). Скористаємося рівнянням стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

і надамо першому закону термодинаміки (2.7) такого вигляду:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu} R dT$$

(використано, що при  $p = const$   $pdV = \frac{m}{\mu} R dT$ ). Перейдемо тепер до скінченної зміни температури (від  $T_1$  до  $T_2$ ). Маємо:

$$Q = \frac{m}{\mu} (C_V + R) \Delta T,$$

де  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Введемо позначення:

$$C_p = C_V + R. \quad (2.9)$$

Тоді

$$Q = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T. \quad (2.10)$$

### 2.5 Молярні та питомі теплоємності ідеального газу

Повернемося до першого закону термодинаміки для ізохорного процесу (формула (2.8)):

$$Q = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

Величина  $C_V$  (означено виразом (2.6)) – важлива фізична величина, - молярна теплоємність за сталого об'єму, фізичний зміст якої видно із виразу

$$C_V = \frac{Q}{\frac{m}{\mu} \Delta T};$$

молярна теплоємність за сталого об'єму  $C_V$  визначається кількістю теплоти, яку необхідно надати 1 молю ідеального газу для нагрівання його за сталого об'єму на 1 К. Одиниця вимірювання – 1 Дж/(моль·К).

Подібно до цього при ізобарному процесі (формула (2.10)) вводиться поняття молярної теплоємності за сталого тиску  $C_p$ :

$$C_p = \frac{Q}{\frac{m}{\mu} \Delta T}; \quad (2.11)$$

молярна теплоємність за сталого тиску – це кількість теплоти, яку необхідно надати 1 молю ідеального газу для нагрівання його за сталого тиску на 1 К.

Між  $C_V$  і  $C_p$  існує зв'язок (2.9) – рівняння Майєра. Конкретизуємо вираз (2.9) для  $C_p$ , скориставшись виразом для  $C_V$  через кількість ступенів вільності (формула (2.4)). Маємо:

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R.$$

Питомі теплоємності  $c_V, c_p$  вводяться за формулами:

$$c_V = \frac{C_V}{\mu}, \quad c_p = \frac{C_p}{\mu}.$$

Одиниця вимірювання питомих теплоємностей 1 Дж/(кг·К).

При вивченні теплових процесів важливим є відношення  $C_p/C_V$  (або  $c_p/c_V$ ). Із попереднього розгляду видно, що це відношення  $\gamma$  визначається кількістю ступенів вільності молекул газу, що розглядається (кількістю атомів у молекулі):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{i+2}{2} R}{\frac{i}{2} R} = \frac{i+2}{i}.$$

### 2.6 Адіабатний процес

Адіабатний процес – процес, який проходить без теплообміну між термодинамічною системою і середовищем (приклад: дуже швидке розширення газу). Означенням адіабатного процесу є

$$\delta Q = 0, \quad \text{або } Q = 0 \quad (\text{але не } Q = \text{const}).$$

Перший закон термодинаміки для адіабатного процесу:

$$dU + pdV = 0, \quad (2.12)$$

або

$$\frac{m}{\mu} C_V dT + p dV = 0.$$

Встановимо важливий зв'язок між тиском і об'ємом при адіабатному процесі. Для цього виключимо із останнього рівняння  $dT$  за допомогою рівняння стану ідеального газу. Диференціювання останнього дає:

$$p dV + V dp = \frac{m}{\mu} R dT.$$

Підстановка  $dT$  в рівняння (2.12) приводить до диференціального рівняння (опрацювання цього рівняння є завданням для самостійної роботи), з якого випливає, що при адіабатному процесі

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma), \quad (2.13)$$

де

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}.$$

(2.13) – рівняння Пуассона.

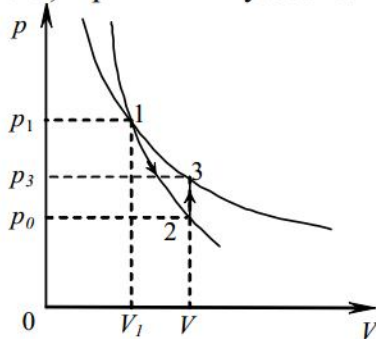


Рисунок 2.1

Якщо скористатися рівнянням стану ідеального газу, то можна отримати також, що

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}).$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const} \quad (T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}).$$

Крива, яка описує зв'язок між  $p$  і  $V$  при адіабатному процесі, називається адіабатою (крива, що описує зв'язок між  $p$  і  $V$  при  $T=\text{const}$ , - ізотерна). На рис. 2.1 наведені для порівняння ізотерна ( $pV=\text{const}$ , крива 1-3) і адіабата ( $pV^\gamma = \text{const}$ , крива 1-2). Відмінності у поведінці кривих зумовлені тим, що відношення  $C_p/C_V > 1$ .

### 3 ОПИС УСТАНОВКИ ТА ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

Мета нашої роботи – визначення відношення  $C_p/C_V$  експериментальним шляхом. Для цього скористаємось методом Клемана-Дезорма.

Прилад складається з балона А, з'єднаного з U-подібним манометром М (рис. 3.1). За допомогою крана К балон може бути під'єднаний до насоса або сполучений з навколишнім середовищем (атмосферою). На початку досліду тиск у балоні з допомогою крана К зрівнюють з атмосферним  $p_0$  (при цьому рідина в колінах манометра знаходиться на одному рівні). Накачуванням у посудину повітря за допомогою насоса тиск у посудині можна підвищити (з'являється різниця рівнів рідини в колінах манометра). При швидкому накачуванні процес стискання повітря можна вважати адіабатним. При цьому температура повітря в балоні підвищиться. Оскільки стінки балона є теплопровідними,

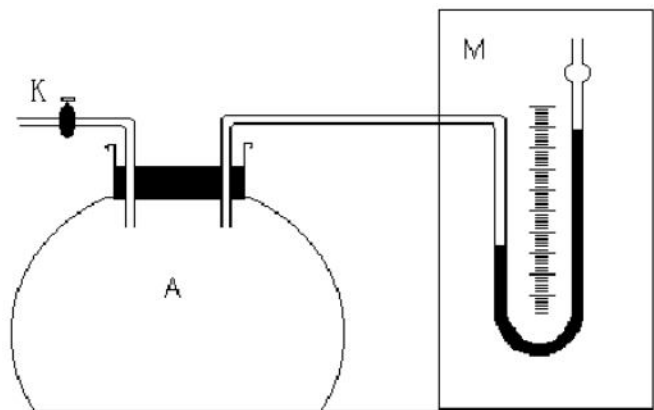


Рисунок 3.1

то після припинення накачування повітря в балоні почне охолоджуватись до температури навколишнього середовища  $T_1$ . Після закінчення процесу вирівнювання температур у манометричній трубці встановиться різниця рівнів  $h_1$ . Прийmemo даний стан газу в балоні за перший, який буде характеризуватись параметрами  $T_1$  і  $p_1$  (див. рис. 2.1), де:

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1. \quad (3.1)$$

( $\rho$  - густина рідини, яка заповнює манометричну трубку).

Швидко відкриємо кран К: повітря, виходячи з балона, буде розширюватись адіабатно (крива 1-2 на рис. 2.1). Після цього в балоні встановиться тиск  $p_2$ , що дорівнює атмосферному тиску  $p_0$  і температура  $T_2 < T_1$ . Прийmemo цей стан газу за другий.

Перехід від першого стану до другого описується рівнянням Пуассона:

$$p_1^{\gamma-1}/T_1^{\gamma} = p_0^{\gamma-1}/T_2^{\gamma}. \quad (3.2)$$

Одразу після встановлення однакових рівнів в обох колінах манометра (тиск у балоні дорівнює атмосферному) знову закриємо кран К. Газ у балоні буде ізохорно нагріватись (відрізок 2-3 на рис. 2.1) до температури навколишнього середовища  $T_1$ , при цьому тиск у балоні підвищиться (як наслідок, знову виникне різниця рівнів рідини в колінах манометра) і матиме значення:

$$p_3 = p_0 + \rho g h_2, \quad (3.3)$$

де  $h_2$  – різниця рівнів рідини в манометрі. Цей стан газу з параметрами  $T_1$  і  $p_3$  вважатимемо третім.

Перехід від другого стану до третього описується рівнянням:

$$p_3/p_0 = T_1/T_2. \quad (3.4)$$

З урахуванням (3.1) рівняння (3.2) перепишемо у вигляді:

$$[(p_0 + \rho g h_1)/p_0]^{\gamma-1} = (T_1/T_2)^{\gamma}, \quad (3.5)$$

або

$$(1 + \rho g h_1/p_0)^{\gamma-1} = [1 + (T_1 - T_2)/T_2]^{\gamma}. \quad (3.6)$$

Прологарифмуємо рівняння (3.6). Враховуючи, що  $\rho g h_1/p_0 \ll 1$  і  $(T_1 - T_2)/T_2 \ll 1$ , використаємо наближену рівність  $\ln(1+x) \approx x$ . Таким чином, маємо:

$$(\gamma-1)\rho g h_1/p_0 = \gamma(T_1 - T_2)/T_2, \quad (3.7)$$

звідки:

$$p_0(T_1 - T_2)/T_2 = \rho g h_1(\gamma-1)/\gamma. \quad (3.8)$$

З врахуванням (3.3) рівняння (3.4) перепишемо у вигляді:

$$(p_0 + \rho g h_2)/p_0 = T_1/T_2, \quad (3.9)$$

звідки:

$$\rho g h_2 = p_0(T_1 - T_2)/T_2. \quad (3.10)$$

З рівнянь (3.8) і (3.9) маємо:

$$h_1(\gamma-1)/\gamma = h_2, \quad (3.11)$$

або

$$\gamma = h_1/(h_1 - h_2). \quad (3.12)$$

Формула (3.12) є розрахунковою формулою даної роботи.

#### 4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 4.1 Відкрити кран К, щоб рівні рідини в манометричній трубці М вирівнялись.
- 4.2 Сполучити балон з насосом і повернути кран К так, щоб можна було подавати повітря в балон за допомогою насоса.
- 4.3 Швидко напompувати повітря в балон, щоб різниця рівнів у трубках досягла 18-20 см.

- 4.4 Закрити кран К і дочекатися, поки різниця рівнів у манометрі перестане змінюватися (це вказує на вирівнювання температур у балоні і навколишньому середовищі). Визначити різницю рівнів рідини в манометричних трубках  $h_1$ .
- 4.5 Відкрити кран К, щоб рівні рідини в манометричних трубках зрівнялися, і швидко закрити кран.
- 4.6 Почекати 2-3 хв., поки повітря в балоні нагріється до кімнатної температури, при цьому рівні рідини в манометричних трубках перестануть змінюватися. Визначити різницю рівнів в колінах манометра  $h_2$ .
- 4.7 Дослід повторити 5 разів.
- 4.8 Визначити середнє значення  $\gamma$  за формулою (3.12) та оцінити абсолютну і відносну похибки.
- 4.9 Результат роботи подати у вигляді  $\gamma = \gamma_c \pm \Delta\gamma_c$ , вказуючи також величину відносної похибки  $\varepsilon$ .
- 4.10 Результати роботи записати в таблицю 4.1.

**Таблиця 4.1**

№ п/п	$h_1$ , $10^{-2}$ м	$h_2$ , $10^{-2}$ м	$\gamma$	$\Delta\gamma$	$\varepsilon$ , %
1					
2					
3					
4					
5					
с.з.					

## 5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 5.1 Яка відмінність між питомою та молярною теплоємностями?
- 5.2 Який фізичний зміст  $C_V$  та  $C_p$ ?
- 5.3 Чому  $C_V$  менше, ніж  $C_p$ ?
- 5.4 Записати рівняння Менделєєва-Клапейрона.
- 5.5 Охарактеризувати ізопроцеси в газах.
- 5.6 Що таке адіабатний процес? Записати рівняння Пуассона.
- 5.7 Сформулювати перший закон термодинаміки. Дати його запис для ізопроцесів та адіабатного процесу.
- 5.8 Вивести формули для розрахунку похибок.

## 6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 6.1 Підстановкою перевірити, що вираз (2.13) з урахуванням виразу для внутрішньої енергії ідеального газу є розв'язком рівняння (2.12).
- 6.2 Отримати форми запису рівняння Пуассона (2.13) в змінних  $(T, V)$  та  $(T, p)$  за допомогою рівняння Менделєєва-Клапейрона.
- 6.3 Теоретично розрахувати  $C_p/C_V$  для повітря.

## Лабораторна робота № 15

### ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ РІДИНИ МЕТОДОМ ПОРІВНЯННЯ КРАПЕЛЬ

**Мета роботи:** ознайомитися з явищем поверхневого натягу. Визначити коефіцієнт поверхневого натягу досліджуваної рідини методом порівняння крапель.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:

1. Бюретка з краном.
2. Досліджувана рідина.
3. Дистильована вода.
4. Мензурка для крапель.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Молекули рідини, розміщені в поверхневому шарі, перебувають у інших умовах порівняно з тими молекулами, що знаходяться в об'ємі рідини (рис. 2.1). Будь-яка молекула всередині рідини оточена іншими молекулами і зазнає симетричної дії притягання сусідніх молекул. Зважаючи на однорідність об'єму рідини, сили молекулярної взаємодії по всіх напрямках будуть зрівноважені. На молекулу, що знаходиться в поверхневому шарі, діятимуть сили притягання з боку молекул рідини  $\vec{F}_1$  та молекул насиченої пари  $\vec{F}_2$ . Оскільки молекули насиченої пари знаходяться на значній віддалі одна від одної і від поверхневого шару, то  $\vec{F}_1 \gg \vec{F}_2$ . Рівнодійна цих сил (пропорційна різниці сил молекулярного притягання  $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ ) спрямована всередину рідини, тому поверхневий шар тисне з певною силою на рідину, створюючи в ній додатковий тиск.

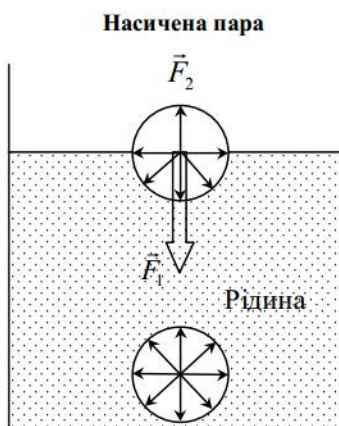


Рисунок 2.1

Енергія молекул поверхневого шару відмінна від енергії молекул в об'ємі рідини. Різницю між потенціальними енергіями молекул усередині рідини та молекул поверхневого шару називають поверхневою

енергією.

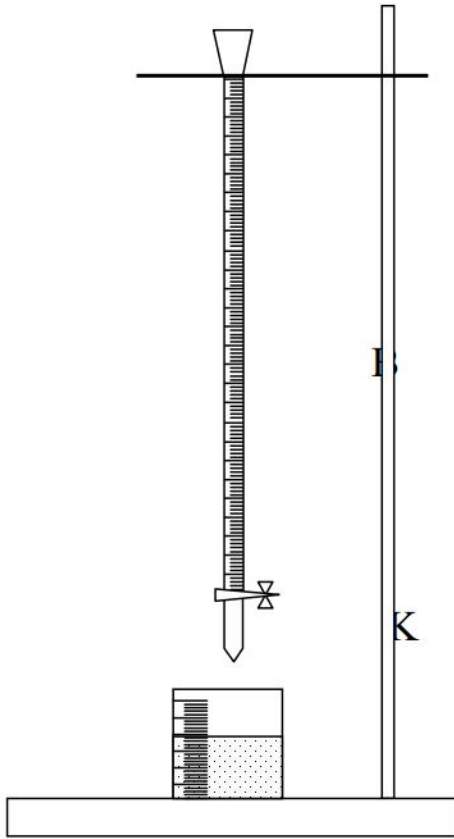
Оскільки число молекул на поверхні рідини пропорційне площі вільної поверхні, то будь-яке збільшення поверхні рідини  $\Delta S$  веде до виконання роботи  $\Delta A$  по переміщенню молекул зсередини рідини на поверхню:

$$\Delta A = \alpha \Delta S. \quad (2.1)$$

Таким чином, мірою поверхневого натягу є коефіцієнт поверхневого натягу

$$\alpha = \frac{\Delta A}{\Delta S}. \quad (2.2)$$

Коефіцієнтом поверхневого натягу (поверхневим натягом) є величина, чисельно рівна роботі, яку потрібно виконати для збільшення площі вільної поверхні рідини на одиницю. На основі (2.2) розмірність  $[\alpha] = 1 \text{ Дж/м}^2$ .



2.2 Поряд із запропонованим способом коефіцієнт поверхневого натягу можна означити на основі іншого підходу. Оскільки в стані стійкої рівноваги надлишкова поверхнева потенціальна енергія повинна бути мінімальною, то рідина, внаслідок її нестисливості, прагне набрати форму з мінімальною площею поверхні (при відсутності дії інших сил рідина набуде форми кулі). Таким чином виникають сили поверхневого натягу, котрі зумовлюють тенденцію рідини зменшувати свою поверхню.

Сила поверхневого натягу на певному контурі поверхневої плівки завжди перпендикулярна до лінії контура і дотична до поверхні рідини. Величина цієї сили пропорційна довжині контура:

$$\Delta F = \alpha \Delta l . \quad (2.3)$$

Тоді коефіцієнтом поверхневого натягу (поверхневим натягом)  $\alpha$  називають величину, яка чисельно рівна відношенню сили  $\Delta F$ , що діє на ділянку контура поверхні рідини, до довжини  $\Delta l$  цієї ділянки:

$$\alpha = \frac{\Delta F}{\Delta l} . \quad (2.4)$$

Поклавши в (2.4)  $\Delta F=1$  Н,  $\Delta l=1$  м, одержимо одиницю вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу в системі SI:  $[\alpha] = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

Кожна рідина характеризується певним значенням коефіцієнта поверхневого натягу, що залежить від її хімічного складу. Коефіцієнт поверхневого натягу зменшується із збільшенням температури і при певному її критичному значенні стає рівним нулю. На величину  $\alpha$  суттєво впливає наявність у рідині поверхнево-активних речовин (наприклад, мила, розчиненого у воді).

### 3 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

Для визначення коефіцієнта поверхневого натягу в даній роботі використовується метод порівняння крапель. Нехай рідина повільно витікає з вертикальної бюретки В з краном К (рис. 3.1). Поверхневий натяг не дозволяє рідині відразу вилитись з трубки і вона витікає краплями. При витіканні рідини поверхнева плівка краплі утворює звуження або шийку (див. рис. 3.2), яка розривається, коли вага краплі стає рівною силі поверхневого натягу  $F$ :

$$mg = F . \quad (3.1)$$

Оскільки  $F = \alpha L$ , де  $L$  - довжина контура в шийці краплі, що приблизно дорівнює довжині кола обводу кінчика бюретки:

$$L = 2\pi R , \quad (3.2)$$

де  $R$  - радіус кінчика бюретки.

Тоді

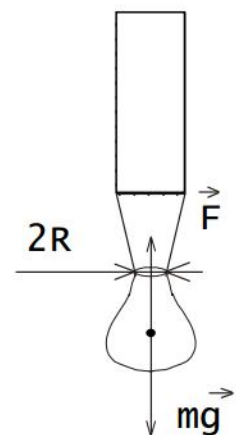


Рисунок 3.2

$$F = 2\pi R\alpha . \quad (3.3)$$

Вага краплі визначається виразом:

$$mg = \rho V_x g , \quad (3.4)$$

де  $V_x$  - об'єм однієї краплі,  $\rho$  – густина рідини; прирівнюючи праві частини виразів (3.3) і (3.4), одержуємо:

$$2\pi R\alpha = \rho V_x g . \quad (3.5)$$

При витіканні дистильованої води можна записати:

$$2\pi R_1\alpha_1 = \rho_1 V_{x1} g . \quad (3.6)$$

Відповідно для досліджуваної рідини маємо:

$$2\pi R_2\alpha_2 = \rho_2 V_{x2} g . \quad (3.7)$$

Оскільки рідини витікають з однієї бюретки,  $R_1=R_2$ ; поділимо рівняння (3.6) на рівняння (3.7):

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{V_{x1}\rho_1}{V_{x2}\rho_2} . \quad (3.8)$$

Оскільки в цій формулі маємо відношення об'ємів  $V_{x1}$ ,  $V_{x2}$  крапель, його можна замінити відношенням об'ємів  $V_1$ ,  $V_2$  заданої кількості крапель двох рідин  $V_{x1}/V_{x2} = V_1/V_2$  .

У підсумку маємо:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{V_2\rho_2}{V_1\rho_1} . \quad (3.9)$$

Остання формула є розрахунковою для даної лабораторної роботи.

#### 4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 4.1 Визначити ціну поділки бюретки в м<sup>3</sup>.
- 4.2 Налити в бюретку В дистильовану воду, з допомогою крана К домогтися витікання води краплями. Тричі провести вимірювання об'єму заданої викладачем кількості  $n$  крапель рідини  $V_1$ .
- 4.3 Промити бюретку досліджуваною рідиною. Виконуючи послідовність дій п.2, визначити об'єм  $n$  крапель досліджуваної рідини  $V_2$ .
- 4.4 Знаючи температуру в лабораторії, визначити за таблицями густина води  $\rho_1$ , густина досліджуваної рідини  $\rho_2$ , коефіцієнт поверхневого натягу води  $\alpha_1$ .
- 4.5 Розрахувати значення коефіцієнта поверхневого натягу досліджуваної рідини  $\alpha_2$  за розрахунковою формулою (3.9).
- 4.6 Оцінити абсолютну та відносну похибки.
- 4.7 Результат роботи подати у вигляді  $\alpha_2 = \alpha_{2c} \pm \Delta\alpha_{2c}$ , вказавши також величину  $\varepsilon$ .
- 4.8 Дані лабораторної роботи записати в таблицю 4.1.

**Таблиця 4.1**

№ п/п	$\alpha_1, 10^{-3}$ Н/м	$\Delta\alpha_1, 10^{-3}$ Н/м	$V_1, 10^{-6}$ м <sup>3</sup>	$\Delta V_1, 10^{-6}$ м <sup>3</sup>	$\rho_1, \text{кг/м}^3$	$\Delta \rho_1, \text{кг/м}^3$	$V_2, 10^{-6}$ м <sup>3</sup>	$\Delta V_2, 10^{-6}$ м <sup>3</sup>	$\rho_2, \text{кг/м}^3$	$\Delta \rho_2, \text{кг/м}^3$	$\alpha_2, 10^{-3}$ Н/м	$\Delta\alpha_2, 10^{-3}$ Н/м	$\varepsilon, \%$
1	///	///			///	///			///	///	///	///	///
2													
3													
с.з.													

### 5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

- 5.1 Пояснити причину виникнення сил поверхневого натягу. Що таке поверхнева енергія?
- 5.2 Дати означення коефіцієнта поверхневого натягу (на основі енергетичного та силового підходів), вказати його розмірність.
- 5.3 Як спрямована сила поверхневого натягу?
- 5.4 Чому при відсутності зовнішніх сил крапля рідини набуває сферичної форми?
- 5.5 Перерахувати явища, пов'язані з поверхневим натягом, і способи визначення коефіцієнта поверхневого натягу.
- 5.6 Вивести формули для розрахунку похибок.

### 6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 6.1 Оцінити середній діаметр краплі та кількість молекул у цій краплі (на основі поняття числа Авогадро).
- 6.2 Якої форми набуває поверхня рідини між двома близько розташованими вертикальними пластинами; в тонкій трубці (капілярі)?
- 6.3 Пояснити механізм піднімання рідини в капілярі.

## Лабораторна робота № 16

### ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ РІДИНИ МЕТОДОМ ВІДРИВУ КІЛЬЦЯ

**Мета роботи:** ознайомитися з явищем поверхневого натягу. Визначити коефіцієнт поверхневого натягу досліджуваної рідини методом відриву кільця.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:

1. Пружинні терези.
2. Комплект тягарців.
3. Штангенциркуль.
4. Посудина для рідини.
5. Кільце.
6. Досліджувана рідина.
7. Столик на підставці.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Замкнута система рідина - насичена пара при сталій температурі перебуває у термодинамічній рівновазі: швидкість випаровування з одиниці поверхні рідини дорівнює швидкості конденсації. Однак існування вільної поверхні на межі фаз є причиною особливого типу явищ, так званих поверхневих явищ.

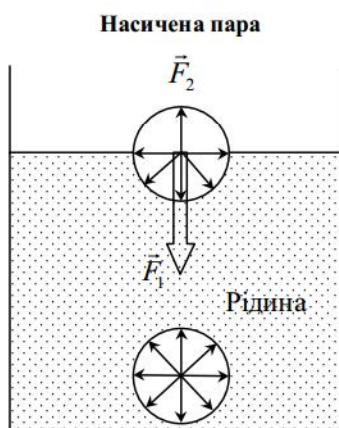


Рисунок 2.1

Молекули рідини, розміщені в поверхневому шарі, перебувають у інших умовах порівняно з тими молекулами, що знаходяться в об'ємі рідини (рис. 2.1). Будь-яка молекула всередині рідини оточена іншими молекулами і зазнає симетричної дії притягання сусідніх молекул. Зважаючи на однорідність об'єму рідини, сили молекулярної взаємодії по всіх напрямках будуть зрівноважені. На молекулу, що знаходиться в поверхневому шарі, діятимуть сили притягання з боку молекул рідини  $\vec{F}_1$  та молекул насиченої пари  $\vec{F}_2$ . Оскільки молекули насиченої пари знаходяться на значній віддалі одна від одної і від поверхневого шару, то  $\vec{F}_1 \gg \vec{F}_2$ . Рівнодійна цих сил (пропорційна різниці

сил молекулярного притягання  $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ ) спрямована всередину рідини, тому поверхневий шар тисне з певною силою на рідину, створюючи в ній додатковий тиск.

Енергія молекул поверхневого шару відмінна від енергії молекул в об'ємі рідини. Різницю між потенціальними енергіями молекул усередині рідини та молекул поверхневого шару називають поверхневою енергією.

Оскільки число молекул на поверхні рідини пропорційне площі вільної поверхні, то будь-яке збільшення поверхні рідини  $\Delta S$  веде до виконання роботи  $\Delta A$  по переміщенню молекул зсередини рідини на поверхню:

$$\Delta A = \alpha \Delta S. \quad (2.1)$$

Таким чином, мірою поверхневого натягу є коефіцієнт поверхневого натягу

$$\alpha = \frac{\Delta A}{\Delta S}. \quad (2.2)$$

Коефіцієнтом поверхневого натягу (поверхневим натягом) є величина, чисельно рівна роботі, яку потрібно виконати для збільшення площі вільної поверхні рідини на одиницю. На основі (2.2) розмірність  $[\alpha]=1 \text{ Дж/м}^2$ .

2.2 Поряд із запропонованим способом коефіцієнт поверхневого натягу можна означити на основі іншого підходу. Оскільки в стані стійкої рівноваги надлишкова поверхнева потенціальна енергія повинна бути мінімальною, то рідина, внаслідок її нестисливості, прагне набрати форму з мінімальною площею поверхні (при відсутності дії інших сил рідина набуде форми кулі). Таким чином виникають сили поверхневого натягу, котрі зумовлюють тенденцію рідини зменшувати свою поверхню.

Сила поверхневого натягу на певному контурі поверхневої плівки завжди перпендикулярна до лінії контура і дотична до поверхні рідини. Величина цієї сили пропорційна довжині контура:

$$\Delta F = \alpha \Delta l. \quad (2.3)$$

Тоді коефіцієнтом поверхневого натягу (поверхневим натягом)  $\alpha$  називають величину, що чисельно рівна відношенню сили  $\Delta F$ , що діє на ділянку контура поверхні рідини, до довжини  $\Delta l$  цієї ділянки:

$$\alpha = \frac{\Delta F}{\Delta l}. \quad (2.4)$$

Поклавши в (2.4)  $\Delta F=1 \text{ Н}$ ,  $\Delta l=1 \text{ м}$ , дістанемо одиницю вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу в системі SI:  $[\alpha]=1 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

Кожна рідина характеризується певним значенням коефіцієнта поверхневого натягу, що залежить від її хімічного складу. Коефіцієнт поверхневого натягу зменшується із збільшенням температури і при певному її критичному значенні стає рівним нулю. На величину  $\alpha$  суттєво впливає наявність у рідині поверхнево-активних речовин (наприклад, мила, розчиненого у воді).

### 3 ОПИС ДОСЛІДНОЇ УСТАНОВКИ

Суть методу відриву кільця полягає у визначенні сили, необхідної для відриву кільця, змоченого рідиною, від поверхні рідини. Установка (рис. 3.1) складається із столика 1, що може підніматися та опускатися. На столик встановлена посудина 2 з досліджуваною рідиною. На пружині 3 підвішене кільце 4, при опусканні якого пружина розтягується. Розтяг пружини визначається по шкалі 5 з допомогою стрілки-вказівника 6.

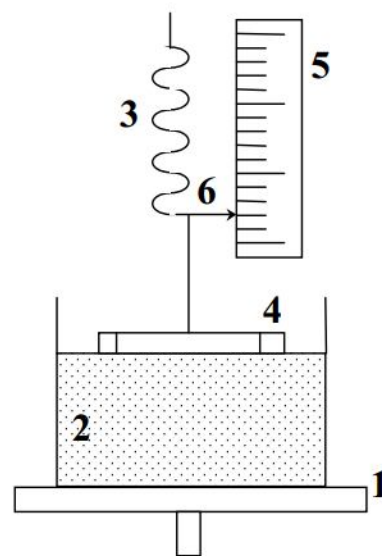


Рисунок 3.1

### 4 ВИВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ФОРМУЛИ

Якщо підвішене на пружині кільце опустити так, щоб воно доторкнулося до поверхні рідини, то силою поверхневого натягу воно буде утримуватися в контакті з рідиною. При

опусканні столика, на якому стоїть посудина, пружина розтягується, і в момент, коли сила пружності пружини дорівнюватиме силі поверхневого натягу, кільце відривається від поверхні рідини.

Враховуючи, що рідина утворює плівку з внутрішнього та зовнішнього боків кільця, можемо для сили поверхневого натягу  $F$  записати:

$$F = \alpha \pi d + \alpha \pi d_1, \quad (4.1)$$

де  $d$  - зовнішній діаметр кільця;  $d_1$  – внутрішній діаметр кільця.

Внутрішній діаметр кільця визначається за формулою:

$$d_1 = d - 2h, \quad (4.2)$$

де  $h$  – товщина кільця.

Таким чином,

$$F = 2\pi\alpha(d - h), \quad (4.3)$$

а для коефіцієнта поверхневого натягу остаточно отримуємо:

$$\alpha = \frac{F}{2\pi(d - h)}. \quad (4.4)$$

## 5 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

- 5.1 Встановити на столику посудину з досліджуваною рідиною.
- 5.2 Виміряти штангенциркулем 3 рази зовнішній діаметр кільця  $d$  та його товщину  $h$ , визначити їх середні значення.
- 5.3 Підвісити кільце до пружини і встановити його горизонтально (паралельно до поверхні рідини).
- 5.4 Підняти столик так, яке б поверхня кільця доторкнулася до рідини; зафіксувати по міліметровій шкалі початкове положення вказівника пружини.
- 5.5 Повільно опускаючи столик, зафіксувати на міліметровій шкалі величину розтягу пружини в момент відриву кільця.
- 5.6 Опустити столик повністю, витерти кільце і навантажити чашку кільця тягарцями так, щоб вказівник зайняв положення, яке б відповідало моменту відриву кільця.
- 5.7 Зняти тягарці і визначити їх вагу, котра дорівнює силі поверхневого натягу  $F$ .
- 5.8 Пункти 5.5 - 5.7 повторити ще два рази і визначити середні значення  $F$ .
- 5.9 Визначити за розрахунковою формулою (4.4) коефіцієнт поверхневого натягу.
- 5.10 Оцінити відносну та абсолютну похибки.
- 5.11 Результат роботи подати у вигляді  $\alpha = \alpha_c \pm \Delta\alpha_c$ , вказавши також величину  $\varepsilon$ .
- 5.12 Результати записати у таблицю 5.1.

**Таблиця 5.1**

№ п/п	$F$ , $10^{-3}$ Н	$\Delta F$ , $10^{-3}$ Н	$d$ , $10^{-3}$ м	$\Delta d$ , $10^{-3}$ м	$h$ , $10^{-3}$ м	$\Delta h$ , $10^{-3}$ м	$\alpha$ , $10^{-3}$ Н/м	$\Delta\alpha$ , $10^{-3}$ Н/м	$\varepsilon$ , %
1									
2									
3									
с.з.									

## **6 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ**

- 6.1 Пояснити природу сил поверхневого натягу.
- 6.2 Що таке поверхнева енергія? Який її фізичний зміст?
- 6.3 Розкрити фізичний зміст коефіцієнта поверхневого натягу, записати одиниці його вимірювання.
- 6.4 Описати сили, що діють на кільце в момент відриву від рідини.
- 6.5 Вивести формули для розрахунку похибок.

## **7 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ**

- 7.1 Розрахувати коефіцієнт поверхневого натягу, якщо в експерименті буде використовуватися не кільце, а прямокутна тонка рамка зі сторонами  $a$  та  $b$ .
- 7.2 Запропонувати спосіб визначення коефіцієнта поверхневого натягу, що базується на використанні калібрувального графіка пружини.
- 7.3 Пояснити механізм піднімання рідини в капілярі.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №17

### ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО КОЕФІЦІЄНТА ЛІНІЙНОГО РОЗШИРЕННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ

**Мета роботи:** визначити дослідним шляхом температурні коефіцієнти лінійного розширення стержнів з різних металів.

#### 1 ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ

1. Нагрівник.
2. Скляна пробірка.
3. Індикатор видовження.
4. Металеві стержні.
5. Штангенциркуль.
6. Термометр.

#### 2 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Більшість твердих тіл при нагріванні розширюються, це явище називається тепловим розширенням. Теплове розширення пояснюється молекулярно-кінетичною теорією будови речовини, згідно з якою потенціальна енергія  $U(x)$  частинки речовини (іона, атома, молекули), в околі положення рівноваги, має формальний вигляд:

$$U(x) = ax^2 - bx^3 + \dots, \quad (2.1)$$

де  $a, b, \dots$  - константи, які відображають особливості будови і взаємодії частинок речовини,  $x=R-R_0$  - задає відхилення іона від положення рівноваги. Характерний графік

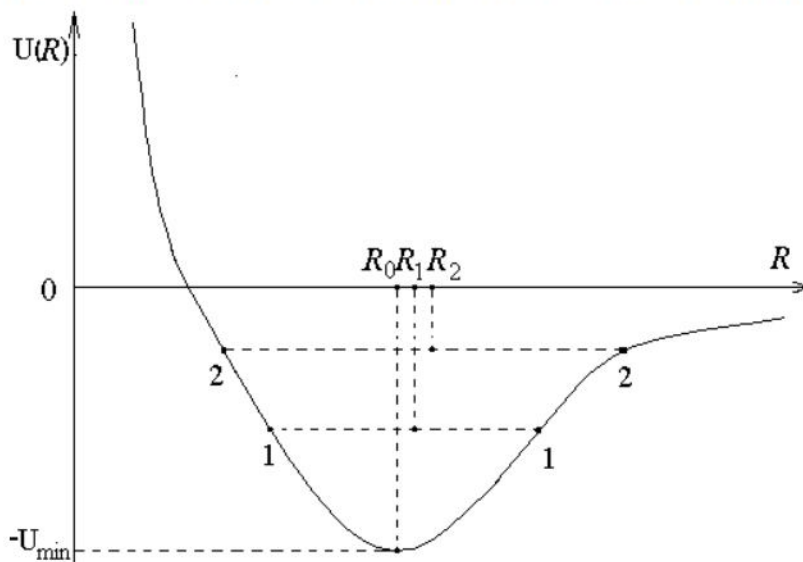


Рисунок 2.1

залежності енергії взаємодії іонів  $U(R)$  від віддалі між ними, показаний на рис. 2.1. При абсолютному нулі температур тепловий рух відсутній і частинка знаходиться в положенні рівноваги  $R_0$ , що відповідає мінімуму потенціальної енергії  $U_{min}$ . При температурі  $T_1 > 0$  частинка здійснює коливальні рухи між крайніми положеннями, які позначені на графіку потенціальної енергії точками 1. Середня відстань між іонами тепер відповідає середині цього

відрізка. Внаслідок асиметричності кривої потенціальної енергії середнє положення іона під час коливань переміститься вправо до точки  $R_1 > R_0$ . При температурі  $T_2 > T_1$  енергія коливального руху частинок збільшується і середнє положення частинки буде визначатися точкою  $R_2 > R_1 > R_0$ . Встановлено, що середнє зміщення частинок  $\langle \Delta x \rangle$  при

нагріванні пропорційне до температури  $T$ . Таким чином, внаслідок збільшення середньої відстані між частинками при нагріванні тіло розширюється.

Відзначимо також, що сумарна сила, яка діє на окрему частинку з боку інших (сусідніх) частинок,

$$F_x = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -2ax + 3bx^2 + \dots \quad (2.2)$$

не є квазіпружною, тому й коливання під дією цієї сили є ангармонічними. Якщо врахувати в (2.2) лише перший доданок, то отримаємо, що  $F_x$  є квазіпружною силою, а коливання частинок під дією цієї сили є гармонічними (отже, теплове розширення в цьому випадку відсутнє).

2.2 При зміні температури твердих тіл їх розміри змінюються, причому в широкому інтервалі температур зміна розмірів тіл прямо пропорційна зміні температури. Залежність лінійних розмірів твердого тіла від температури в широкому інтервалі температур задається формулою:

$$l = l_0(1 + \alpha t), \quad (2.3)$$

де  $l_0$  – довжина тіла при  $0^\circ\text{C}$ ,  $t$  – температура по шкалі Цельсія,  $l$  – довжина тіла при температурі  $t$ ,  $\alpha$  – температурний коефіцієнт лінійного розширення.

Температурним коефіцієнтом лінійного розширення  $\alpha$  називається відносна зміна лінійних розмірів тіла  $\Delta l/l_1$  при зміні його температури на один кельвін:

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_1 \Delta T} = \frac{\Delta l}{l_1 \Delta t}, \quad (2.4)$$

де  $\Delta l = l_2 - l_1$  – абсолютна зміна лінійних розмірів тіла при зміні температури від значення  $t_1$  до  $t_2$  ( $l_1$  та  $l_2$  – лінійні розміри тіла при температурі  $t_1$  і  $t_2$  відповідно),  $\Delta T = \Delta t = t_2 - t_1$  (зауважимо, що  $1^\circ\text{C} = 1\text{K}$ ). Оскільки температурний коефіцієнт лінійного розширення залежить від температури, при якій проводиться вимірювання, формула (2.4) визначає тільки середнє значення температурного коефіцієнта лінійного розширення для інтервалу температур  $\Delta T$ . Одиницею вимірювання температурного коефіцієнта лінійного розширення є  $1\text{K}^{-1}$ .

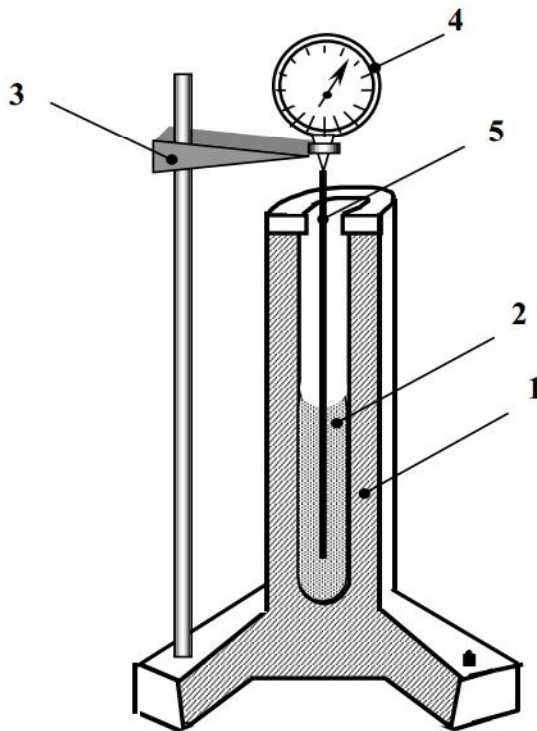


Рисунок 3.1

### 3 ОПИС ПРИБАДУ

Прилад (рис. 3.1) складається з нагрівника 1, в якому можна розмістити скляну пробірку 2 з металевим стержнем 5. На корпусі приладу встановлена стійка з крон-штейном 3 для індикатора видовження 4.

### 4 ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

4.1 За допомогою штангенциркуля виміряти початкову довжину досліджуваного стержня  $l_1$  (стержні для досліду вказує викладач).

- 4.2 Налити воду в пробірку (2/3 об'єму пробірки) і визначити її температуру  $t_1$  з допомогою термометра.
- 4.3 Досліджуваний стержень помістити (заокругленим кінцем вниз) у пробірку з водою. Пробірку зі стержнем помістити в нагрівник.
- 4.4 Встановити індикатор у кронштейн і опустити шток індикатора в заглиблення на торці стержня. Зафіксувати індикатор у кронштейні за допомогою гвинта.
- 4.5 Виставити стрілку індикатора на нуль, повертаючи шкалу. Ввімкнути нагрівник (при нагріванні стержня стрілка індикатора почне відхилятися).
- 4.6 Коли вода в пробірці закипить, стрілка індикатора зупиниться. Відмітити кінцеве положення стрілки індикатора, визначити видовження стержня  $\Delta l$ . Вимкнути нагрівник.
- 4.7 Визначити за таблицею температуру кипіння води  $t_2$ , що відповідає атмосферному тиску на момент проведення досліду (тиск визначити за допомогою барометра).
- 4.8 Обчислити за формулою (2.4) середнє значення температурного коефіцієнта лінійного розширення металу, з якого виготовлено досліджуваний стержень.
- 4.9 Повторити дослід з іншими стержнями.
- 4.10 Оцінити абсолютну та відносну похибки.
- 4.11 Результати роботи записати в таблицю 4.1.

**Таблиця 4.1**

№ зр.	$l_2-l_1$ , $10^{-3}$ м	$\Delta(l_2-l_1)$ , $10^{-3}$ м	$l_1$ , $10^{-3}$ м	$\Delta l_1$ , $10^{-3}$ м	$t_1$ , °C	$\Delta t_1$ , °C	$t_2$ , °C	$\Delta t_2$ , °C	$\alpha$ , $10^{-6}$ K <sup>-1</sup>	$\Delta\alpha$ , $10^{-6}$ K <sup>-1</sup>	$\varepsilon$ , %
1											
2											
3											

- 4.12 Результат експерименту для кожного зразка подати у вигляді  $\alpha = \alpha_c \pm \Delta\alpha_c$ , вказавши також величину  $\varepsilon$ .

## **5 КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ**

- 5.1 Сформулювати основні положення молекулярно-кінетичної теорії теплового розширення твердих тіл.
- 5.2 Як змінюються лінійні розміри тіл при нагріванні? Як змінюється об'єм тіла при нагріванні?
- 5.3 З'ясувати фізичний зміст температурних коефіцієнтів лінійного та об'ємного розширення твердих тіл.
- 5.4 Вивести формули для розрахунку похибок.

## 6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- 6.1 Отримати із формули (2.1) вираз (2.2) для сумарної сили, яка діє на частинку з боку інших частинок, і проаналізувати зміст обох доданків.
- 6.2 Який зв'язок між температурними коефіцієнтами лінійного та об'ємного розширення ізотропних твердих тіл?
- 6.3 На основі визначених значень температурних коефіцієнтів лінійного розширення оцінити, до якої температури треба нагріти стержні, щоб їх лінійні розміри зросли на 1%.

## ДОДАТОК А

Таблиця А.1 - Одиниці вимірювання фізичних величин у системі SI

Величина та її позначення	Визначальне рівняння	Одиниця вимірювання	Скорочене позначення
1	2	3	4
<b>Основні одиниці</b>			
Довжина $l$	-	метр	м
Маса $m$	-	кілограм	кг
Час $t$	-	секунда	с
Сила електричного струму $I$	-	ампер	А
Сила світла $I_v$	-	кандела	кд
Температура термодинамічна $T$	-	кельвін	К
Кількість речовини $N_v$	$N_v = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$	моль	моль
<b>Додаткові одиниці</b>			
Площинний кут $\varphi$	$\varphi = \frac{L}{R}$	радіан	рад
Просторовий кут $\Omega$	$\Omega = \frac{S}{R^2}$	стерадіан	ср
<b>Похідні одиниці</b>			
Площа $S$	$S = l^2$	квадратний метр	м <sup>2</sup>
Об'єм $V$	$V = l^3$	кубічний метр	м <sup>3</sup>
Частота $\nu$	$\nu = \frac{1}{T}$	герц	Гц=с <sup>-1</sup>
Швидкість кутова $\omega$	$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$	радіан на секунду	рад/с
Прискорення кутове $\varepsilon$	$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	радіан на секунду в квадраті	рад/с <sup>2</sup>
Швидкість лінійна $\vartheta$	$\vartheta = \frac{\Delta l}{\Delta t}$	метр на секунду	м/с
Прискорення лінійне $a$	$a = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$	метр на секунду в квадраті	м/с <sup>2</sup>
Густина $\rho$	$\rho = \frac{m}{V}$	кілограм на кубічний метр	кг/м <sup>3</sup>
Сила $F$	$F = ma$	ньютон	Н
Питома вага $d$	$d = \frac{P}{V}$	ньютон на кубічний метр	Н/м <sup>3</sup>
Тиск $P$	$P = \frac{F}{S}$	ньютон на квадратний метр (паскаль)	Н/м <sup>2</sup> =Па
Імпульс (кількість руху) тіла $p$	$p = m\vartheta$	кілограм-метр на секунду	кг·м/с

## Продовження таблиці А.1

1	2	3	4
Момент інерції $I$	$I = mr^2$	кілограм-метр у квадраті	кг·м <sup>2</sup>
Момент сили $M$	$M = Fl$	ньютон-метр	Н·м
Момент кількості руху (імпульсу) $L$	$L = I\omega$	кілограм-метр у квадраті на секунду	кг·м <sup>2</sup> /с
Робота (енергія) $A$	$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha$	джоуль	Дж
Потужність $N$	$N = \frac{A}{t}$	ват	Вт
Кількість теплоти $Q$	$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$	джоуль	Дж
Питома теплоємність $c$	$c = \frac{Q}{m\Delta T}$	джоуль на кілограм-кельвін	Дж/(кг·К)
Молярна теплоємність $C$	$C = \frac{Q}{\frac{m}{\mu} \Delta T}$	джоуль на кіломоль-кельвін	Дж/(кмоль·К)
Коефіцієнт поверхневого натягу (поверхневий натяг) $\alpha$	$\alpha = \frac{F_n}{l_k}$	ньютон на метр	Н/м
Коефіцієнт лінійного розширення $\alpha_l$	$\alpha_l = \frac{\Delta l}{l\Delta T}$	Кельвін у мінус першому степені	К <sup>-1</sup>

Таблиця А.2 - Позасистемні одиниці вимірювання і їх зв'язок з одиницями системи SI

Величина 1	Одиниця вимірювання і її зв'язок з одиницею в системі SI 2
Довжина	1 мікрон (мікрометр), 1 мкм = 1 μm = 10 <sup>-6</sup> м
	1 ангстрем (1 Å) = 10 <sup>-10</sup> м
Маса	1 атомна одиниця маси (а.о.м.) = 1,660·10 <sup>-27</sup> кг
	1 грам (г) = 10 <sup>-3</sup> кг
	1 центнер (ц) = 10 <sup>2</sup> кг
	1 тонна (т) = 10 <sup>3</sup> кг
Час	1 хвилина (хв) = 60 с
	1 година (год) = 3600 с
Площинний кут	1 градус (°) = π/180 рад
	1 хвилина (') = (π/108)·10 <sup>-2</sup> рад
	1 секунда (") = (π/648)·10 <sup>-3</sup> рад
Площа	1 ар = 100 м <sup>2</sup>
	1 гектар (га) = 10 <sup>4</sup> м <sup>2</sup>
Частота обертова	1 оберт за секунду (об/с) = 1 с <sup>-1</sup>
Об'єм	1 літр (л) = 10 <sup>-3</sup> м <sup>3</sup>
Сила	1 дина (дин) = 10 <sup>-5</sup> Н
	1 кілограм-сила (кГ, кгс) = 9,81 Н

Продовження таблиці А.2

1	2
Тиск	1 дин/см <sup>2</sup> = 0,1 Н/м <sup>2</sup>
	1 кГ/м <sup>2</sup> = 9,81 Н/м <sup>2</sup>
	1 міліметр ртутного стовпа (1 мм.рт.ст) = 133,0 Н/м <sup>2</sup>
	1 міліметр водяного стовпа (1 мм вод.ст.) = 9,81 Н/м <sup>2</sup>
	1 технічна атмосфера (ат) = 1 кГ/см <sup>2</sup> = 9,81·10 <sup>4</sup> Н/м <sup>2</sup>
	1 фізична атмосфера (атм) = 760 мм Hg = 1,013·10 <sup>5</sup> Н/м <sup>2</sup>
Робота, енергія, кількість теплоти	1 ерг = 10 <sup>-7</sup> Дж
	1 Вт·год = 3,6·10 <sup>3</sup> Дж
	1 електрон-вольт (еВ) = 1,6·10 <sup>-19</sup> Дж
	1 калорія (кал) = 4,19 Дж
	1 кілокалорія (ккал) = 4,19·10 <sup>3</sup> Дж
Потужність	1 ерг/с = 10 <sup>-7</sup> Вт
	1 кінська сила (к.с.) = 75 кГм/м = 736 Вт
Динамічна в'язкість	1 Пуаз (пз) = 0,1 Н·с/м <sup>2</sup> = 0,1 кг/м·с
Кінематична в'язкість	1 Стокс (Ст) = 10 <sup>-4</sup> м <sup>2</sup> /с

Таблиця А.3 - Множники і префікси для утворення десяткових, кратних і часткових одиниць і їх найменування

Множник	Префікс	
	вимова	позначення
10 <sup>18</sup>	екса	
10 <sup>15</sup>	пета	П
10 <sup>12</sup>	тера	Т
10 <sup>9</sup>	гіга	Г
10 <sup>6</sup>	мега	М
10 <sup>3</sup>	кіло	К
10 <sup>2</sup>	гекто	г
10 <sup>1</sup>	дека	да
10 <sup>-1</sup>	деци	д
10 <sup>-2</sup>	санти	с
10 <sup>-3</sup>	мілі	м
10 <sup>-6</sup>	мікро	мк
10 <sup>-9</sup>	нано	н
10 <sup>-12</sup>	піко	п
10 <sup>-15</sup>	фемто	ф
10 <sup>-18</sup>	атто	а

Таблиця А.4 - Латинський алфавіт

<i>A a</i>	а	<i>N n</i>	ен
<i>B b</i>	бе	<i>O o</i>	о
<i>C c</i>	це	<i>P p</i>	пе
<i>D d</i>	де	<i>Q q</i>	ку
<i>E e</i>	е	<i>R r</i>	ер
<i>F f</i>	еф	<i>S s</i>	ес
<i>G g</i>	же (ге)	<i>T t</i>	те
<i>H h</i>	гаш (га)	<i>U u</i>	у
<i>I i</i>	і	<i>V v</i>	ве
<i>J j</i>	йот(йота)	<i>W w</i>	дубль-ве
<i>K k</i>	ка	<i>X x</i>	ікс
<i>L l</i>	ель	<i>Y y</i>	ігрек (іпсилон)
<i>M m</i>	ем	<i>Z z</i>	зет (зета)

Таблиця А.5 - Грецький алфавіт

<i>A α</i>	альфа	<i>N ν</i>	ню (ні)
<i>B β</i>	бета	<i>Ξ ξ</i>	ксі
<i>Γ γ</i>	гамма	<i>O o</i>	омікрон
<i>Δ δ</i>	дельта	<i>Π π</i>	пі
<i>E ε</i>	епсилон	<i>Ρ ρ</i>	ро
<i>Z ζ</i>	зета	<i>Σ σ</i>	сигма
<i>Η η</i>	ета	<i>Τ τ</i>	тау
<i>Θ θ ϑ</i>	тета	<i>Υ υ</i>	іпсилон
<i>I ι</i>	йота	<i>Φ φ</i>	фі
<i>Κ κ</i>	каппа	<i>Χ χ</i>	хі
<i>Λ λ</i>	ламбда	<i>Ψ ψ</i>	псі
<i>Μ μ</i>	мю (мі)	<i>Ω ω</i>	омега

Таблиця А.6 - Основні фізичні сталі

Назва	Позначення і числове значення
1	2
Прискорення вільного падіння (на широті 50°)	$g = 9,8107 \text{ м/с}^2$
Гравітаційна стала	$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Абсолютний нуль температури	-273,15 °С
Об'єм моля ідеального газу при $T_0=273,15 \text{ К}$ , $p_0=1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$	$V_m = 22,4 \text{ л/моль} = 22,4 \text{ м}^3/\text{кмоль}$
Універсальна газова стала	$R = 8,314 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$
Число Авогадро	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Число Лошмідта	$n_0 = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$
Стала Больцмана	$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Заряд електрона	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$

Продовження таблиці А.6

1	2
Електрична стала	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = $12,57 \cdot 10^{-7}$ Н/А <sup>2</sup>
Число Фарадея	$F = 9,648 \cdot 10^4$ Кл/моль
Стала Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Стала Стефана-Больцмана	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К <sup>4</sup> )
Стала Ридберга	$R_\infty = 1,097 \cdot 10^7$ м <sup>-1</sup>
Маса електрона	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ кг
Маса протона	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса нейтрона	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомна одиниця маси	$a.o.m. = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 1,660 \cdot 10^{-27}$ кг

Таблиця А.7 - Дані про Землю

Об'єм, км <sup>3</sup> .....	1083219·106
Маса, кг.....	5,978·1024
Площа поверхні, км <sup>2</sup> :	
Землі.....	510069000
суші.....	148940148
води.....	361128852
Радіус, м:	
середній.....	6371032
екваторіальний.....	6378160
полярний.....	6356777
Довжина кола, м:	
меридіана.....	40008550
екватора.....	40075696
Середня густина, кг/м <sup>3</sup> :	
Землі.....	5518
земної кори.....	2800
Прискорення вільного падіння, м/с <sup>2</sup> :	
на еваторі.....	9,78049
на полюсі.....	9,83235
на широті 45°.....	9,80616
м.Київ.....	9,81066
м.Одеса.....	9,80610
м.Тернопіль.....	9,8107
нормальне (стандартне).....	9,80665
Маса повітря, що оточує Землю, кг.....	5,158·1018
Атмосферний тиск на рівні океану	101325 Па
Густина сухого повітря (при температурі 20 °С та тиску 101325 Па)	1,205 кг/м <sup>3</sup>

Таблиця А.8 – Ефективні діаметри молекул газу (0 °С, 101325 Па)

Газ	Діаметр, нм	Газ	Діаметр, нм
Азот	0,31	Кисень	0,29
Аргон	0,28	Ксенон	0,25
Водень	0,26	Вуглекислий газ	0,32
Гелій	0,19	Водяна пара	0,23

Таблиця А.9 – Об'ємна частка газів у повітрі

$N_2$  - 78,03%  
 $O_2$  - 20,99%  
 $Ar$  - 0,933%  
 $CO_2$  - 0,03%  
 $H_2$  - 0,01%  
 $Ne$  - 0,0018%

Молярна маса повітря  $\mu_{пов} = 0,029$  кг/моль

Таблиця А.10 – Поверхневий натяг дистильованої води і етилового спирту при різних температурах ( $\alpha$ , мН/м)

Речовина	Температура, °С			
	0	30	60	90
Вода	75,6	71,18	66,18	60,75
Етиловий спирт	24,4	21,9	19,2	16,4

Таблиця А.11 – Динамічна в'язкість  $\eta$  деяких речовин

Речовина	$t, ^\circ C$	$\eta$ , мкПа·с	Речовина	$t, ^\circ C$	$\eta$ , Па·с
Азот	0	16,5	Вода	10	0,001307
Водень	0	8,5		15	0,001140
Гелій	0	18,8		20	0,001005
Кисень	0	19,2	Гліцерин	-20	134
				0	12,1
				20	1,5
Повітря	0	17,1	Олія рицинова	10	242
	20	18,1		20	0,97
	100	21,2		30	0,46
Азот (рідкий)	-196	158			
Бензин	20	530			
Спирт	20	1190			

Таблиця А.11 – Питома теплоємність газів при нормальному тиску ( $c_p$ , кДж/(кг·К))

Температура, °С	Кисень		Повітря		Вуглекислий газ		Водяна пара		Пари етилового спирту	
	$c_p$	$\gamma$	$c_p$	$\gamma$	$c_p$	$\gamma$	$c_p$	$\gamma$	$c_p$	$\gamma$
0	0,9149	1,397	1,006	1,400	0,8148	1,301	-	-	1,341	1,16
100	0,934	1,385	1,010	1,397	1,9136	1,260	1,103	1,28	1,689	1,12
200	0,964	1,37	1,027	1,390	0,9927	1,235	1,978	1,30	2,011	1,10
300	0,9948	1,353	1,048	1,378	1,057	1,217	2,015	1,29	2,321	1,08
600	1,069	1,321	1,115	1,345	1,192	1,188	2,208	1,26	3,168	1,06

Таблиця А.12 - Середня довжина вільного пробігу молекул повітря в залежності від тиску (при 20 °С)

$p$		$L$	
Па	мм рт.ст.	м	інші одиниці довжини
101325	760	$6,2 \cdot 10^{-8}$	0,062 мкм
133,3	1	$4,7 \cdot 10^{-5}$	47 мкм
13,3	10-1	$4,7 \cdot 10^{-4}$	470 мкм $\approx$ 0,5 мм
$133,3 \cdot 10^{-2}$	10-2	$4,7 \cdot 10^{-3}$	4,7 мм
$133,3 \cdot 10^{-3}$	10-3	$4,7 \cdot 10^{-2}$	47 мм
$133,3 \cdot 10^{-4}$	10-4	$4,7 \cdot 10^{-1}$	470 мм $\approx$ 0,5 м
$133,3 \cdot 10^{-5}$	10-5	4,7	
$133,3 \cdot 10^{-6}$	10-6	$4,7 \cdot 10$	

Таблиця А.13 – Густини твердих тіл (при 20°С), кг/м<sup>3</sup>

Речовина	Густина	Речовина	Густина
Алмаз	3511	Латунь	8500-8700
Алюміній	2700	Мідь	8960
Бетон	1800-2400	Нікелін	8500-8800
Бурштин	1100	Ніхром	8200-8500
Віск	960	Олово	7310
Графіт	2100-2520	Свинець	11350
Дерево сухе:		Чавун:	
дуб	700-1000	білий	7200-7700
сосна	400-700	сірий	6600-7400
Залізо	7900	Сталь	7700-7900
Константан	8900		

Таблиця А.14 – Температурний коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha$  різних речовин

Речовина	$t, ^\circ\text{C}$	$\alpha, 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Речовина	$t, ^\circ\text{C}$	$\alpha, 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
Алюміній	0-200	24,5	Срібло	0-200	19,8
	0-600	27,9		0-900	22,4
Залізо	0-100	12,2	Інвар	20-100	1,6
	0-800	14,8			
Золото	0-200	14,5	Константан		
	0-1000	16,8			
Мідь	0-200	17,4	Латунь жовта		
	0-1000	20,3			
Нікель	0-200	14,0	Ніхром	14,5	
	0-800	16,1			
Олово	0-200	31,6	Сталь нержавіюча	20-200	11,1
				20-700	12,8
Свинець	0-300	31,3	Чавун звичайний сірий	20-500	10,5
				20-800	14,0

Таблиця А.15 – Модулі пружності речовин

Матеріал	Модуль Юнга, ГПа	Модуль зсуву, ГПа
Алюмінієва бронза, литво	103	41
Алюміній	63-70	25-26
Інвар	135	55
Каучук	0,008	0,003
Константан	160	61
Мідь, литво	82	-
Нікель	204	79
Сталь легована	206	80
Сталь вуглицева	195-205	8
Сталеве литво	170	-
Чавун білий, сірий	113-116	44
Чавун ковкий	150	-

Таблиця А.16 – Швидкість звуку в повітрі при різній температурі (при нормальному тиску)

$t, ^\circ\text{C}$	$c, \text{ м/с}$	$t, ^\circ\text{C}$	$c, \text{ м/с}$	$t, ^\circ\text{C}$	$c, \text{ м/с}$	$t, ^\circ\text{C}$	$c, \text{ м/с}$
-30	312	-10	325	10	337	30	349
-20	319	0	331	20	343		

Таблиця А.17 – Моменти інерції однорідних тіл

Тіло	Відносно осі	I
Тонкий стержень довжини $l$	перпендикулярної стержню і проходить через його середину	$\frac{ml^2}{12}$
Круглий диск або циліндр радіуса $r$	перпендикулярної площині диска і проходить через його центр	$\frac{mr^2}{2}$
Куля радіуса $r$	що співпадає з діаметром	$\frac{2}{5}mr^2$
Тонка труба або кільце радіуса $r$	що співпадає з віссю труби або кільця	$mr^2$
Круглий циліндр довжини $l$ і радіуса $r$	перпендикулярної вісі циліндра і проходить через його середину	$m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right)$
Прямокутний паралелепіпед розмірами $2a, 2b, 2c$	що проходить через центр і паралельно ребру довжиною $2a$	$\frac{m}{3}(b^2 + c^2)$
Куб з довжиною ребра $a$	що співпадає з головною діагоналлю	$\frac{1}{6}ma^2$

Таблиця А.18 - Деякі формули для наближених обчислень (при  $a \ll 1$ )

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a$$

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} \approx 1 - \frac{1}{2}a$$

$$e^a \approx 1+a$$

$$\ln(1+a) \approx a$$

Для кутів  $\alpha$ , що задані в радіанах, формули подані нижче, справедливі з точністю 0.5% для  $\alpha \leq 5^\circ$  і з точністю до 1% для кутів  $5 < \alpha \leq 15^\circ$

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$$

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$$