

Міністерство освіти і науки України

Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Хомик Н.І., Довбуш Т.А., Рубінець Н.А.

***ОПІР МАТЕРІАЛІВ (спецкурс)
І ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
І ПЛАСТИЧНОСТІ***

КУРС ЛЕКЦІЙ
для студентів напряму підготовки «Будівництво»

Тернопіль, 2017

УДК 620.10
ББК 34
X 76

Автори:

Н.І. Хомик, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри
технічної механіки і сільськогосподарських машин

Т.А. Довбуш, асистент кафедри технічної
механіки і сільськогосподарських машин

Н.А. Рубінець, аспірант кафедри технічної
механіки і сільськогосподарських машин

Рецензент

Л.А. Романюк, к.т.н., доцент кафедри вищої математики

*Розглянуто й затверджено на засіданні кафедри будівельної механіки,
протокол № 1 від 25.08.2016р.*

*Схвалено й рекомендовано до друку на засіданні методичної комісії
факультету інженерії машин, споруд і технологій,
протокол № 1 від 29.08.2016р.*

X 76 Опір матеріалів (спецкурс) і основи теорії пружності і
пластичності: курс лекцій для студентів напряму підготовки
«Будівництво» /Н.І. Хомик, Т.А. Довбуш, Н.А. Рубінець, –
Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2017. – 232с.

Пропонований курс лекцій розроблено відповідно до навчальної
програми і призначений для студентів напряму підготовки
«Будівництво» денної та заочної форм навчання. Рекомендований і для
студентів інших напрямів підготовки.

Посібник рекомендовано також для самостійної роботи студентів.

УДК 620.10
ББК 34

© Хомик Н. І., Довбуш Т. А.,
Рубінець Н.А, 2017

ЗМІСТ

	стр.
Тема 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЙ ПРУЖНОСТІ ТА ПЛАСТИЧНОСТІ. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....	6
1.1. Задачі опору матеріалів і об'єкт вивчення у теорії пружності.....	7
1.2. Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів і теорії пружності.....	8
1.3. Основні гіпотези (допущення) і принцип теорії пружності.....	9
1.4. Класифікація зовнішніх навантажень та розрахункова схема.....	11
1.5. Основні види деформацій.....	12
1.6. Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Епюра.....	13
1.7. Напруження. Види напруження. Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами.....	16
1.8. Диференціальні рівняння рівноваги.....	19
1.9. Напруження на нахилених площадках.....	23
1.10. Головні напруження. Інваріанти напруженого стану.....	25
1.11. Основи теорії напруженого стану в точці. Розрахунки на міцність при складному напруженому стані.....	28
Тема 2 ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ. ЗСУВ. КРУЧЕННЯ. ДЕФОРМАЦІЇ ТІЛА. ЗАКОН ГУКА.....	32
2.1. Центральний розтяг і стиск стержня. Напруження у поперечних перетинах стержня.....	33
2.2. Поздовжні і поперечні деформації. Закон Гука. Діаграми розтягу (стиску).....	34
2.3. Потенціальна енергія деформації. Допустимі напруження. Розрахунок на міцність.....	37
2.4. Зсув. Напруження, деформація і закон Гука при зсуві.....	38
2.5. Кручення стержня круглого поперечного перетину. Напруження і переміщення при крученні.....	40
2.6. Статично невизначені системи при крученні. Розрахунок гвинтових пружин.....	43
2.7. Переміщення, лінійні і кутові деформації тіла.....	46
2.8. Об'ємна деформація тіла. Умови сумісності деформацій..	47
2.9. Узагальнений закон Гука.....	52
2.10. Зворотна форма закону Гука.....	53

Тема 3 ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....	56
3.1. Постановка загальної задачі теорії пружності. Способи розв'язування.....	57
3.2. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у переміщеннях.....	59
3.3. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у напруженнях при постійності об'ємних сил.....	62
3.4. Типи граничних умов. Методи розв'язування загальної задачі теорії пружності.....	63
Тема 4 ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....	64
4.1. Плоска деформація.....	65
4.2. Узагальнений плоский напружений стан.....	69
4.3. Рівняння плоскої задачі теорії пружності. Граничні умови (умови на контурі).....	72
4.4. Задачі теорії пружності та методи їх розрахунку.....	79
4.5. Розв'язування плоскої задачі в напруженнях для прямокутних областей.....	79
4.6. Розв'язування плоскої задачі в поліномах.....	82
4.7. Розв'язування плоскої задачі в тригонометричних рядах.....	86
4.8. Метод скінченних різниць (метод сіток).....	87
Тема 5 ЗГИН ТОНКИХ ПЛАСТИНОК.....	93
5.1. Визначення та гіпотези.....	94
5.2. Переміщення і деформації у пластинках.....	96
5.3. Напруження у пластинках.....	98
5.4. Внутрішні зусилля у пластинках.....	101
5.5. Диференціальне рівняння вигнутої серединної поверхні..	105
5.6. Граничні умови для прямокутних пластин.....	107
Тема 6 РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЗГИНУ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК	113
6.1. Рішення Нав'є.....	114
6.2. Метод Рітца-Тимошенко.....	121
6.3. Метод Бубнова-Гальоркіна.....	122
6.4. Метод кінцевих різниць.....	124
6.5. Розрахунок пластинки, шарнірно обпертої по всьому контуру.....	125
Тема 7 РОЗРАХУНОК ТОНКИХ ОБОЛОНОК.....	132
7.1. Основні визначення.....	133
7.2. Розрахунок оболонок за безмоментною теорією.....	135
7.2.1. Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні.....	135
7.2.2. Згин осі оболонки обертання.....	139
7.3. Оболонка довільної форми.....	142
7.4. Розрахунок оболонок за моментною теорією.....	148

7.4.1.	Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні.....	148
7.4.2.	Крайовий ефект у оболонці обертання.....	152
Тема 8	ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ.....	157
8.1.	Основні визначення.....	158
8.2.	Статичні, геометричні та фізичні рівняння.....	159
8.3.	Умови пластичності.....	166
8.4.	Теорія малих пружно-пластичних деформацій.....	168
8.5.	Теорема про розвантаження.....	170
8.6.	Залежності між інтенсивностями напружень і деформацій.....	171
8.7.	Постановка задачі теорії пластичності.....	174
Тема 9	РОЗРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ГРАНИЦЕЮ ПРУЖНОСТІ.....	175
9.1.	Модель ідеального пружно-пластичного матеріалу.....	176
9.2.	Розрахунок статично невизначуваних стержневих систем.....	177
	9.2.1. Розрахунок методом допустимих напружень.....	177
	9.2.2. Розрахунок за методом граничних навантажень... ..	180
9.3.	Утримувальна здатність вала при деформації кручення...	181
9.4.	Пластичний розрахунок статично визначуваної балки.....	183
9.5.	Розрахунок нерозрізних балок методом граничних навантажень.....	185
Тема 10	ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ ДЛЯ КРИХКИХ ТА ПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ.....	191
10.1.	Завдання теорій міцності. Крихке та пластичне руйнування.....	192
10.2.	Класичні теорії міцності для крихкого руйнування.....	194
10.3.	Класичні теорії міцності для пластичного руйнування....	195
10.4.	Узагальнені теорії міцності.....	197
Тема 11	РОЗРАХУНКИ МІЦНОСТІ ТА ДОВГОВІЧНОСТІ ПРИ ДІЇ ЗМІННИХ НАПРУЖЕНЬ.....	203
11.1.	Втомна міцність матеріалів. Крива втомленості і границя витривалості матеріалу. Зведені амплітуди циклу.....	204
11.2.	Розрахунки на втомну міцність та довговічність.....	210
	Бібліографічний покажчик.....	213
	ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ І РЕКОМЕНДОВАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ	230

Тема 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ПЛАСТИЧНОСТІ. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

- 1.1. Задачі опору матеріалів і об'єкт вивчення у теорії пружності**
- 1.2. Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів і теорії пружності**
- 1.3. Основні гіпотези (допущення) і принцип теорії пружності**
- 1.4. Класифікація зовнішніх навантажень та розрахункова схема**
- 1.5. Основні види деформацій**
- 1.6. Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Епюра**
- 1.7. Напруження. Види напруження. Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами**
- 1.8. Диференціальні рівняння рівноваги**
- 1.9. Напруження на нахилених площадках**
- 1.10. Головні напруження. Інваріанти напруженого стану**
- 1.11. Основи теорії напруженого стану в точці. Розрахунки на міцність при складному напруженому стані**

1.1. Задачі опору матеріалів і об'єкт вивчення у теорії пружності

Розрахунок будь-якої деталі чи споруди, тобто визначення напружень, деформацій та переміщень здійснюють з допомогою **механіки твердого деформованого тіла** (МТДТ). Цей предмет поділяють на такі розділи: опір матеріалів (ОМ), теорія пружності (ТП) та будівельна механіка.

Опір матеріалів – наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і конструкцій.

Конструкції – усі матеріальні об'єкти техніки, їх частини й деталі.

Міцність – здатність матеріалу чи конструкції витримувати механічне навантаження не руйнуючись

$$p_{\max} \leq [p],$$

де p_{\max} – максимальне напруження;

$[p]$ – допустиме напруження.

Жорсткість – здатність конструкції та її елементів протидіяти пружним деформаціям, тобто здатність сприймати зовнішнє навантаження без зміни геометричних розмірів та форми

$$f_{\max} \leq [f],$$

де f_{\max} – максимальна деформація (переміщення);

$[f]$ – допустима деформація (переміщення).

Стійкість – здатність конструкції або її елементів зберігати під дією заданих сил початкову форму пружної рівноваги.

Мета курсу опір матеріалів:

а) навчитися за розрахунковою схемою вірно визначати вид деформації, на який працює деталь чи конструкція;

б) визначити найнебезпечніший перетин, попередньо побудувавши епюри внутрішніх силових факторів;

в) за відповідною умовою міцності чи жорсткості визначити розміри поперечного перетину, а в деяких задачах допустиме навантаження чи максимальні напруження, і провести перевірку міцності.

Теорія пружності – це частина загальної науки про міцність, жорсткість і стійкість споруд. В опорі матеріалів виконують розрахунки в основному у стержневих систем на основі спрощених допущень.

В теорії пружності використовують загальні гіпотези і для розробки методів розрахунку застосовують складніший математичний апарат. Це дозволяє отримати точніші розв'язки порівняно з опором матеріалів, а також розглядати задачі, які не можна розв'язати методами опору матеріалів (зокрема, розрахунок масивних тіл, пластинок і оболонок).

1.2. Об'єкти розрахунку в опорі матеріалів і теорії пружності

Усі елементи машинобудівних і будівельних конструкцій можна звести до таких типових спрощених елементів: стержні (бруси), диски, оболонки, пластини, масивні тіла.

Стержень (брус) – тіло призматичної форми (рис. 1.1а), в якого один розмір (довжина) набагато перевищує два інших (поперечних) розміри.

Тонкостінні стержні (швелери, кутники, двотаври) – тіла, в яких товщина стінки значно менша за габаритні розміри поперечного перетину.

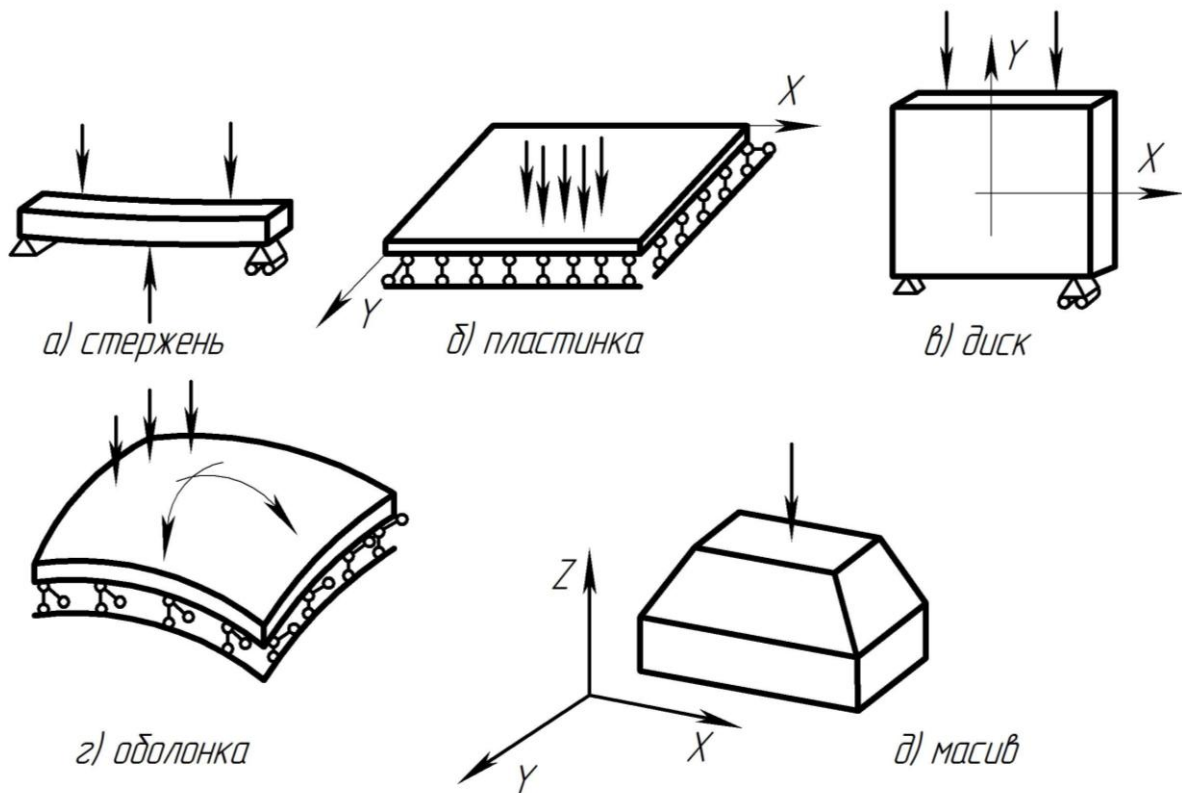


Рисунок 1.1

Приклади стержнів: вали, осі, балки, труби, рейки, елементи криволінійної форми (гвинтові пружини, гаки, елементи ланцюгів).

Пластинка – призматичне (циліндричне) тіло (рис. 1.1б), в якого один розмір (товщина) набагато менший за два інших. До пластин відносять і диски (рис. 1.1в).

Приклади пластин: плоскі днища й кришки резервуарів, апаратів хімічних виробництв, плити перекриттів.

Оболонка – тіло (рис. 1.1г), обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими (товщина) мала порівняно з іншими розмірами. Це – пластинка з викривленою серединною поверхнею.

Приклади: стінки тонкостінних резервуарів, стінки котлів, куполи будівельних споруд, корпуси літаків, ракет, підводних човнів.

Масив (масивне тіло) – тіло (рис. 1.1δ), розміри якого в усіх (трьох) напрямках одного порядку. Приклади: фундаменти споруд, підпірні стінки, основи потужних пресів і верстатів.

В опорі матеріалів розглядають стержні, тобто тіла, що пролягають в одному напрямку, а *в теорії пружності – складніші об'єкти, що пролягають у двох напрямках* (рис. 1б, в, г) *або в трьох* (рис. 1δ). Математичний апарат теорії пружності складніший, ніж в опорі матеріалів, тому що напружено-деформований стан таких тіл описують функціями двох або трьох змінних.

1.3. Основні гіпотези (допущення) і принципи теорії пружності

В опорі матеріалів використовують ряд допущень (гіпотез), які спрощують розрахунки. Ці гіпотези, підтверджені на практиці, тому їх можна використовувати при розв'язуванні більшості задач.

Класична, або лінійна теорія пружності, що вивчається в цьому курсі, заснована на таких **гіпотезах**:

1. Матеріал конструкції є **суцільним**, тобто його властивості не залежать від форми і розмірів тіла і однакові у всіх його точках. (Ця гіпотеза не враховує дискретну структуру, зумовлену молекулярною будовою речовини і т.д.). Суцільність передбачає відсутність розривів і пустот у процесі деформування.

2. Матеріал конструкції є **однорідним** (усі механічні властивості однакові у будь-якій точці тіла).

3. Матеріал конструкції є **ізотропним**, тобто усі його механічні властивості у всіх напрямках однакові (виняток дерево).

4. Матеріал конструкції має властивість **ідеальної лінійної пружності**, тобто повністю відновлювати свою форму і розміри після зняття навантаження (підкоряється закону Гука). Або деформація матеріалу конструкції в кожній точці прямо пропорційна напруженню у цій точці. Ця гіпотеза вперше сформульована Р. Гуком (Ця гіпотеза має свої обмеження).

5. **Переміщення точок тіла дуже малі** порівняно з його розмірами. Деформації тіла малі порівняно з одиницею. Ця гіпотеза разом із четвертою дозволяє застосовувати принцип незалежності дії сил.

6. Матеріал конструкції має **початковий напружений стан**, тобто при відсутності зовнішніх дій відсутні напруження і деформації (початкові напруження, які виникають при виготовленні конструкції, не враховують).

При розв'язуванні окремих задач застосовують додаткові допущення, відомі з опору матеріалів.

Принцип незалежності дії сил (принцип накладання або принцип суперпозиції).

Принцип незалежності дії сил (ПНДС) є справедливим за умови, що переміщення точок тіла, яке навантажується зовнішніми силами, є малими порівняно з його розмірами, матеріал тіла працює пружно, всі параметри напружено-деформованого стану (НДС) тіла – переміщення, деформації, внутрішні зусилля, напруження – пов'язані між собою лінійною залежністю.

Згідно з ПНДС – результат одночасної дії на тіло кількох зовнішніх навантажень дорівнює сумі результатів дії кожного з цих навантажень.

Принцип Сен-Венана (принцип локальності ефекту самозрівноважених навантажень)

Сен-Венан у 1855 р. для спрощення розрахунків на міцність запропонував положення, яке в сучасній інженерній практиці використовують у такому формулюванні:

Якщо тіло навантажується статично еквівалентними системами сил, тобто такими, в яких головний вектор та головний момент однакові, й при цьому розміри зони прикладання навантаження невеликі порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладання сил, компоненти напружено-деформованого стану (напруження, деформації, переміщення) мало залежать від способу навантажування.

Інакше кажучи, принцип Сен-Венана або принцип локальності полягає в тому, що на достатній відстані від місця прикладання навантаження конкретний спосіб здійснення цього навантажування можна не враховувати.

Відповідно до цього принципу результат дії самозрівноважених навантажень прикладених до малої ділянки тіл, швидко зникає при віддаленні від цієї ділянки.

Точне дослідження локальних напружень і деформацій навколо зони прикладання навантаження є досить складною задачею. Принцип Сен-Венана дозволяє уникнути розв'язання цієї задачі і отримати прийнятне рішення без детального вивчення локальних особливостей навантажування.

Принцип початкових розмірів

При складанні умов рівноваги реального тіла його вважають абсолютно твердим.

У дійсності при навантажуванні форма і розміри тіла змінюються, тому точки прикладання навантажень і лінії їх дії теж змінюються. Врахування цих змін дає поправку у четвертому-п'ятому знаках чисельного результату, тому цим можна знехтувати.

Лінійна теорія пружності – найбільш простий варіант механіки твердого деформівного тіла. Якщо відмовитись від однієї з декількох гіпотез, отримаємо дуже складні варіанти. Наприклад, відмова від 4-ої гіпотези може привести до теорії пластичності або повзучості, відмова від 5-ої гіпотези – до геометрично нелінійної теорії пружності і т.д.

1.4. Класифікація зовнішніх навантажень та розрахункова схема

Зовнішні навантаження класифікують:

1. За характером дії – статичні, динамічні.

Статичні – це навантаження, значення, напрямок і місце прикладання яких залишаються постійними.

Динамічні – це навантаження, які характеризуються швидкими змінами їх значення в часі, напрямку чи місця прикладання.

Всі навантаження, що діють на тіло можна розділити на *об'ємні* і *поверхневі*.

Об'ємні діють у кожній точці тіла (сила тяжіння, сила інерції, сили магнітного притягання). Ці сили вимірюють інтенсивністю – силою, що припадає на одиницю об'єму. Її зручно представити у вигляді складових вздовж осей X, Y, Z . *Поверхневі навантаження виникають у результаті контакту з іншими тілами* – тиск ґрунту на підпірну стінку, тиск води на греблю та ін. Інтенсивність поверхневого навантаження – це величина сили, що припадає на одиницю площі поверхні. Положення площадки визначають нормаллю до неї.

2. За характером прикладання поверхневі навантаження поділяють на (рис. 1.2):

а) F, Q, R – зосереджені сили $[H, кН, МН]$;

б) M, T – зосереджені моменти $[Нм, кНм, МНм]$;

в) q – розподілені на лінії $[H/м, кН/м]$.

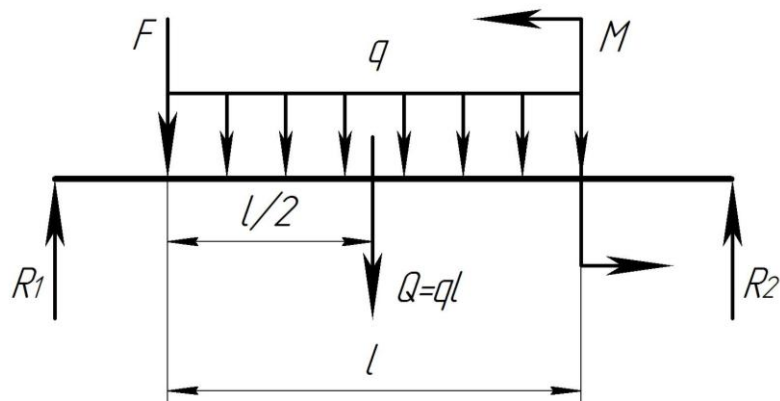


Рисунок 1.2

У теорії пружності, як і в опорі матеріалів, дослідження реального об'єкту починають з обрання розрахункової схеми.

Розрахункова схема – це реальний об'єкт, який звільнено від несуттєвих особливостей.

Для одного і того ж об'єкту може бути запропоновано кілька розрахункових схем залежно від особливостей навантаження, умов роботи, потрібної точності і від того, яка сторона явища цікавить дослідника в конкретному випадку.

Справедливо і зворотне: *одній розрахунковій схемі може бути поставлено у відповідність багато реальних об'єктів*. Ця обставина є дуже важливою тому, що досліджуючи якусь одну схему можна отримати розв'язок для цілого класу реальних задач, які можна звести до цієї схеми. Перехід від реального об'єкту до розрахункової схеми здійснюють схематизацією властивостей матеріалу, навантажень, геометрії реального об'єкту, типів опорних пристроїв і т. ін.

1.5. Основні види деформацій

Реальні тіла (споруди) не є абсолютно твердими і тому під дією прикладених навантажень змінюють свої початкові розміри і форму, тобто **деформуються**.

Деформації бувають **пружними**, тобто такими, що зникають після припинення дії сил, які спричинили їх, та **пластичними**, або **залишковими**, – такими, що не зникають після розвантаження тіла.

Усі існуючі тіла під впливом зовнішніх сил здатні змінювати свої розміри і форму, тобто деформуватися.

В опорі матеріалів розрізняють деформації розтягу (стиску), зсуву (зрізу), кручення і згину. При різних видах деформації у поперечних перетинах тіла виникають різні внутрішні силові фактори.

1. **Розтяг-стиск** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах прямого бруса виникає тільки **поздовжня (осьова) сила N** .

Брус, що працює на розтяг (стиск), називають стержнем.

Розтягу зазнають такі елементи конструкцій, як канати, болти, троси, стержні ферм, штоки поршневих машин. На стиск працюють цегляна кладка будинків, фундамент, колони, пуансони штампів.

2. **Зсув (зріз)** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *поперечна (перерізуюча) сила Q* . Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – зріз.

Зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань.

3. **Кручення** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса діє тільки *крутний момент M_{KR}* . Брус круглого поперечного перетину, який передає потужність під час обертального руху, називають валом. Кручення часто супроводжується згином або іншим видом деформації.

4. **Прямий поперечний згин** – такий вид деформації, при якому у поперечних перетинах бруса виникає *згинальний момент $M_{зГ}$* та поперечна сила Q . Брус, який працює на згин, називають балкою.

Згину зазнають осі, балки міжповерхових перекриттів і мостів, зуби зубчастих коліс, листові ресори.

5. **Складний опір** – це поєднання двох або більше простих видів деформацій, а саме: *згин + кручення; стиск + згин* і т.д.

1.6. Внутрішні силові фактори. Метод перетинів. Епюра

Між сусідніми частками тіла завжди діють певні сили взаємодії, тобто *внутрішні сили*. Ці сили намагаються зберегти тіло, як єдине ціле, протидіють усякій спробі змінити взаємне розташування його частин.

В опорі матеріалів не розглядають та не беруть до уваги внутрішні сили, що діють в тілі, яке перебуває в своєму природному (ненавантаженому) стані, а *вивчають і визначають тільки ті додаткові внутрішні сили, які виникають внаслідок навантаження тіла*.

Внутрішні силові фактори – це внутрішні сили взаємодії між частинками тіла, які виникають при дії на тіло зовнішніх сил, і перешкоджають зміні відстаней між частинками й руйнуванню тіла. Їх називають *зусиллями*. Зовнішні силові дії, прикладені до елемента конструкції, і реакції в місцях кріплення опор, тобто активні й реактивні сили називають *навантаженнями*.

Для встановлення величини внутрішніх зусиль (силових факторів), що виникають у перетині стержнів, застосовують метод перетинів.

Перетин, перпендикулярний до осі бруса, називають *нормальним* або *поперечним*; перетин, проведений під будь-яким іншим кутом, називають *косим* або *похилим*.

Метод перетинів полягає в тому, що пружне тіло (брус), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил, уявно розрізають площиною на 2-і частини (рис. 1.3а). Будь-яку з них відкидають. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, що перебуває в рівновазі, приклавши до неї внутрішні сили взаємодії (зусилля), що виникають між обома частинами тіла під впливом зовнішніх сил (рис. 1.3б). Внутрішні сили замінюють вплив відкинutoї частини бруса на залишену. Принципово не важливо, яку із частин тіла відкинути.

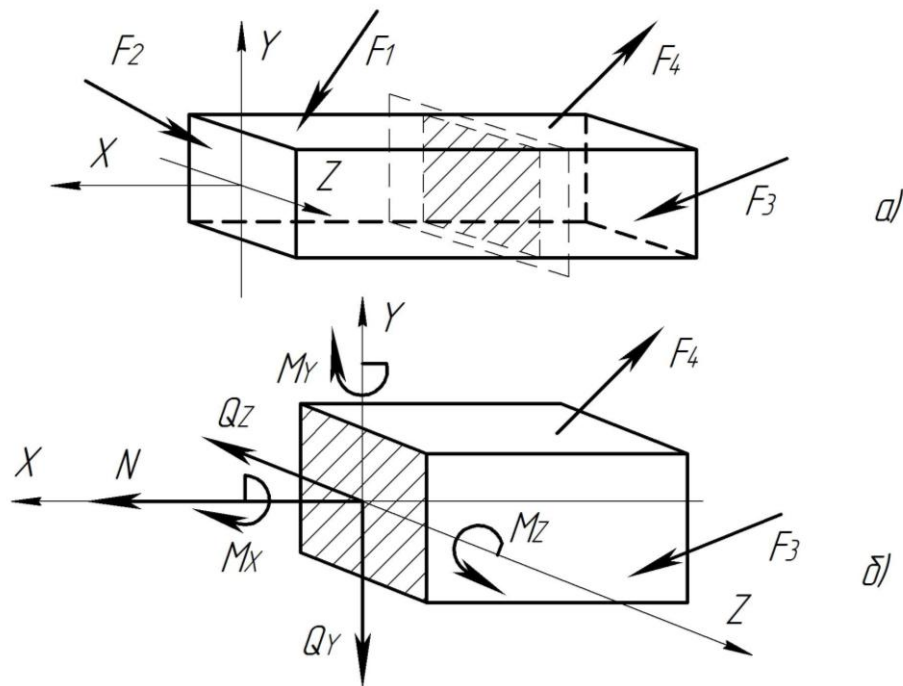


Рисунок 1.3

У загальному випадку навантаження бруса у його поперечному перетині виникає шість внутрішніх силових факторів:

N_X – поздовжня (нормальна) сила, діє вздовж осі бруса, перпендикулярна до площини перетину;

Q_Y , Q_Z – поперечні сили, дотичні до площини перетину, намагаються зсунути одну частину бруса відносно іншої у напрямках осей OY , OZ ;

M_Y , M_Z – моменти, що повертають перетин навколо осей OY , OZ , намагаються зігнути стержень у площинах XZ та XY , тобто згинальні моменти, $M_Y = M_{зг.Y}$; $M_Z = M_{зг.Z}$;

M_X – момент, що діє у площині перетину і спричиняє поворот перетину відносно поздовжньої осі бруса OX , тобто скручує брус, називають його крутним моментом, $M_X = M_{кр}$.

Кожен із внутрішніх силових факторів пов'язаний з певним видом деформації.

Для визначення внутрішніх силових факторів у загальному вигляді, відповідно до методу перетинів, записують шість умов рівноваги сил, що діють на залишену частину бруса (використовують шість рівнянь статички). Прирівнюють до нуля алгебраїчні суми проекцій усіх сил, прикладених до цієї частини на осі OX , OY , OZ , і алгебраїчні суми моментів цих сил відносно тих самих осей:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & N_X + \sum F_{iX} &= 0; \\ \sum Y &= 0; & Q_Y + \sum F_{iY} &= 0; \\ \sum Z &= 0; & Q_Z + \sum F_{iZ} &= 0; \\ \sum M_X &= 0; & M_{KP} + \sum M_X(F_i) &= 0; \\ \sum M_Y &= 0; & M_{3\Gamma.Y} + \sum M_Y(F_i) &= 0; \\ \sum M_Z &= 0; & M_{3\Gamma.Z} + \sum M_Z(F_i) &= 0. \end{aligned}$$

Епюра – це графік, який показує розподіл внутрішніх силових факторів або переміщень уздовж осі стержня (бруса), тобто від перетину до перетину.

Правила, які застосовують при побудові епюр в стержнях:

Вісь (базу), на якій будують епюру, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна, або збігалася з віссю стержня.

Ординати епюри відкладають перпендикулярно до осі епюри.

Епюри штрихують лініями перпендикулярними до осі (базис).

Для зусиль та моментів вибирають певний масштаб. Ординати відкладають в масштабі. На епюрах проставляють числа, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри ставлять знак зусилля, який вписують у коло.

Приклад. Для плоскої системи сил (рис. 1.4), використовуючи метод перетинів, запишемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & N + \sum F_{1X} &= 0; \\ \sum Y &= 0; & Q + \sum F_{1Y} &= 0; \\ \sum M_Y &= 0; & M_{3\Gamma} + \sum M_0(F_1) &= 0. \end{aligned}$$

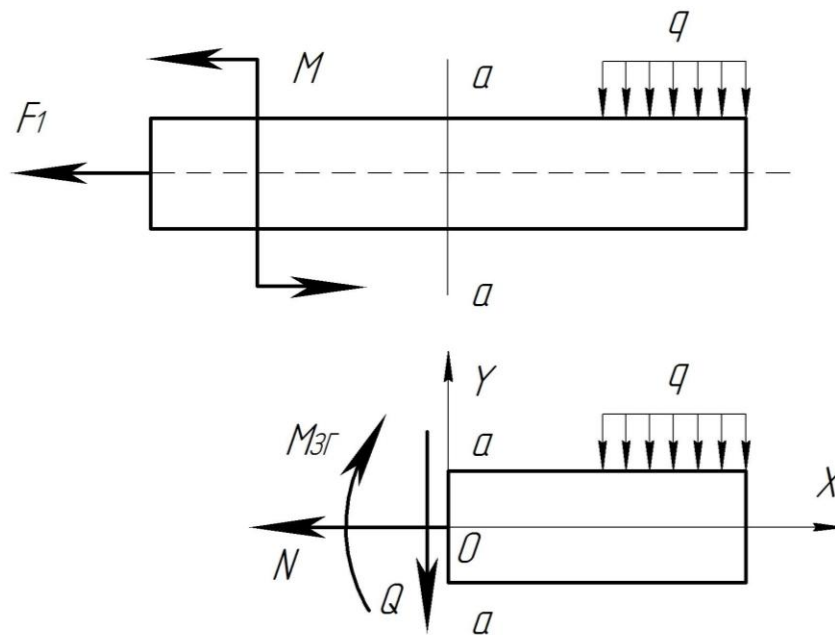


Рисунок 1.4

1.7. Напруження. Види напруження. Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами

Напруження – величина, яка характеризує інтенсивність внутрішніх сил. Розглянемо деяке тіло, що перебуває у рівновазі під дією заданих навантажень. Використовуючи метод перетинів умовно розріжемо його деякою площиною і відкинемо одну з частин. Розглянемо рівновагу залишеної частини тіла (рис. 1.5). На кожній елементарній площадці ΔA виникає внутрішня сила ΔR , інтенсивність якої p . Повне напруження визначають за формулою

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

де ΔR – внутрішня сила, тобто зусилля, прикладене до виділеної площі;
 ΔA – елементарна площа перетину, на якій виникає зусилля ΔR .

Ця інтенсивність і є повним напруженням на площадці з нормаллю. Тобто **напруження** – це внутрішня сила, що припадає на одиницю площі перетину.

Внутрішню силу ΔR можна розкласти на дві складові: одна направлена перпендикулярно до перетину ΔN ; друга лежить у площині перетину ΔQ . Напруження, що виникають у перетині від цих складових, називають **нормальним** і **дотичним**.

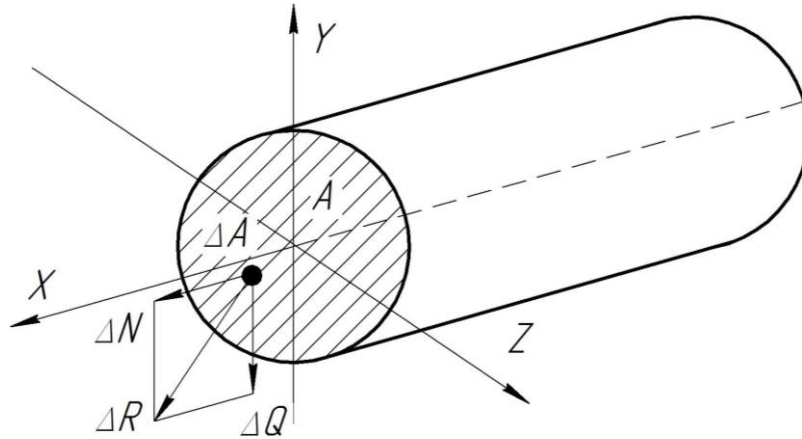


Рисунок 1.5

Дотичне напруження – це інтенсивність дотичних сил у даній точці перетину

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

Нормальне напруження – це інтенсивність нормальних сил у даній точці перетину

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}.$$

Повне напруження у точці визначають за формулою

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Розмірність напружень $1 \text{ Па} = \text{Н} / \text{м}^2$, $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н} / \text{мм}^2$.

Зв'язок напружень з внутрішніми силовими факторами

Сукупність напружень σ і τ , які діють на різних площадках елементарного кубика dA , створюють напружений стан (рис. 1.6):

$$\sigma dA = dN; \quad \tau_y dA = dQ_y; \quad \tau_z dA = dQ_z.$$

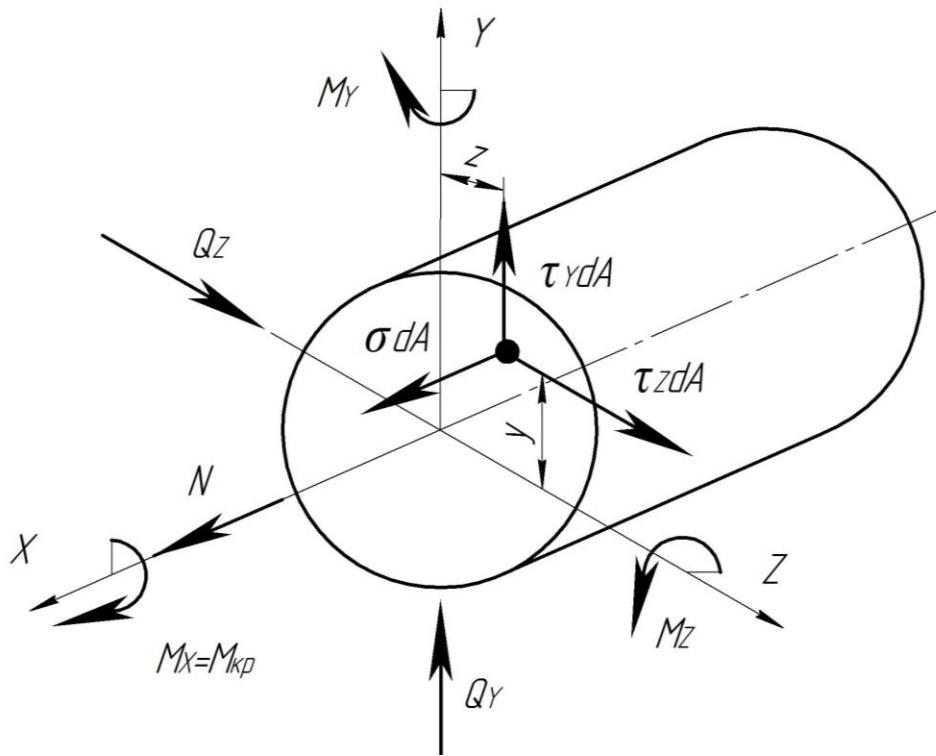


Рисунок 1.6

Нормальні і дотичні напруження безпосередньо пов'язані з внутрішніми силовими факторами, що виникають у перетині:

$$N = \int_A \sigma dA;$$

$$Q_Y = \int_A \tau_Y dA;$$

$$Q_Z = \int_A \tau_Z dA;$$

$$M_{KP} = \int_A (\tau_Y \cdot y - \tau_Y \cdot z) dA;$$

$$M_Y = \int_A \sigma \cdot z dA;$$

$$M_Z = \int_A \sigma \cdot y dA.$$

1.8. Диференціальні рівняння рівноваги

Повне напруження, яке виникає в тілі, у декартовій системі координат можна представити складовими вздовж координатних осей X, Y, Z . Позначимо їх $X_{\mathcal{G}}, Y_{\mathcal{G}}, Z_{\mathcal{G}}$ (\mathcal{G} – нормаль до перетину).

Використовуючи метод перетинів, розглянемо пружне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією системи зовнішніх навантажень (рис. 1.7).

Для площадок, які паралельні координатним площинам, нормальми є осі координат. Для площадки паралельної площині YOZ (рис. 1.7) нормаллю є вісь X і складові напруження будуть X_x, Y_x, Z_x . Складова X_x направлена вздовж нормалі до площадки і тому є нормальним напруженням на площадці з нормаллю X . Позначимо її σ_x .

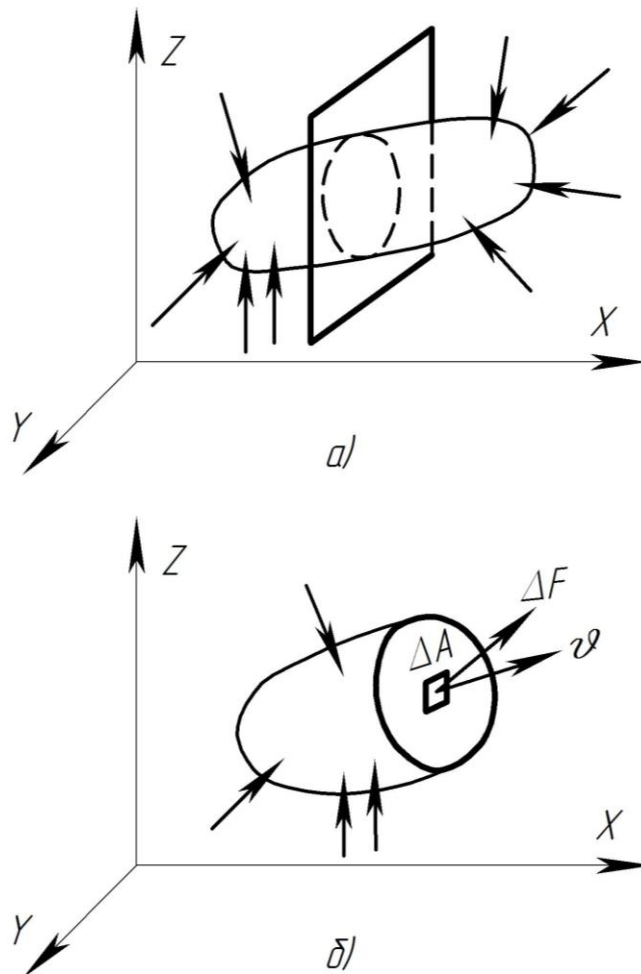


Рисунок 1.7

Складові Y_x і Z_x лежать у площині площадки, тому є складовими повного дотичного напруження τ_x і позначають їх τ_{yx} і τ_{zx} . Називають їх дотичними напруженнями на площадці з нормаллю X , направленими вздовж осей Y і Z .

Аналогічно, на площадці з нормаллю Y отримаємо нормальне напруження σ_y і дотичні τ_{xy} і τ_{zy} . На площадці з нормаллю Z отримаємо нормальне напруження σ_z і дотичні τ_{xz} і τ_{yz} .

Нормальні напруження вважають додатними при розтягу матеріалу конструкції.

Для визначення знака дотичного напруження використовують поняття «знака нормалі».

Зовнішню нормаль до площадки вважають додатною, якщо вона направлена у бік паралельної до неї координатної осі і від'ємною, якщо направлена у протилежний бік. Дотичне напруження додатне, якщо на площадці з додатною зовнішньою нормаллю воно направлено у бік паралельної йому координатної осі, або, на площадці із від'ємною зовнішньою нормаллю направлено у бік зворотний паралельної йому координатної осі.

Схематично це правило записують так:

(знак τ) = (знак зовнішньої нормалі) × (знак напрямку τ).

Через прийняті допущення напруження є неперервними функціями координат.

Розглянемо детальніше виділений з тіла (див. рис. 1.7) елементарний паралелепіпед з гранями, паралельними координатним площинам (рис. 1.8).

На гранях цього паралелепіпеда виникають три нормальних – σ_x , σ_y , σ_z і шість дотичних – τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{zy} напружень. Ці напруження можна записати у вигляді таблиці (матриці), де на головній діагоналі будуть записані нормальні напруження, а відповідні дотичні напруження, що діють на даній грані, будуть розташовані вище або нижче нормальних напружень у стовпчику цієї квадратної матриці:

$$\{T_\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x, & \tau_{xy}, & \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, & \sigma_y, & \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Така матриця буде симетричною, бо за законом парності дотичних напружень між дотичними напруженнями, що діють на двох взаємно перпендикулярних площинах, справедливі рівності:

$$|\tau_{yx}| = |\tau_{xy}|; \quad |\tau_{zx}| = |\tau_{xz}|; \quad |\tau_{zy}| = |\tau_{yz}|. \quad (1.2)$$

Побудовану таким чином симетричну квадратну матрицю $\{T_\sigma\}$ називають ще **тензором напружень**. *Напруження, які є складовими тензора напружень, називають компонентами тензора напружень*. Наявність тензора напружень означає, що нам відомі всі напруження, які діють на будь-яких площинах, проведених навколо точки, тобто напружений стан у точці тіла точно відомий.

Розглянемо рівновагу тіла під дією складових напружень на гранях (рис. 1.8) і об'ємного навантаження, яке представлено складовими з інтенсивністю X, Y, Z .

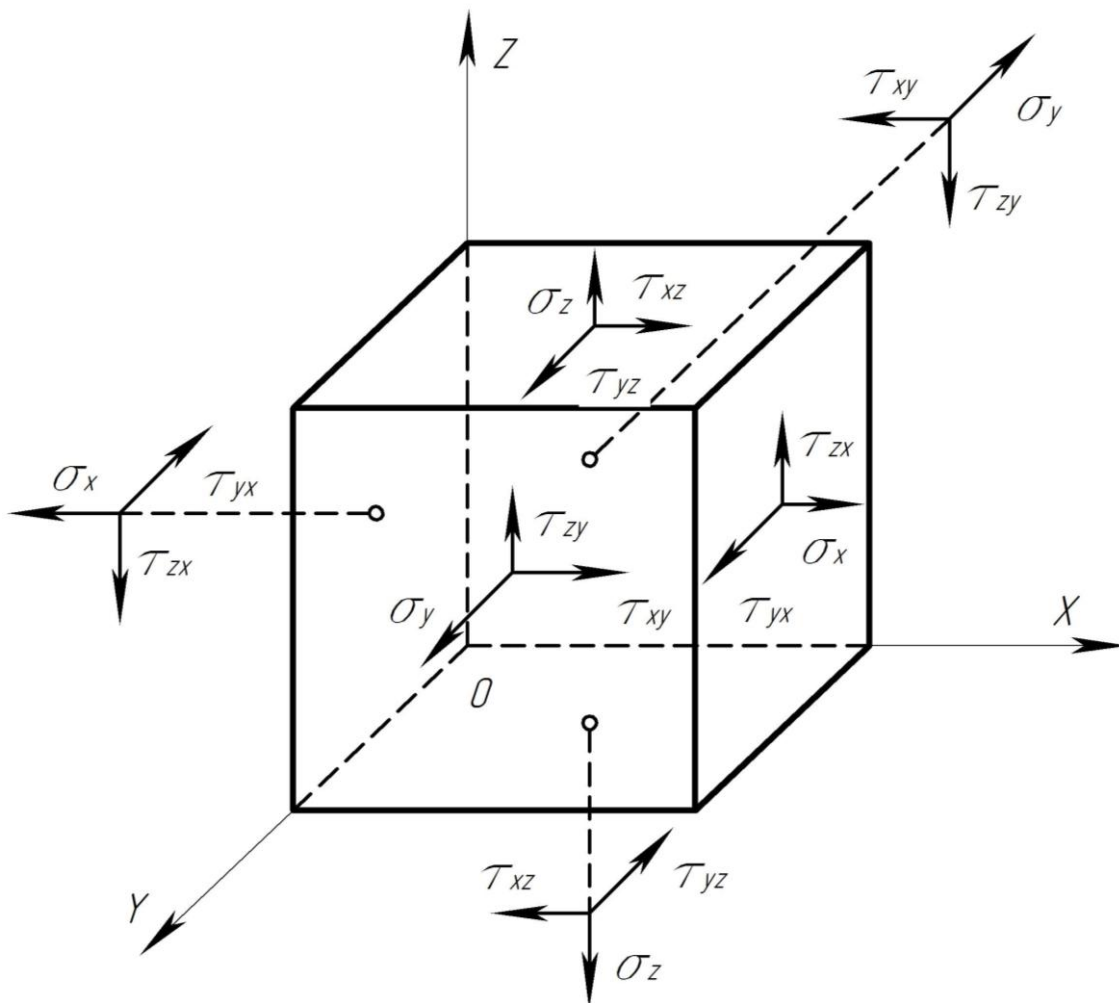


Рисунок 1.8

Проекція сил на вісь X

$$\begin{aligned} \sum X = & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x \cdot dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz - \\ & - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{xz} dxdy + X dxdz dy = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Розкриваючи дужки, зводимо подібні і скорочуючи решту складових на $dx dy dz$, отримуємо рівняння

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad (1.4)$$

Аналогічно записуємо умови $\sum Y = 0$ і $\sum Z = 0$. У результаті отримуємо систему трьох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Це диференціальні рівняння рівноваги, які називають **рівняннями Нав'є**.

Рівняння Нав'є встановлюють співвідношення між напруженнями і об'ємним навантаженням.

Розглянемо умови рівності нулю моментів відносно координатних осей. Відносно осі X

$$\begin{aligned} \sum M_{OX} &= \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dy}{2} - \sigma_x dy dz \frac{dy}{2} + \\ &+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) dy dz dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz dy - \\ &- \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dx}{2} + \sigma_y dx dz \frac{dx}{2} + \\ &+ \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy \cdot \frac{dy}{2} - \tau_{xz} dx dy \cdot \frac{dy}{2} + \\ &+ \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \right) dx dy \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{yz} dx dy \cdot \frac{dx}{2} + \\ &+ X dx dy dz \frac{dy}{2} - Y dx dy dz \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Розкриваючи дужки у виразі (1.6) зводимо подібні. Частина складових, що залишилася, включає добуток трьох диференціалів, тобто має третій порядок малості. Друга частина включає добуток чотирьох диференціалів, тобто має четвертий порядок малості. Нехтуючи доданками четвертого порядку малості, скоротимо ті, що залишилися, на $dx dy dz$. У результаті отримаємо

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (1.7)$$

Решту умов $\sum M_{OY} = 0$ і $\sum M_{OZ} = 0$ дадуть аналогічні співвідношення, тобто:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}; \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Отримані рівняння (1.8) – це **закон парності дотичних напружень**.

Так як система координат може бути вибрана довільним чином, то співвідношення (1.8) можуть бути віднесені до будь-яких двох взаємно перпендикулярних площадок. Тому закон парності дотичних напружень звучить так: **дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках направлені перпендикулярно до лінії їх перетину і дорівнюють одні одним**.

1.9. Напруження на нахилених площадках

Розглянемо елементарний тетраедр $Oabc$ (рис. 1.9). На нахиленій площадці abc з нормаллю \mathcal{G} діють напруження, складові яких $X_{\mathcal{G}}, Y_{\mathcal{G}}, Z_{\mathcal{G}}$. На площадках, що лежать на координатних площинах, напруження зобразимо їх нормальними і дотичними складовими.

Якщо площа нахиленої площадки abc дорівнює dA , то площі решти граней:

$$A_{aob} = l \cdot dA; \quad A_{cob} = m \cdot dA; \quad A_{aoc} = k \cdot dA, \quad (1.9)$$

де

$$l = \cos(\mathcal{G}, x); \quad m = \cos(\mathcal{G}, y); \quad k = \cos(\mathcal{G}, z) -$$

– направляючі косинуси зовнішньої нормалі ν площадки abc .

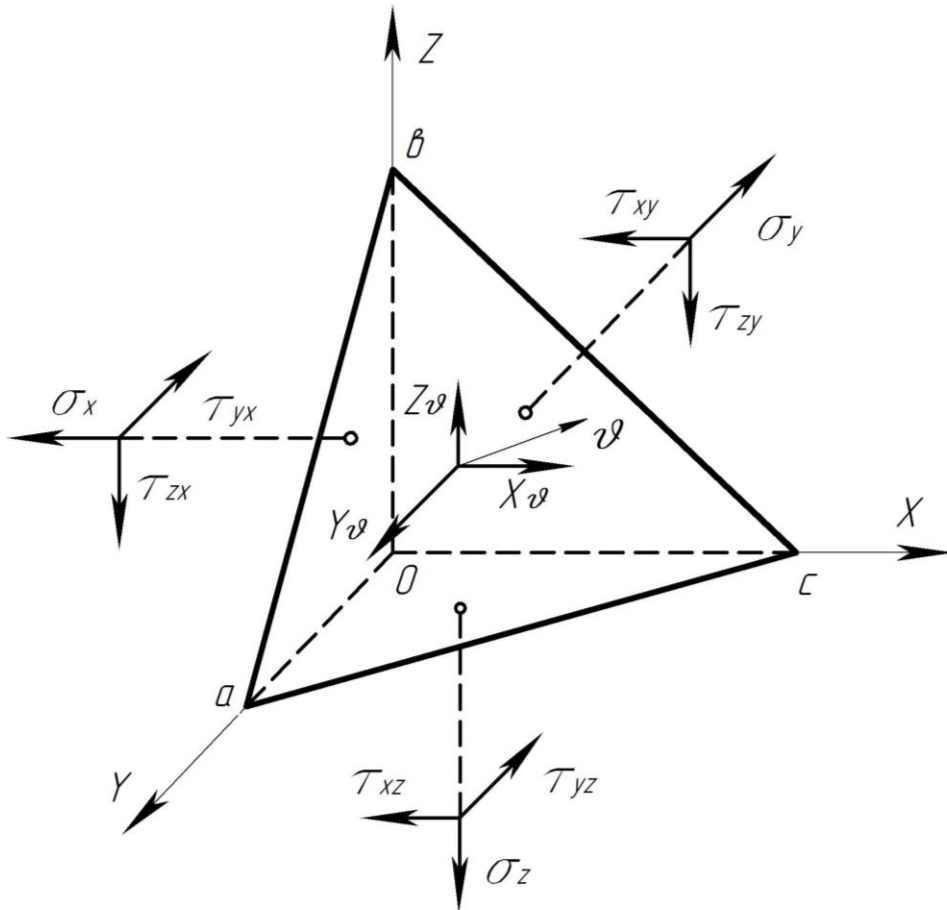


Рисунок 1.9

Спроекуємо напруження і об'ємне навантаження тетраедра на вісь X :

$$\sum X = X_g \cdot dA - \sigma_x \cdot l dA - \tau_{xy} \cdot m dA - \tau_{xz} \cdot k dA + X dV = 0. \quad (1.10)$$

Враховуючи, що об'єм dV визначають як добуток трьох диференціалів, відкинемо останній доданок, як величину третього порядку малості порівняно з решти доданками, що містить площу dA . Після скорочення на dA отримаємо

$$X_g = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k. \quad (1.11)$$

Приєднуючи аналогічні співвідношення, визначені з умов $\sum Y = 0$ і $\sum Z = 0$, отримаємо вирази для напружень на нахиленій площадці:

$$\left. \begin{aligned} X_g &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k; \\ Y_g &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot k; \\ Z_g &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot k. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Якщо нахилена площадка знаходиться на поверхні тіла, то складові напружень X_g, Y_g, Z_g – це складові інтенсивності поверхневого навантаження. В такому випадку рівняння (1.12) встановлюють співвідношення між поверхневим навантаженням і напруженнями у точках на поверхні тіла. Такі співвідношення називають **умовами на поверхні або граничними умовами**.

Рівняння (1.5) і (1.12) – це повна система статичних рівнянь. **Якщо тіло перебуває у рівновазі, то для всіх його внутрішніх точок виконуються рівняння Нав'є, а для всіх зовнішніх – умови рівноваги. І навпаки, якщо для всіх внутрішніх точок виконуються рівняння Нав'є, а для всіх зовнішніх – умови на поверхні, то тіло перебуває у рівновазі.**

1.10. Головні напруження. Інваріанти напруженого стану

Якщо одночасно на трьох взаємно перпендикулярних гранях паралелепіпеда (див. рис. 1.8) діють нормальні напруження (незалежно від величини дотичних), то такий напружений стан у даній точці тіла називають **просторовим, або тривимірним**. Разом з тим, завжди можна знайти таких три взаємно перпендикулярних напрямки, які є нормаллями до площадок, де діють тільки нормальні напруження, а дотичні повністю відсутні. **Такі площадки називають головними, а нормальні напруження, що діють на них, – головними напруженнями.** Доведено, що головні напруження є екстремальними у даній точці тіла.

Розглянемо в довільній точці тіла (див. рис. 1.9) деяку площадку з нормаллю \mathcal{G} . Положення площадки у декартовій системі координат визначають направляючі косинуси l, m, k нормалі \mathcal{G} .

Якщо задані складові X_g, Y_g, Z_g повного напруження на площадці, то повний напружений стан можна визначити як геометричну суму складових:

$$p_g = \sqrt{X_g^2 + Y_g^2 + Z_g^2}. \quad (1.13)$$

Нормальне напруження на площадці отримаємо спроектувавши складові X_g , Y_g , Z_g на нормалі до площадки:

$$\sigma_g = X_g \cdot l + Y_g \cdot m + Z_g \cdot k. \quad (1.14)$$

Розглянемо нормальне напруження через напруження на площадках, які паралельні координатним площинам. Для цього у вираз (1.14) підставимо X_g , Y_g , Z_g з (1.10):

$$\begin{aligned} \sigma_g = & (\sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k) \cdot l + (\tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot k) \cdot m + \\ & + (\tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot k) \cdot k \end{aligned}$$

чи

$$\begin{aligned} \sigma_g = & \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot k^2 + 2\tau_{xy} \cdot m \cdot l + \\ & + 2\tau_{yz} \cdot m \cdot k + 2\tau_{zx} \cdot l \cdot k. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Дотичне напруження на розглядуваній площадці

$$\tau_g = \sqrt{p_g^2 - \sigma_g^2}. \quad (1.16)$$

При повороті площадки нормальне і дотичне напруження змінюються. Площадку, на якій дотичне напруження перетворюється в нуль, називають **головною**. **Повне напруження на головній площадці співпадає з нормаллю і є нормальним напруженням.** Таке напруження позначають σ і називають **головним напруженням**.

Спроектуємо головне напруження на осі координат:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot l = X_g &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k; \\ \sigma \cdot m = Y_g &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot k; \\ \sigma \cdot k = Z_g &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot k. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Переносячи всі доданки в один бік, отримаємо рівняння

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k &= 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot k &= 0; \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Для отримання повної системи рівнянь до рівнянь (1.18) необхідно приєднати співвідношення між напрямляючими косинусами:

$$l^2 + m^2 + k^2 = 1, \quad (1.19)$$

яке дійсне в декартовій системі координат.

Три рівняння (1.18) є лінійними однорідними алгебраїчними рівняннями відносно направляючих косинусів. Оскільки l, m, k не можуть одночасно перетворитися в нуль, то нулю має дорівнювати визначник цієї системи:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.20)$$

Розкриваючи визначник, отримаємо кубічне рівняння відносно головних напружень:

$$\sigma^3 - S_1 \cdot \sigma^2 + S_2 \cdot \sigma - S_3 = 0. \quad (1.21)$$

Коефіцієнтами цього рівняння є величини:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ S_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ S_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Розв'язок рівняння (1.21) дає три дійсних, суттєвих корені, які є головними напруженнями. Ці напруження нумерують в порядку спадання

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1.23)$$

Три головні площадки, які відповідають напруженням $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ перпендикулярні одна одній.

Головні напруження не залежать від обраної системи координат, тому вони є інваріантами (величинами, що не змінюються) **перетворення координат.**

Величини головних напружень, а отже, і коефіцієнти S_1, S_2, S_3 рівняння (1.21) не залежать від вибору системи координат. Тому S_1, S_2, S_3 називають **інваріантами напруженого стану в точці тіла.**

Інваріанти можна виразити і через головні напруження:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ S_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ S_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

У теорії пластичності використовують також інші інваріантні величини. Так, величину

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.25)$$

називають *інтенсивністю дотичних напружень у точці*. Ця величина – це *октаедричне напруження, тобто дотичне напруження на площадці, рівнонахилений до всіх головних площадок*.

Замість τ_i часто розглядають еквівалентну йому величину

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (1.26)$$

яку називають *інтенсивністю напружень*.

Тут множник $1/\sqrt{2}$ підібраний так, щоб при лінійному напруженому стані інтенсивність напружень дорівнювала напруженню розтягу σ .

1.11. Основи теорії напруженого стану в точці.

Розрахунки на міцність при складному напруженому стані

Через будь-яку точку тіла можна провести безліч площин (площадок), і на кожній з них діють різні нормальні σ та дотичні τ напруження. *Сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють на безлічі площин, які проходять через точку, що розглядається, утворює напружений стан у точці*.

Напружений стан у точці визначають шістьма незалежними компонентами напружень, а саме:

$$\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z; \tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.27)$$

Останні три залежності (1.27) мають назву *закону парності дотичних напружень, відповідно до якого на будь-яких двох взаємно перпендикулярних площинах дотичні напруження дорівнюють за величиною і протилежні за знаком*.

Доведено, що серед безлічі площин, які можна провести через досліджувану точку, завжди є такі три взаємно перпендикулярні площини, на яких нормальні напруження набувають екстремальних значень, а дотичні напруження дорівнюють нулю. Ці площини мають назву головних площин, а напруження на них – головних напружень. Ці напруження прийнято позначати в порядку зростання $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$. Вони повністю визначають напружений стан тіла в точці.

Залежно від наявності головних напружень, відмінних від нуля, розрізняють:

- об'ємний напружений стан, якщо всі три головних напруження не дорівнюють нулю;
- плоский напружений стан, якщо два головних напруження відмінні від нуля;
- лінійний (одновісний) напружений стан, якщо відмінним від нуля є тільки одне головне напруження.

Розглянемо плоский напружений стан (рис. 1.10).

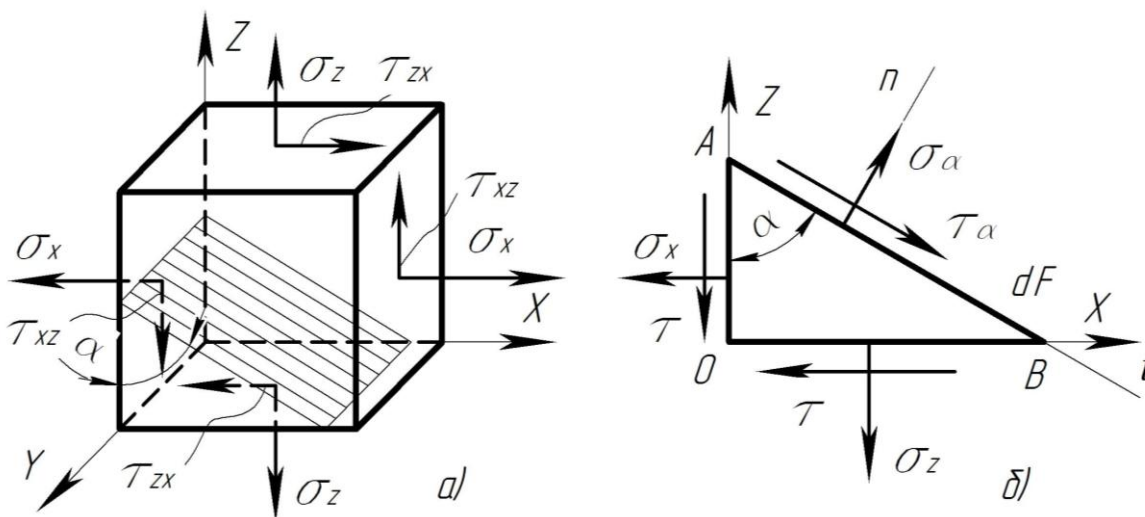


Рисунок 1.9

Для елементарного куба, виділеного навколо досліджуваної точки нормальні (σ_α) і дотичні (τ_α) напруження на довільній площадці, яка розташована під кутом α , дорівнюють

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha; \quad (1.28)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha - \tau \cos 2\alpha. \quad (1.29)$$

Сума нормальних напружень, що діють на двох взаємно перпендикулярних площинах, є величиною постійною (властивість інваріантності нормальних напружень).

Головним площинам відповідають екстремальні нормальні напруження (головні напруження).

Величини головних (екстремальних) напружень і їх напрямки визначають за формулами:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau^2}; \quad (1.30)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma_z - \sigma_x}. \quad (1.31)$$

Нормальні і дотичні напруження на довільно орієнтованих площадках відносно до головних визначають так:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha; \quad (1.32)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (1.33)$$

Якщо пропорційно збільшувати усі значення головних напружень $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, то можна досягти небезпечного напруженого стану. Число, яке показує, у скільки разів необхідно збільшити усі компоненти напруженого стану, щоб він став небезпечним, називають коефіцієнтом запасу міцності і позначають n .

Якщо у двох напружених станах коефіцієнти запасу міцності дорівнюють один одному, то такі **напружені стани називають рівнонебезпечними або еквівалентними**. Напруження при одновісному напруженому стані, рівнонебезпечному заданому, називають еквівалентним напруженням $(\sigma_{\text{екв}})$.

Коефіцієнт запасу визначають з виразу

$$n = \frac{\sigma_{\text{неб.р}}}{\sigma_{\text{екв}}}, \quad (1.34)$$

де $\sigma_{\text{неб.р}}$ – небезпечне напруження розтягу.

Якщо є залежність між двома рівнонебезпечними станами, один з яких лінійний, тобто між $\sigma_{\text{екв}}$ та $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то задача розрахунку на міцність у випадку складного напруженого стану буде розв'язана.

У загальному випадку, як еквівалентне напруження для пластичних матеріалів використовують інтенсивність напружень (за Мізесом), яку визначають за формулою

$$\sigma_{екв} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (1.35)$$

Для встановлення залежності між рівнонебезпечними станами при плоскому напруженому стані найчастіше використовують теорію, запропоновану О.Мором (1882 р.), яка ґрунтується на експерименті і дозволяє оцінювати міцність як пластичних, так і крихких матеріалів.

Згідно з цією теорією еквівалентні напруження

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - K \cdot \sigma_3. \quad (1.36)$$

У залежності (1.36) коефіцієнт K є відношенням граничних характеристик міцності при розтягу і стиску. Для крихких матеріалів, як правило, $K < 1$, для пластичних $K = 1$.

Враховуючи (1.30), отримаємо:

$$\sigma_{екв} = \frac{1-K}{2} (\sigma_x - \sigma_z) + \frac{1+K}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau^2}. \quad (1.37)$$

Якщо $K=1$ і має місце спрощений плоский напружений стан, коли $\sigma_z = \sigma$, а $\sigma_y = 0$, то (1.37) набуває вигляду:

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (1.38)$$

Цю формулу застосовують при розрахунку конструкцій, що зазнають згину з крученням.

У випадку одновісного розтягу $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_3 = 0$ і згідно з виразом (1.37) $\sigma_{екв} = \sigma$. При чистому зсуві для матеріалів із $K=1$, $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_3 = -\tau$; еквівалентні напруження $\sigma_{екв} = 2\tau$.

Визначивши коефіцієнт запасу міцності за формулою (1.34), можна записати умову міцності у вигляді

$$n \geq [n], \quad (1.39)$$

де $[n]$ – допустимий коефіцієнт запасу міцності.

Тема 2

ЦЕНТРАЛЬНИЙ РОЗТЯГ І СТИСК ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ. ЗСУВ. КРУЧЕННЯ. ДЕФОРМАЦІЇ ТІЛА. ЗАКОН ГУКА

- 2.1. Центральний розтяг і стиск стержня. Напруження у поперечних перетинах стержня**
- 2.2. Поздовжні і поперечні деформації. Закон Гука. Діаграми розтягу (стиску).**
- 2.3. Потенціальна енергія деформації. Допустимі напруження. Розрахунок на міцність**
- 2.4. Зсув. Напруження, деформація і закон Гука при зсуві**
- 2.5. Кручення стержня круглого поперечного перетину. Напруження і переміщення при крученні**
- 2.6. Статично невизначені системи при крученні. Розрахунок гвинтових пружин**
- 2.7. Переміщення, лінійні і кутові деформації тіла**
- 2.8. Об'ємна деформація тіла. Умови сумісності деформацій**
- 2.9. Узагальнений закон Гука**
- 2.10. Зворотна форма закону Гука**

2.1. Центральний розтяг і стиск стержня.

Напруження у поперечних перетинах стержня

Центральний (осьовий) розтяг або стиск виникає від сил, прикладених уздовж осі бруса. Напружений стан, викликаний такими силами, називають простим або лінійним.

Розтяг (стиск) – це такий вид деформації (вид опору), при якому в поперечних перетинах бруса виникає тільки **поздовжня (осьова, нормальна) сила** – N або N_x , спрямована вздовж осі бруса і прикладена в центрі ваги перетину. Визначають її з умови рівноваги, використовуючи **метод перетинів**, починаючи з вільного кінця стержня.

Поздовжня сила у довільному поперечному перетині бруса дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на його поздовжню вісь Ox усіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини.

При розтягу поздовжня сила направлена від перетину і вважається **додатною**, при стиску вона спрямована до перетину і вважається **від'ємною**.

Для оцінювання навантаженості бруса, у випадку, коли поздовжні сили у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, будують епюри. При побудові епюр брус розділяють на ділянки. Епюру будують для того, щоб використати її при розрахунку на міцність. Вона дає можливість визначити найбільше значення поздовжньої сили і перетин, у якому вона виникає, тобто небезпечний (щодо міцності) перетин.

Напруження у поперечних перетинах стержня

При розтягу (стиску) бруса у його поперечних перетинах виникають тільки **нормальні напруження**.

При розтягу (стиску) бруса нормальні напруження на його поперечному перетині **розподілені рівномірно**.

Між поздовжньою (нормальною) силою N і нормальним напруженням σ (рис. 2.1) існує залежність

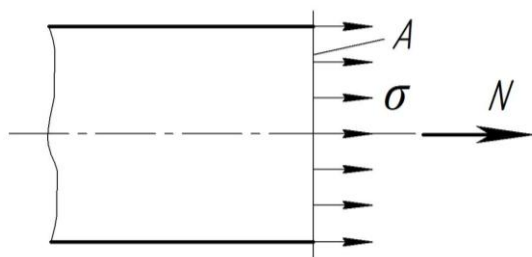


Рисунок 2.1

$$N = \int_A \sigma \cdot dA.$$

Вважаємо, що $\sigma = const$, тоді

$$N = \sigma \cdot A,$$

Звідки

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Нормальні напруження додатні, якщо розтягують матеріал стержня, від'ємні, – якщо стискають.

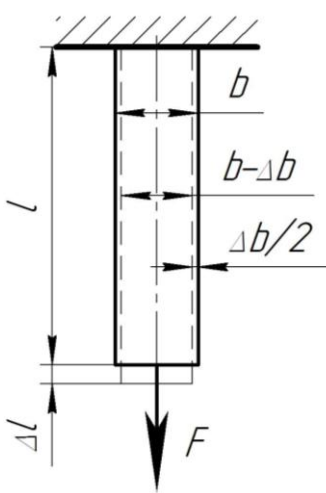
Якщо нормальні напруження у різних поперечних перетинах бруса неоднакові, доцільно показувати закон їх зміни на довжині бруса у вигляді графіка – *епюри нормальних напружень*.

Дотичні напруження додатні, якщо вектор τ обходить елементи матеріалу за годинниковою стрілкою.

2.2. Поздовжні і поперечні деформації.

Закон Гука. Діаграми розтягу (стиску).

Розглянемо деформацію стержня, навантаженого осьовою силою F (рис. 2.2):



Δl – повне поздовжнє видовження стержня (абсолютна поздовжня деформація, лінійне видовження, лінійна деформація);

Δb – абсолютна поперечна деформація (лінійна деформація);

ε – відносна поздовжня деформація, $\varepsilon = \Delta l / l$;

ε' – відносна поперечна деформація, $\varepsilon' = \Delta b / b$.

До певної величини сили деформації пружного тіла пропорційні силі. При розтягу (стиску) існує лінійна залежність між видовженням стержня і поздовжньою силою.

Рисунок 2.2

Експериментально доведено, що напруження у матеріалі стержня залежать від деформації й механічних характеристик матеріалу. Описується ця залежність як **закон Гука при розтягу (стиску)**

$$\sigma = \varepsilon \cdot E; \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де E – модуль пружності (модуль пружності I-го роду, модуль Юнга, модуль нормальної пружності, модуль поздовжньої пружності).

Експериментально встановлено, що при простому розтягу або стиску відношення поперечної деформації до поздовжньої величина постійна для даного матеріалу. Це відношення, взяте за абсолютним значенням, називають коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона

$$\mu = |\varepsilon' / \varepsilon|,$$

E , μ – механічні характеристики матеріалу, визначають його пружні властивості. Для сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$.

Закон Гука справедливий лише до певної величини нормального напруження, яке називають границею пропорційності даного матеріалу.

Діаграма розтягу пластичних матеріалів.

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які визначають їх міцність, пластичність, а також пружні постійні E та μ , необхідні інженеру-конструктору для вибору матеріалу деталі та її розрахунку на міцність і жорсткість. Ці характеристики отримують експериментально. Для цього використовують лабораторне обладнання, на якому до взірця (рис. 2.3б) прикладають статичне навантаження на розтяг (стиск) і замірюють сили й деформації. Щоб виключити вплив абсолютних розмірів досліджуваного взірця, будують, так звану, умовну діаграму розтягу в координатах: відносне видовження ε , нормальне напруження σ . Для маловуглецевої сталі діаграма розтягу (стиску) зображена на рис. 2.3а. Позначення на діаграмі такі:

σ_{nc} – **границя пропорційності**, на даній ділянці деформація

пропорційна навантаженню, найбільше напруження, при досягненні якого справедливий закон Гука;

σ_{np} – **границя пружності**, до цього напруження матеріал зберігає пружні властивості (у взірці не виникає залишкових деформацій);

σ_T – **границя текучості** – напруження, при якому відбувається ріст пластичних деформацій взірця при постійному навантаженні, це – основна механічна характеристика для оцінювання міцності пластичних матеріалів (сталей);

σ_M – **границя міцності** – напруження, при якому відбувається руйнування матеріалу взірця, тобто умовне напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, яке витримує взірець до руйнування, основна механічна характеристика для оцінювання міцності крихких матеріалів (чавуни).

На ділянці ОК діаграми розтягу (див. рис. 2.3а) стверджується закон Гука

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{CK \cdot M_\sigma}{OC \cdot M_\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha \frac{M_\sigma}{M_\varepsilon},$$

де M_σ – масштаб напружень;

M_ε – масштаб відносних деформацій.

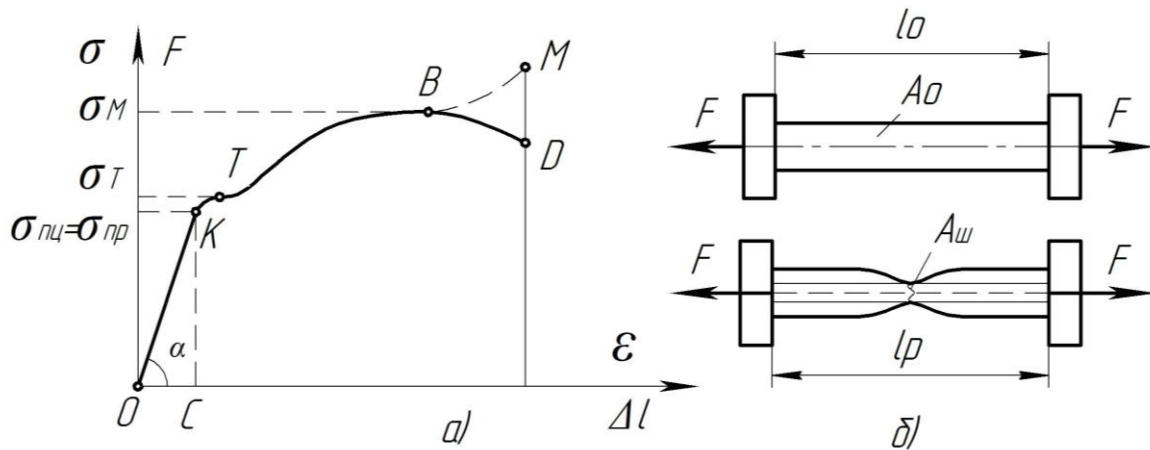


Рисунок 2.3

Степінь пластичності матеріалу характеризується величинами:

а) залишковим відносним видовженням

$$\delta = \frac{l_P - l_0}{l_0} \cdot 100\% ;$$

де l_0 – початкова довжина зірця;

l_P – довжина зірця після розриву;

б) залишковим відношенням звуження шийки зірця після руйнування

$$\psi = \frac{A_0 - A_{Ш}}{A_0} \cdot 100\% ;$$

де A_0 – початкова площа поперечного перетину;

$A_{Ш}$ – найменша площа поперечного перетину після руйнування.

Діаграма розтягу і стиску крихких матеріалів зображена на рис. 2.4. Пластичні матеріали однаково сприймають розтягуючі та стискуючі навантаження.

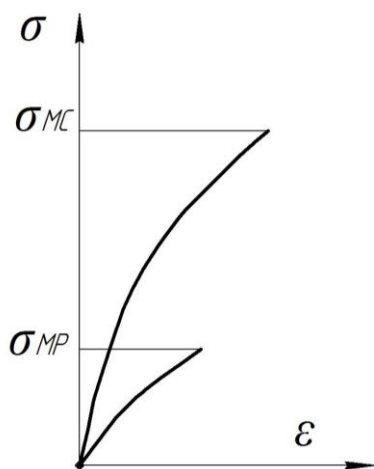


Рисунок 2.4

Граничними напруженнями для пластичних матеріалів, тобто напруженнями, яких може досягати матеріал, не втрачаючи своїх механічних характеристик, є границя текучості σ_T .

Крихкі матеріали добре сприймають стискуючі навантаження, погано – розтягуючі.

Для цієї групи матеріалів граничними напруженнями є

σ_{MC} – границя міцності на стиск та

σ_{MP} – границя міцності на розтяг.

2.3. Потенціальна енергія деформацій. Допустимі напруження.

Розрахунок на міцність

Потенціальна енергія деформацій

При статичному розтягу стержня (взірця) в межах застосування закону Гука сила F поступово збільшується від нуля до якогось значення, взірець деформується на величину Δl (див. рис. 2.2) і при цьому здійснює роботу W . Ця робота акумулюється у деформованому взірці у вигляді потенціальної енергії, тобто $W=U$.

Якщо діаграма розтягу (див. рис. 2.3а) побудована в координатах (F , Δl), то робота дорівнює площі трикутника OSK :

$$W = U = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta l,$$

$$\text{де } \Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}; \quad F = N.$$

Тоді

$$W = U = \frac{F^2 \cdot l}{2F \cdot A} = \frac{\sigma^2 \cdot A \cdot l}{2E} = \frac{\sigma^2 \cdot V}{2E},$$

де F – сила, що розтягує взірець, $F = \sigma \cdot A$;

V – об'єм тіла, тобто взірця, $V = A \cdot l$;

A – площа поперечного перетину взірця.

Питома потенціальна енергія – це енергія деформації, яка припадає на одиницю об'єму

$$U = \frac{W}{V} = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Допустимі напруження. Розрахунок на міцність

В опорі матеріалів розрізняють три види нормальних (і дотичних) напружень: **робочі, граничні, допустимі**.

Робочі (фактичні) напруження – це ті, що дійсно мають місце в елементі конструкції і визначаються розрахунками чи експериментально.

Граничні напруження – це ті, при яких матеріал руйнується, або в ньому виникають помітні залишкові деформації.

Для забезпечення міцності деталей необхідно, щоб напруження, які виникли у процесі їх експлуатації, були меншими за граничні. Але якщо робочі напруження дуже близькі до граничних (хоча й менші за них), то міцність деталі гарантувати не можна. Тому *при розрахунках на міцність робочі напруження порівнюють не з граничними, а з допустимими*.

Допустимі напруження – це такі, при яких гарантована безпечна робота деталі. Позначають їх $[\sigma]$ чи $[\tau]$ і визначають як деяку частину від граничних напружень, щоб гарантувати запас міцності:

а) для пластичних матеріалів (сталі)

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на розтяг і стиск;

n – коефіцієнт запасу міцності;

б) для крихких матеріалів (чавуни)

$$[\sigma]_P = \frac{\sigma_{MP}}{n}; \quad [\sigma]_C = \frac{\sigma_{MC}}{n},$$

де $[\sigma]_P$ – допустиме напруження на розтяг;

$[\sigma]_C$ – допустиме напруження на стиск.

Коефіцієнт запасу міцності для пластичних матеріалів $n = 1,2 \dots 2,5$;
для крихких матеріалів $n = 2 \dots 5$.

Умова міцності при розтягу-стиску

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

При розрахунках деталей на міцність основними є три види задач.

1. **Проектний розрахунок**, за яким визначають розміри поперечного перетину

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}.$$

2. **Перевірний розрахунок**, за яким визначають робочі (дійсні) напруження і порівнюють з допустимим

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma].$$

3. **Визначення допустимих навантажень**

$$[N] \leq [\sigma] \cdot A.$$

2.4. Зсув. Напруження, деформація і закон Гука при зсуві

Зсув (зріз) – це такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса діє тільки поперечна (перерізуюча) сила Q (рис. 2.5а). Деформація зсуву доведена до руйнування матеріалу – **зріз**.

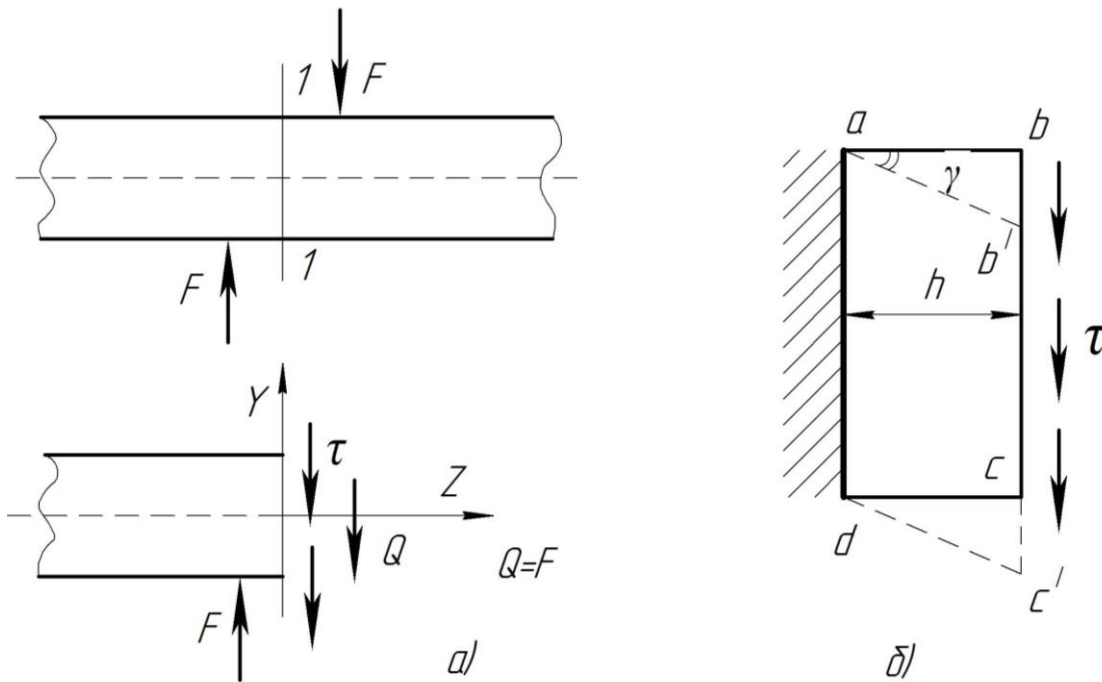


Рисунок 2.5

Вважаємо, що дотичні напруження, які виникають у поперечному перетині бруса при зсуві, $\tau = const$, тоді перерізуюча сила

$$Q = A \cdot \tau, \quad \text{тобто напруження } \tau = Q/A.$$

Умова міцності на зріз

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]_{ЗР},$$

де $[\tau]_{ЗР}$ – допустиме дотичне напруження, $[\tau]_{ЗР} = (0,25 \dots 0,35) \sigma_T$.

Деформація зсуву визначається кутом зсуву – γ . Абсолютний зсув бруса (рис. 2.5б) – bb' , cc' .

Закон Гука при зсуві

$$\tau = G \cdot \gamma,$$

де G – модуль зсуву, або модуль пружності II-го роду, характеризує жорсткість матеріалу.

Залежність між пружними характеристиками пластичного матеріалу (сталі) E , G , μ

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

2.5. Кручення стержня круглого поперечного перетину Напруження і переміщення при крученні

Кручення – вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перетині бруса виникає *тільки крутний момент*, M_{KP} .

Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса у площинах перпендикулярних до осі, прикладено пару сил M (рис 2.6). Моменти цих пар називають *обертаючими* (якщо брус обертається), позначають їх T і *скручувальними* (якщо брус не обертається), позначають їх M .

Брус круглого поперечного перетину, що працює на деформацію кручення, називають **валом**. Кручення зазнають вали двигунів та верстатів, інші металоконструкції. На кручення працюють також стержні з перетинами інших форм.

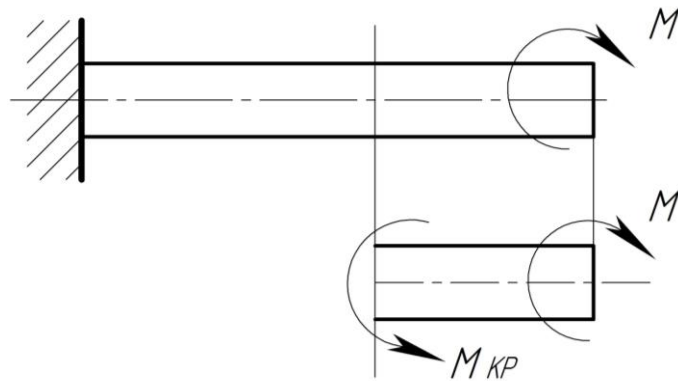


Рисунок 2.6

Крутний момент M_{KP} у будь-якому перетині вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх скручувальних моментів, прикладених до бруса справа чи зліва від перетину. Крутний момент вважають *додатним*, якщо при погляді у торець відсіченої частини вала (метод перетинів) він діє проти годинникової стрілки. При визначенні крутного моменту зовнішні скручувальні моменти входять до рівнянь зі знаком «плюс», якщо вони діють за годинниковою стрілкою.

Умови, при яких спостерігається **кручення**:

1. Вісь циліндра, називається віссю кручення, залишається прямолінійною після деформації.
2. Діаметри кіл нанесені на поверхню циліндра до деформації і після залишаються такими ж і відстань між ними не змінюється.
3. Твірні циліндра перетворюються у гвинтові лінії.

Напруження і переміщення при крученні

При крученні бруса у його поперечних перетинах виникають тільки дотичні напруження. Для круглого стержня (вала) дотичні напруження визначають за формулою

$$\tau = \frac{M_{KP}}{I_P} \cdot \rho,$$

де ρ – відстань від центра (полюса) круглого перетину до точки, в якій визначають дотичні напруження (рис. 2.7а).

Для розрахунку бруса на міцність при крученні, так як і при розтягу (стиску) необхідно визначити **небезпечний перетин**. У випадку, якщо розміри поперечного перетину на довжині бруса постійні, то небезпечними будуть перетини, у яких крутні моменти максимальні. Графік, який показує закон зміни крутних моментів на довжині бруса, називають **епюрою крутних моментів**. Будують її аналогічно епюрі поздовжніх сил, користуючись правилом визначення крутних моментів.

Епюра розподілу дотичних напружень за висотою поперечного перетину зображена на рис. 2.7б.

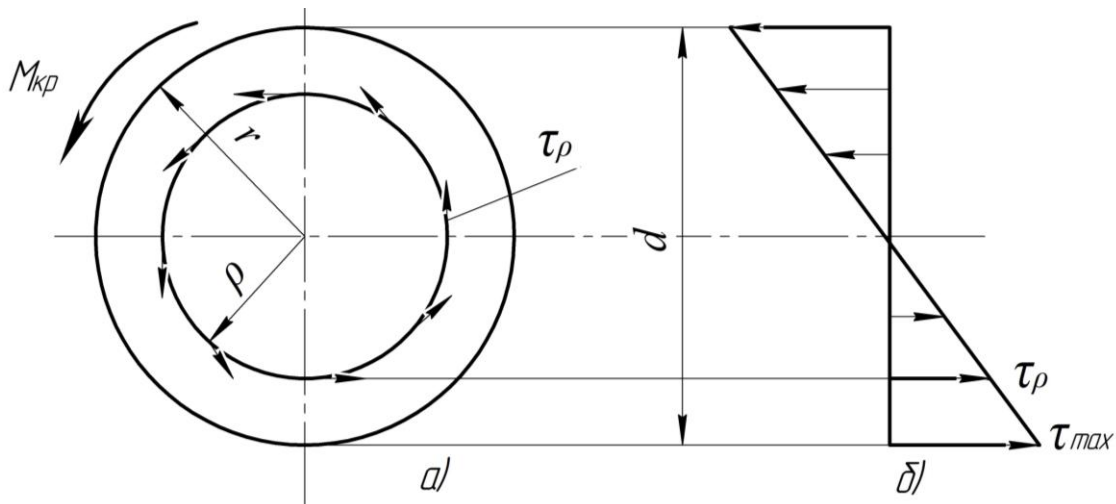


Рисунок 2.7

Дотичні напруження дорівнюють нулю в центрі перетину, $\rho = 0$ і досягають максимального значення у точках контура $\rho = d/2$. У проміжних точках перетину дотичні напруження лінійно залежать від відстані ρ (див. рис. 2.7б).

Оскільки

$$\frac{I_P}{(d/2)} = W_P, \quad \text{то} \quad \tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P}.$$

Сила $dQ = \tau_\rho \cdot dA$, тоді

$$M_{KP} = \int_A \rho dQ = \int_A \tau_\rho \rho dA = \int_A G \rho \theta \rho dA = G \theta \int_A \rho^2 dA = G \theta \cdot I_P;$$

де I_P – полярний момент інерції поперечного перетину бруса,

$$I_P = \int_A \rho^2 dA.$$

Умова міцності при крученні. Міцність вала забезпечується, якщо максимальне дотичне напруження не перевищує допустимого

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau],$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження при крученні, визначають залежно від допустимого напруження розтягу $[\sigma]_P$:

$$\text{для сталей} \quad [\tau] = (0,55 \dots 0,6) [\sigma]_P;$$

$$\text{для чавунів} \quad [\tau] = (1 \dots 1,2) [\sigma]_P.$$

З допомогою умови міцності вала при крученні розв'язують три типи задач.

1. Перевірка міцності (перевірний розрахунок), зводиться до порівняння фактичного (дійсного) та допустимого дотичних напружень за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau].$$

2. Добір поперечного перетину (проектний розрахунок), тобто визначення потрібних його розмірів з розрахунку полярного моменту опору

$$W_P \geq M_{KP} / [\tau], \quad \text{для круглого перетину} \quad d = \sqrt[3]{16 W_P / \pi}.$$

3. Визначення найбільшого допустимого крутного моменту

$$[M_{KP}] \leq [\tau] \cdot W_P.$$

Деформація при крученні характеризується поворотом поперечних перетинів вала один відносно одного на деякий кут φ – **кут закручування**. Для вала постійної жорсткості $G \cdot I_P$ довжиною l при постійному значенні крутного моменту M_{KP} кут закручування (повний кут закручування) визначають за формулами

$$\varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} [\text{рад}]; \quad \varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} [\text{град}].$$

Ці співвідношення називають **законом Гука при крученні**. Для циліндричного бруса, який має кілька ділянок, які різняться розмірами поперечного перетину, величиною крутного моменту, матеріалом, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок $\varphi = \sum \varphi_i$.

Повний кут закручування вала не повністю характеризує деформацію кручення, оскільки залежить від довжини вала. Жорсткість вала оцінюють **відносним кутом закручування**, який визначають за формулами

$$\theta = \varphi/l; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \left[\frac{рад}{м} \right]; \quad \theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \left[\frac{град}{м} \right].$$

Умова жорсткості вала при крученні. Жорсткість вала достатня, якщо найбільший відносний кут закручування не перевищує допустимого його значення

$$\theta = \frac{M_{KP}}{G \cdot I_P} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta],$$

де $[\theta]$ – допустимий кут закручування вала.

З допомогою умови жорсткості (як і умови міцності) виконують три види розрахунків конструкцій: **проектний, перевірний і визначення допустимого навантаження**.

2.6. Статично невизначені системи при крученні

Розрахунок гвинтових пружин

Приклад статично невизначеної системи при крученні показаний на рис. 2.8.

З умови рівноваги для вала звільненого від опор, отримаємо рівняння:

$$\sum M_X = 0; \quad M_C - M + M_B = 0.$$

Система $2-1=1$ раз статично невизначена.

Для розкриття статичної невизначеності складаємо рівняння сумісності деформацій

$$\Delta\varphi_C = 0; \quad \frac{M_C \cdot (a+b)}{G \cdot I_P} - \frac{M \cdot a}{G \cdot I_P} = 0;$$

звідки

$$M_C = \frac{M \cdot a}{a+b};$$

тоді

$$M_B = M - M_C = M - \frac{M \cdot a}{a+b} = \frac{M \cdot b}{a+b}.$$

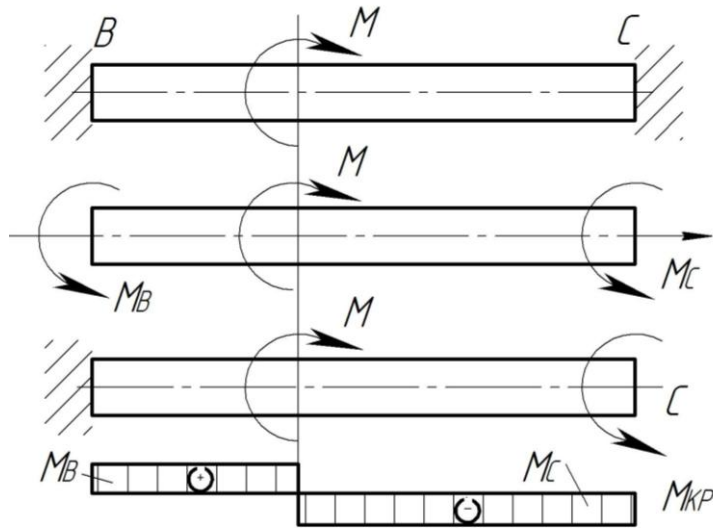


Рисунок 2.8

Розрахунок гвинтових пружин

У машинобудуванні найбільше застосування отримали циліндричні гвинтові пружини, які працюють на розтяг-стиск (рис. 2.9а).

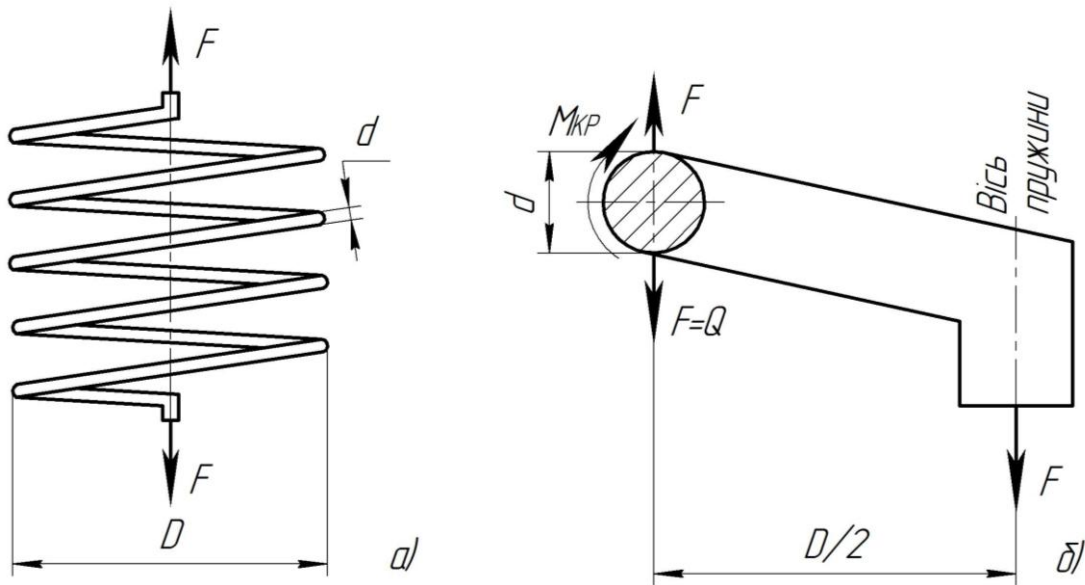


Рисунок 2.9

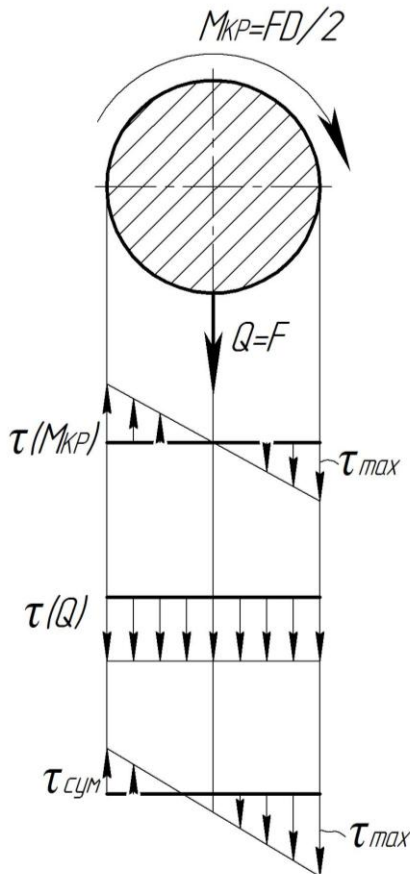
Такі пружини використовуються як амортизатори, тобто для пом'якшення ударів і поштовхів.

Для визначення напружень у матеріалі пружини розглянемо рівновагу частини пружини (рис. 2.9б).

У поперечному перетині матеріалу пружини діють:

перерізуюча сила $Q = F$; крутний момент $M_{KP} = F \cdot \frac{D}{2}$.

Отже, у матеріалі пружини виникають дотичні напруження від двох силових факторів, кручення та зрізу (рис. 2.10):



$$\tau_{\max KP} = \frac{M_{KP}}{W_P} = \frac{8F \cdot D}{\pi \cdot d^3};$$

$$\tau_Q = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2}.$$

Сумарні дотичні напруження відповідно

$$\tau_{\max} = \frac{8F \cdot D}{\pi \cdot d^3} + \frac{4F}{\pi \cdot d^2}.$$

Максимальні сумарні напруження виникають на внутрішніх волокнах пружини.

У багатьох випадках напруженнями від перерізуючої сили нехтують, тоді

$$\tau_{\max} = \frac{8F \cdot D}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau].$$

Рисунок 2.10

Пружини виготовляють із високоякісних легованих сталей, для яких $[\tau] = 200 \dots 800 \text{ МПа}$.

Для визначення осадки (переміщення) пружини, використаємо рівність $W = U$ роботи зовнішньої сили з потенціальною енергією деформації від крутного моменту (впливом Q нехтуємо)

$$U = \frac{1}{2} M_{KP} \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2} M_{KP} \cdot \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P};$$

де l – довжина дроту пружини, $l = \pi \cdot n \cdot D$;

n – кількість витків пружини;

G – модуль зсуву матеріалу пружини;

I_P – полярний момент інерції поперечного перетину дроту, з якого

виготовлена пружина, $I_P = \pi \cdot d^4 / 32$;

M_{KP} – величина крутного моменту, $M_{KP} = F \cdot (D/2)$.

З рівноваги $W = U$, враховуючи, що $W = (1/2)F \cdot \lambda$, отримаємо

$$\lambda = \frac{F \cdot D \cdot D \cdot \pi \cdot n \cdot D \cdot 32}{2 \cdot 2 \cdot G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{8F \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}.$$

2.7. Переміщення, лінійні і кутові деформації тіла

Напружений стан точки тіла характеризується дев'ятьма компонентами напружень, додатний напрямок яких показано на рис.2.11а.

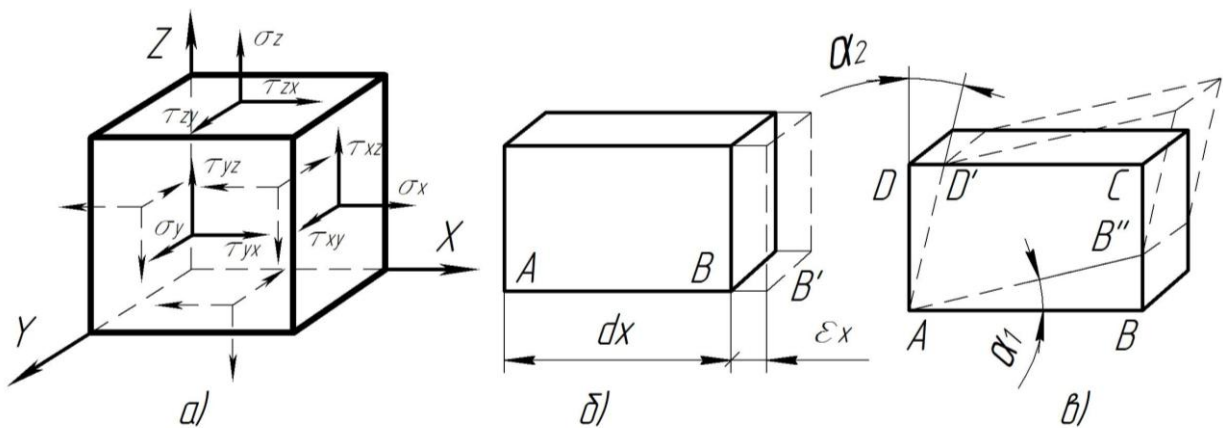


Рисунок 2.11

Напруження зводять у таблицю, яку називають **тензором напружень**.

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

Усі наведені тут напруження є функціями 3-х змінних: $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z)$ і т.д., але для скорочення запису змінні зазвичай не вказують. Це ж відноситься і до деформацій та переміщень.

На головній діагоналі тензора розташовані нормальні напруження, по боках від неї – дотичні. Внаслідок закону взаємності (парності) дотичних напружень, відомих з курсу опору матеріалів ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$), тензор T_σ симетричний відносно головної діагоналі, а число незалежних напружень дорівнює 6.

Деформований стан тіла у будь-якій точці визначається **трьома лінійними і трьома кутовими деформаціями**.

Лінійна деформація – це відносне подовження $\varepsilon_x = \frac{BB'}{AB}$ (див.

рис. 2.11б).

На рис. 2.11в показана *кутова деформація (або деформація зсуву)* γ_{xy} , яка дорівнює різниці кутів DAB та $D'AB''$, тобто $\alpha_1 + \alpha_2$.

Деформації зводять до тензора деформацій.

$$T_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{array} \right\}. \quad (2.2)$$

Цей тензор також симетричний, причому γ_{xy} та γ_{yx} це одна і та ж деформація, також як γ_{zx} та γ_{xz} , γ_{yz} та γ_{zy} .

Переміщення у будь-якій точці тіла розкладають на 3 складові, паралельні осям X , Y , Z . Ці складові позначають відповідно u , v та w .

Таким чином, при розв'язанні просторової задачі теорії пружності визначенню підлягають у цілому 15 величин: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , u , v , w , кожна з яких є функцією змінних x , y , z .

2.8. Об'ємна деформація тіла. Умови сумісності деформацій

Переміщення, як і напруження є неперервними функціями координат. Їх записують складовими: u – вздовж осі X ; v – вздовж осі Y і w – вздовж осі Z .

Розглянемо деформації елемента в площині XOY (рис. 2.12).

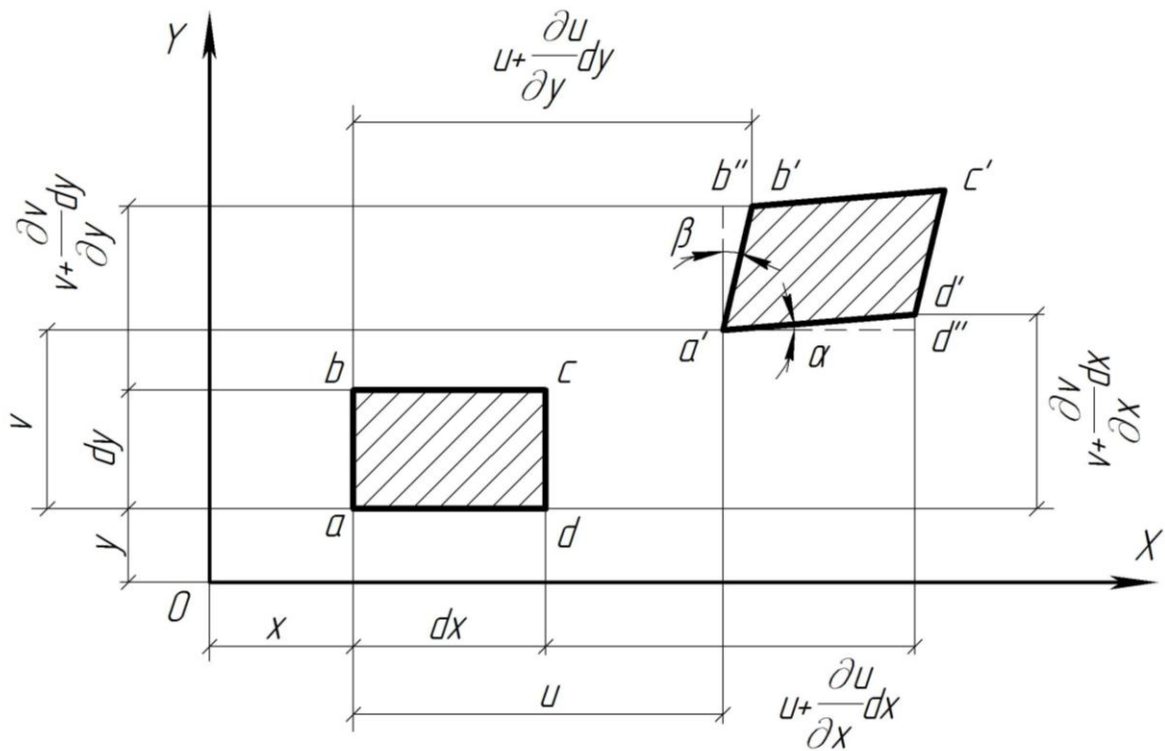


Рисунок 2.12

Відносну деформацію у напрямку осі X визначають відношенням абсолютного видовження елемента до його початкової довжини:

$$\varepsilon_x = \frac{a'd'' - ad}{ad} = \frac{\left(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u\right) - dx}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Аналогічно отримують деформації у напрямку інших осей. Отже, **вирази для лінійних деформацій**:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Кут зсуву у площині XOY визначають сумарним кутом повороту його граней ab і ad :

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx tg\alpha + tg\beta. \quad (2.5)$$

Відповідно до рис. 2.12

$$tg\alpha = \frac{d'd''}{a'd''} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}. \quad (2.6)$$

Враховуючи припущення про величину деформацій порівняно з одиницею, $\varepsilon_x \ll 1$, отримаємо, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Аналогічно

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.7) і (2.8) в (2.5) і враховуючи аналогічні вирази для площини YOZ і ZOX , отримаємо **вирази для кутових деформацій**:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Отже, отримані шість рівнянь (2.4) і (2.9), які виражають лінійні і кутові деформації через складові переміщень:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Ці співвідношення називають **формулами Коші**.

Об'ємна деформація тіла

Об'єм елементарного паралелепіпеда (див. рис. 2.11) у ненавантаженому стані

$$dV = dx dy dz, \quad (2.11)$$

У результаті деформацій його ребра отримають видовження і об'єм зміниться

$$\begin{aligned} dV_1 &= (1 + \varepsilon_x) dx (1 + \varepsilon_y) dy (1 + \varepsilon_z) dz = \\ &= (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx dy dz \end{aligned} \quad (2.12)$$

Розкриваючи дужки, відкидаємо доданки другого ($\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y, \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z, \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x$) і третього ($\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z$) порядків. У результаті отримаємо

$$dV_1 = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dx dy dz \quad (2.13)$$

Об'ємна деформація – це відношення приросту об'єму до початкового об'єму

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dx dy dz - dx dy dz}{dx dy dz} \quad (2.14)$$

Або

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.15)$$

Умови сумісності деформацій (умови суцільності)

З допомогою формул Коші (2.10) деформації однозначно виражають через переміщення. Зворотна дія пов'язана з інтегруванням, тому переміщення не завжди можуть бути однозначно виражені через деформації. Тому між деформаціями існують співвідношення. Отримаємо їх виключаючи переміщення із формул Коші.

Продиференціюємо першу формулу (2.10) двічі по y , другу двічі по x і додамо їх

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

Вираз у дужках – це кутова деформація у площині XOY. Виконуючи аналогічні перетворення з другим і третім і, далі, з першим і третім виразами системи (2.10) отримаємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Потім продиференціюємо кожен з трьох останніх формул Коші (2.10) по змінній, яка не входить в індекс відповідного кута зсуву:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Почленно додамо перше і третє отримані співвідношення і віднімемо друге:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.\tag{2.19}$$

Продиференціюємо отриманий вираз по x , перетворимо праву частину

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}.\tag{2.20}$$

З допомогою аналогічних перетворень отримаємо ще два співвідношення, які разом з попереднім утворюють систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Вирази (2.17) і (2.21) встановлюють зв'язок між деформаціями і ε умовами сумісності деформацій.

При виконанні умов (2.17) і (2.21) тіло розбите на окремі елементи можна зібрати після деформації у єдине ціле без пустот і розривів. Тому **умови сумісності деформацій називають умовами суцільності або рівняннями Сен-Венана.**

2.9. Узагальнений закон Гука

Фізичні рівняння теорії пружності встановлюють співвідношення між деформаціями і напруженнями. В опорі матеріалів для лінійного напруженого стану закон Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (2.22)$$

Тут E – модуль пружності – виражає пружні властивості матеріалу.

До пружних характеристик також відносять модуль зсуву і коефіцієнт поперечної деформації (коефіцієнт Пуассона)

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \quad (2.23)$$

Між модулем зсуву, модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона існує співвідношення

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.24)$$

При об'ємному напруженому стані поздовжня деформація, наприклад, в напрямку осі x складається з поздовжньої деформації вздовж осі x від напруження σ_x і поперечних деформацій від напружень σ_y і σ_z :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xz}. \quad (2.25)$$

Враховуючи що

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_{xy} = -\mu \cdot \varepsilon_{yy} = -\mu \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_{xz} = -\mu \cdot \varepsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_z}{E}, \quad (2.26)$$

отримаємо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.27)$$

Записуючи аналогічні співвідношення для деформацій в напрямку осей Y і Z , приєднаємо до них вирази для кутових деформацій. У результаті отримаємо шість рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Рівняння (2.28) – це узагальнений закон Гука у прямій формі.

2.10. Зворотна форма закону Гука

Можна отримати закон Гука в іншому вигляді. Перетворимо вираз об'ємної деформації (2.15), підставивши в нього деформації з (2.28):

$$\begin{aligned} \Theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_z + \sigma_x + \sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)] = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned} \quad (2.29)$$

або

$$\Theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot S_1,$$

тобто *відносна об'ємна деформація Θ пропорційна першому інваріанту напруженого стану S_1 .*

Ввівши *модуль об'ємного розширення*

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (2.30)$$

отримаємо

$$S_1 = 3K \cdot \Theta. \quad (2.31)$$

Замінивши перший інваріант напруженого стану S_1 середнім напруженням в точці

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1, \quad (2.32)$$

отримаємо

$$\sigma_0 = K \cdot \Theta. \quad (2.33)$$

Отже, *середнє напруження в точці пропорційне об'ємній деформації.*

Далі перетворимо першу формулу закону Гука (2.28):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x + \mu\sigma_x - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) = \\ &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1}{E} \left[(1 + \mu)\sigma_x - \frac{\mu \cdot E}{1 - 2\mu} \cdot \Theta \right] = \\ &= \frac{1 + \mu}{E} \sigma_x - \frac{\mu}{1 - 2\mu} \cdot \Theta. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно σ_x

$$\sigma_x = \frac{\mu \cdot E}{(1 + \mu) \cdot (1 - 2\mu)} \cdot \Theta + \frac{E}{1 + \mu} \cdot \varepsilon_x. \quad (2.35)$$

Введемо позначення

$$\lambda = \frac{\mu \cdot E}{(1 + \mu) \cdot (1 - 2\mu)}, \quad \nu = \frac{E}{2(1 + \mu)} = G. \quad (2.36)$$

Коефіцієнти λ і ν називають коефіцієнтами Ламе.

Враховуючи (2.36) отримаємо **шість формул узагальненого закону Гука у зворотній формі:**

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \nu \cdot \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \nu \cdot \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \nu \cdot \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Склавши почленно перші три формули (2.37), отримаємо:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda \cdot \Theta + 2\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.38)$$

або

$$S_1 = (3\lambda + 2\nu)\Theta. \quad (2.39)$$

Замінімо перший інваріант напруженого стану S_1 середнім напруженням σ_0 з (2.33), а об'ємну деформацію Θ середньою деформацією у точці

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}\Theta, \quad (2.40)$$

отримаємо ще одну **форму закону Гука**:

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\nu)\varepsilon_0. \quad (2.41)$$

Отже, середнє напруження в точці пропорційне середньому видовженню в цій точці.

Тема 3

ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

- 3.1. Постановка загальної задачі теорії пружності. Способи розв'язування
- 3.2. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у переміщеннях
- 3.3. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у напруженнях при постійності об'ємних сил
- 3.4. Типи граничних умов. Методи розв'язування загальної задачі теорії пружності

3.1. Постановка загальної задачі теорії пружності.

Способи розв'язування

Загальна задача теорії пружності базується на визначенні 15 невідомих (шість складових напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$; три складові переміщень u, v, w і шість компонентів деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$) із 15 рівнянь.

Для розв'язування загальної задачі теорії пружності використовують такі три групи основних рівнянь:

- статичні рівняння: три рівняння рівноваги Нав'є

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

і умови на поверхні

$$\left. \begin{aligned} X_g &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k; \\ Y_g &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot k; \\ Z_g &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot k; \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

- геометричні рівняння: шість формул Коші

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

і шість рівнянь суцільності Сен-Венана;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

- фізичні рівняння: шість формул узагальненого закону Гука у прямій

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}.\end{aligned}\right\}\tag{3.6}$$

або у зворотній формі

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \nu \cdot \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \nu \cdot \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \nu \cdot \gamma_{zx}.\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

У рівняння (3.1)-(3.7) входять 15 невідомих: 6 складових напружень ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$), 3 складові переміщень (u, v, w) і 6 компонентів деформацій ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$).

Коефіцієнти λ і ν у формулі (3.7) – коефіцієнти Ламе.

Для визначення цих невідомих є 15 рівнянь: 3 умови рівноваги Нав'є, 6 формул Коші і 6 формул закону Гука у прямій і зворотній формі.

Отже, розв'язок задачі зводиться до інтегрування п'ятнадцяти диференціальних рівнянь при виконанні граничних умов (умов на поверхні) і умов суцільності Сен-Венана.

Залежно від того, які величини приймають за основні невідомі, розрізняють три способи розв'язування задачі:

- розв'язування у переміщеннях;
- розв'язування у напруженнях;
- змішане розв'язування.

3.2. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у переміщеннях

Для отримання розв'язку задачі теорії пружності у переміщеннях необхідно виразити у статичних рівняннях напруження через переміщення.

Розглянемо перше рівняння Нав'є (3.1). Підставимо в нього напруження із закону Гука (3.7) у зворотній формі:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \cdot \gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \cdot \gamma_{xz}) + X = 0. \quad (3.8)$$

Замінімо деформації переміщеннями за допомогою формул Коші:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \Theta + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + X = 0 \quad (3.9)$$

або

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + X = 0. \quad (3.10)$$

Згрупуємо доданки, які включають другі похідні переміщень так:

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0. \quad (3.11)$$

Вираз у перших дужках – *це диференціальний оператор Лапласа від функції u* :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.12)$$

де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.13)$$

Позначення $\nabla^2 u$ читають як «набла два u ».

Вираз в других дужках (3.11) перетворимо так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{\partial \Theta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Враховуючи (3.14) і позначення (3.12), перше рівняння Нав'є набуде вигляду:

$$(\lambda + \nu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu \cdot \nabla^2 u + X = 0. \quad (3.15)$$

Аналогічні перетворення виконуємо з решту рівняннями Нав'є. Отже, отримаємо три рівняння:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \nu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu \cdot \nabla^2 u + X &= 0; \\ (\lambda + \nu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \nu \cdot \nabla^2 v + Y &= 0; \\ (\lambda + \nu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \nu \cdot \nabla^2 w + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

ці рівняння називають **рівняннями Ламе**.

Перетворимо умови на поверхні. Підставимо у перше співвідношення рівнянь (3.2) напруження із закону Гука у зворотній формі:

$$X_g = (\lambda \cdot \Theta + 2\nu\varepsilon_x) \cdot l + \nu\gamma_{xy}m + \nu\gamma_{xz}k. \quad (3.17)$$

Дальше підставимо у (3.17) деформації із формул Коші:

$$\begin{aligned} X_g &= \left(\lambda \cdot \Theta + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) l + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) m + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) k = \\ &= \lambda \cdot \Theta \cdot l + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} k \right) + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} k \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Представимо направляючі косинуси нормалі g до площадки як відношення проєкцій нормалі до її довжини:

$$l = \frac{dx}{d\vartheta}; \quad m = \frac{dy}{d\vartheta}; \quad k = \frac{dz}{d\vartheta}. \quad (3.19)$$

Тоді вираз у перших дужках (3.18) набуде вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} k = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta}. \quad (3.20)$$

Виконуючи аналогічні перетворення над решту умовами з (3.2), отримаємо такий вигляд умов на поверхні в переміщеннях:

$$\left. \begin{aligned} X_g &= \lambda\Theta l + \vartheta \frac{\partial u}{\partial v} + \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} k \right); \\ Y_g &= \lambda\Theta m + \vartheta \frac{\partial v}{\partial v} + \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} k \right); \\ Z_g &= \lambda\Theta k + \vartheta \frac{\partial w}{\partial v} + \vartheta \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} k \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Отже, *розв'язок загальної задачі теорії пружності в переміщеннях зводиться до інтегрування трьох рівнянь Ламе (3.16) при дотриманні умов на поверхні (3.21)*. За визначеними переміщенням u, v, w з формул Коші (3.3) визначають деформації і, далі з формул закону Гука (3.7) напруження.

3.3. Розв'язування загальної задачі теорії пружності у напруженнях при постійності об'ємних сил

Так як три рівняння рівноваги Нав'є (3.1) містять шість невідомих складових напружень ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$), їх недостатньо для розв'язування задачі. Тому додатково необхідно розглянути умови суцільності Сен-Венана (3.4) і (3.5).

Виражаючи у цих рівняннях деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ через напруження із закону Гука (3.7), після перетворення отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} = 0; & \quad (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x\partial y} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} = 0; & \quad (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y\partial z} = 0; \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0; & \quad (1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Ці рівняння називають **рівняннями Бельтрама-Мітчела**.

Тут ∇^2 – диференційний оператор Лапласа, визначають його так

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (3.23)$$

S_1 – перший інваріант напруженого стану, тобто

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (3.24)$$

При отриманні рівнянь (3.22) передбачалось, що об'ємні сили постійні:

$$X = const, \quad Y = const, \quad Z = const. \quad (3.25)$$

Для розв'язування плоскої задачі у напруженнях необхідно проінтегрувати три рівняння Нав'є разом з шістьма рівняннями Бельтрама-Мітчела (3.22) при дотриманні умов на поверхні (3.21). Після цього за формулами закону Гука (3.6) визначають деформації а, за формулами Коші (3.3) – переміщення.

3.4. Типи граничних умов. Методи розв'язування загальної задачі теорії пружності

При розв'язуванні задачі теорії пружності у всіх випадках необхідно враховувати умови на поверхні (граничні умови). Для цього має бути задано рівняння поверхні тіла і сили або переміщення її точок.

Розрізняють два типи граничних умов:

- *кінематичні*, коли задають значення переміщень точок поверхні,
- *статичні*, якщо задають значення напружень на поверхні.

Можливі також *змішані граничні умови*, коли на частині поверхні задають переміщення, а на іншій частині – напруження.

Розрізняють три основні математичні методи розв'язування задачі теорії пружності:

- *прямий метод*, який полягає у безпосередньому інтегруванні основних рівнянь при виконанні граничних умов;

- *зворотний метод*, якщо задають функції напружень або переміщень, які задовольняють диференціальні рівняння задачі, а потім встановлюють, яким граничним умовам ці функції відповідають;

- *напівзворотний метод* Сен-Венана, коли задають частину функцій переміщень або напружень та з рівнянь задачі встановлюють, яким умовам мають відповідати решту функцій. При цьому диференціальні рівняння суттєво спрощуються.

Тема 4

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

- 4.1. Плоска деформація
- 4.2. Узагальнений плоский напружений стан
- 4.3. Рівняння плоскої задачі теорії пружності.
Граничні умови (умови на контурі)
- 4.4. Задачі теорії пружності та методи їх розрахунку
- 4.5. Розв'язування плоскої задачі в напруженнях
для прямокутних областей
- 4.6. Розв'язування плоскої задачі в поліномах
- 4.7. Розв'язування плоскої задачі в тригонометричних рядах
- 4.8. Метод скінченних різниць (метод сіток)

4.1. Плоска деформація

Плоска задача включає плоску деформацію (надалі ПД) і узагальнений плоский напружений стан (УПНС).

Плоска деформація – це такий напружено-деформівний стан, коли всі переміщення точок відбуваються паралельно одній площині XOY .

Такого стану зазнають призматичні або циліндричні тіла, висота яких (довжина тіла) суттєво перевищує розміри основи. Навантаження прикладене тільки на гранях паралельно основам і не змінюється вздовж висоти (довжини) тіла.

Приклади: гребля або масивна підпірна стінка (рис. 4.1а), довгий коток (рис. 4.1б), баки великої ширини (рис. 4.1в).

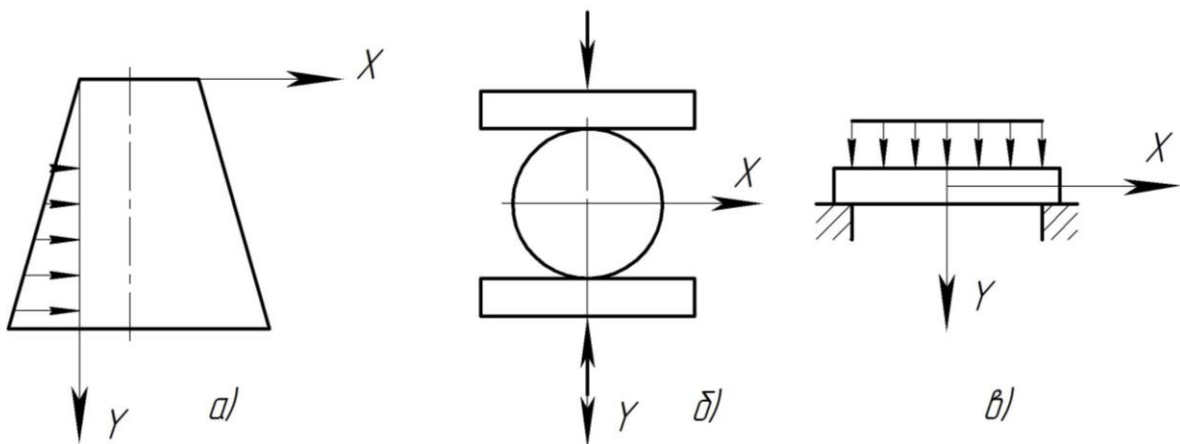


Рисунок 4.1

Так як переміщення є функціями лише двох змінних

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0,$$

то з формул Коші випливає, що

$$\varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{yz} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0;$$

решта деформації також є функціями тільки змінних x та y :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y); \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y); \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y). \quad (4.1)$$

На підтвердження цього розглянемо тіло циліндричної (рис. 4.2) або призматичної форми, яке має дуже велику довжину вздовж осі Z . Виріжемо уявно з цього тіла диск одиничної товщини. У процесі деформування ця товщина не може змінюватися, тобто цьому

перешкоджають сусідні частини пружного тіла, тобто $\varepsilon_z = 0$. З тієї ж причини відсутні переміщення вздовж усієї осі Z , тобто $w = 0$ і деформації зсуву у площинах XOZ та YOZ .

Відповідно для плоскої деформації тензори напружень і деформації:

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{Bmatrix}; \quad (4.2)$$

$$T_{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.3)$$

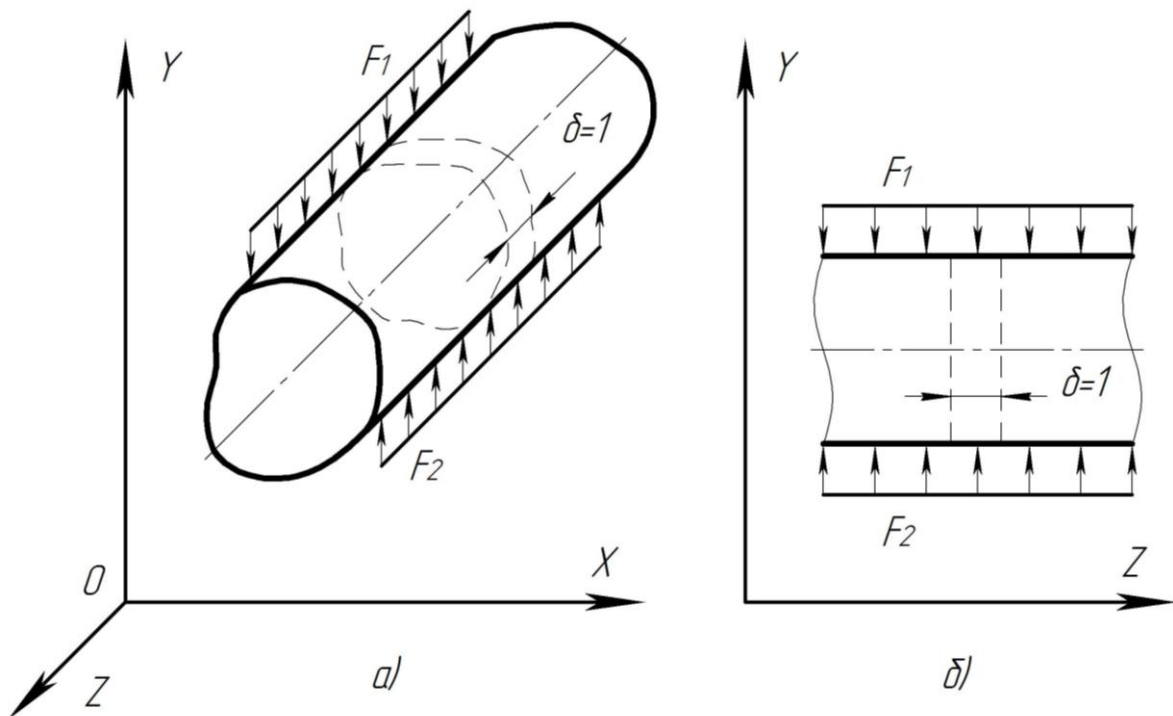


Рисунок 4.2

При $\varepsilon_z = 0$ з третьої формули закону Гука (2.28) випливає

$$\frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0, \quad (4.4)$$

звідки

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (4.5)$$

Враховуючи (4.2) решту ненульові деформації зводять до такого виду:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_y \right), \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \cdot \sigma_x \right), \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \tau_{xy}. \quad (4.8)$$

Ввівши у виразах (4.6)-(4.8) нові пружні постійні

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad \mu_1 = \frac{\mu}{1-\mu}, \quad (4.9)$$

отримують:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \mu_1 \cdot \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \mu_1 \cdot \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E_1} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Враховуючи (4.1) і (4.10) на основі формул закону Гука у зворотній формі (2.37) вважають, що напруження, так як переміщення і деформації, є функціями тільки змінних x та y

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y); \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y); \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Основні рівняння теорії пружності при плоскій деформації спрощуються. Тобто з **трьох диференціальних рівнянь рівноваги** (1.5) залишаються тільки два:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Так як основи тіл вільні від навантаження, а на бокових поверхнях направляючий косинус нормалі $n = 0$, то з **трьох умов на поверхні** (1.12) також залишаються дві:

$$\left. \begin{aligned} X_g &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m; \\ Y_g &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

З шести формул Коші (2.10) залишаються три:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Шість умов суцільності Сен-Венана (2.17) і (2.21) зводяться до однієї:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (4.15)$$

З шести деформацій ненульовими залишаються тільки три. Відповідно узагальнений закон Гука з врахуванням пружних постійних (4.9) виражається трьома формулами (4.10).

4.2. Узагальнений плоский напружений стан

Узагальнений плоский напружений стан характеризується відсутністю нормальних напружень на площадках, паралельних одній з координатних площин XOY .

Такий напружений стан появляється у пластинках, навантаження до яких прикладене тільки на боковій поверхні силами, які паралельні основам і рівномірно розподілені по товщині пластинки (рис. 4.3а)

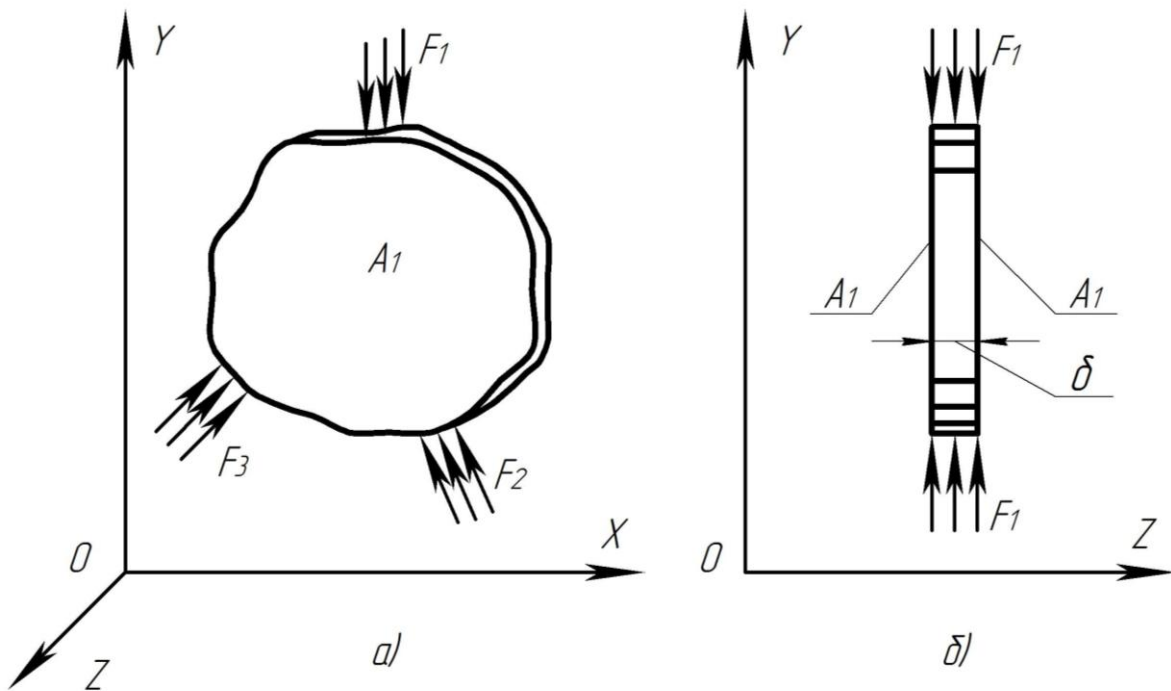


Рисунок 4.3

Отже, розглянемо тіло (рис. 4.3б), що має форму диска, товщина якого δ значно менша його розмірів у площині XOY .

Для спрощення запису прийемо $\delta = 1$. Зовнішнє навантаження прикладене тільки по контуру диску та розподілене рівномірно за його товщиною, лінія дії навантажень паралельна площині XOY . В такому разі

можна прийняти таку гіпотезу: усі напруження та деформації розподілені рівномірно за товщиною диску. На основах диску A_1 та A_2 навантаження немає, тому напруження там дорівнюють нулю, тобто $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$.

Через малу товщину диска можна вважати, що $\sigma_z = 0$ по всій товщині його товщині. Решту напружень постійні по товщині диска:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \quad (4.16)$$

Тобто, всі ненульові напруження є функціями тільки координат x та y .

Так як напруження, відповідно до прийнятої гіпотези, розподілені рівномірно за товщиною, то вони дорівнюють нулю в будь-якій точці диску. Тому, відповідно до законом Гука, $\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0$; $\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} = 0$.

Отже, для узагальненого напруженого стану тензори напружень та деформацій:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}; \quad (4.17)$$

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{Bmatrix}. \quad (4.18)$$

Порівнюючи вирази (4.2) з (4.17) і (4.3) з (4.18), помічаємо, що вони відрізняються тільки деякими елементами: у УПНС $\varepsilon_z \neq 0$; $\sigma_z = 0$ у ПД $\varepsilon_z = 0$; $\sigma_z \neq 0$. Величини ε_z і σ_z в обох випадках мають другорядне значення, оскільки вони обумовлені явищем поперечного розширення при завантаженні у площині XOY . Якщо б цього явища не було, тобто коли б $\mu = 0$, то тензори T_σ та T_ε виявилися б однаковими для УПНС і ПД. Тому багато залежностей теорії пружності для УПНС та ПД збігаються.

З третьої формули закону Гука (2.28) випливає

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \quad (4.19)$$

тобто основи пластинки будуть викривлятися.

Отже, **формули закону Гука для УПНС** набудуть вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x); \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \cdot \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Формули (4.20) відрізняються від формул закону Гука для плоскої деформації (4.10) тільки пружними постійними.

Решту співвідношень плоскої деформації: умови рівноваги (4.12), умови на поверхні (4.13), формули Коші (4.14) та умови суцільності (4.15) залишаються такими ж і для УПНС. Це дозволяє об'єднати дві задачі в одну – **плоску задачу теорії пружності**.

Диск, тобто пластинку, можна розглядати і як призматичне тіло, висота якого (товщина пластинки) мала порівняно з розмірами основи. У такому випадку при однакових умовах навантаження призматичних тіл (тільки на бокових поверхнях навантаженням, паралельним до основ і таким, що не змінюється вздовж висоти тіла) для тіл з висотою значно перевищуючою розміри основи, матимемо ПД, а для тіл, з висотою, значно меншою розмірів основ, матимемо УПНС.

4.3. Рівняння плоскої задачі теорії пружності.

Граничні умови (умови на контурі)

У будь-якому випадку (УПНС або ПД) об'єктом розгляду є диск (пластинка) одиничної товщини (рис. 4.4а):

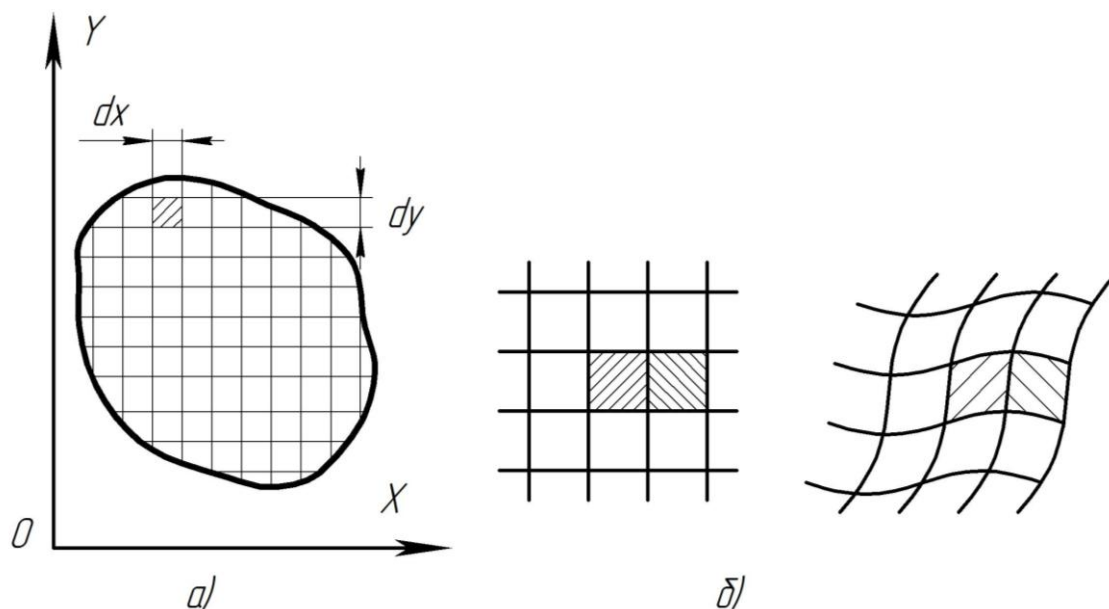


Рисунок 4.4

Уявно розіб'ємо диск на нескінченно малі елементи. Внутрішні елементи мають форму прямокутних паралелепіпедів; крайові можуть мати форму тригранних призм. Коли тіло знаходиться в рівновазі, то для будь-якого виділеного з нього елемента, також повинні задовольнятися умови рівноваги. Окрім цього, в процесі деформації тіла повинні задовольнятися умови суцільності (або нерозривності деформацій), тобто сусідні елементи до і після деформації повинні щільно примикати один до одного (рис. 4.4б).

Щоб розв'язати задачу теорії пружності, необхідно скласти рівняння, які виражають умови рівноваги нескінченно малого елемента, рівняння, які описують його деформацію, а також рівняння, які віддзеркалюють пружні властивості матеріалу. У випадку плоскої задачі таких рівнянь повинно бути 8 – за числом невідомих: σ_x , σ_y , τ_{xy} , ε_x , ε_y , γ_{xy} , u , v .

Рівняння рівноваги (рівняння Нав'є)

а) Статична сторона задачі

Розглянемо рівновагу елементарного паралелепіпеду, який вирізано з диску. На рис. 4.5а показано напруження, яким надано додатний напрямок (правило знаків зображено на рис. 4.5б).

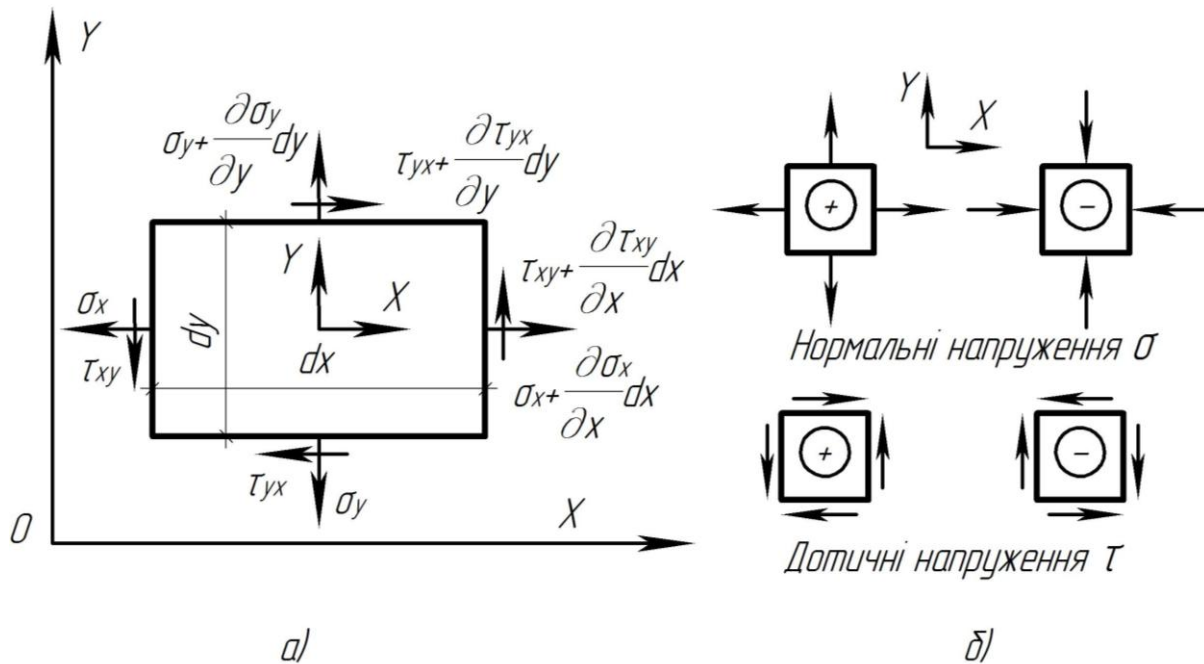


Рисунок 4.5

Напруження на будь-яких протилежних гранях елемента відрізняються на нескінченно малу величину. Так, якщо нормальне напруження, яке залежить від двох змінних x та y , дорівнює зліва σ_x , то справа (тобто при зміні координати x на величину dx) воно отримує приріст $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. В центрі ваги елемента прикладені компоненти об'ємної сили X та Y .

Умови рівноваги на площині: $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum m = 0$. Останнє з умов приводить до вже відомого з опору матеріалів закону взаємності дотичних напружень $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, тому тут його записувати не будемо.

Для запису першої умови спроектуємо усі сили на вісь X . Кожне напруження помножується на площу тієї грані, на якій воно діє, а об'ємна сила помножується на об'єм елемента:

$$\sigma_x dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{yx} dx \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + X dx dy = 0.$$

Після приведення подібних членів і скорочення на $dx dy$ отримаємо:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0.$$

Аналогічно з умови $\sum Y = 0$ отримаємо:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0.$$

Таким чином, **система рівнянь рівноваги** (рівняння Нав'є) має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Система (4.21) ідентична системі (4.12). Невідомих напружень виявилось більше, ніж рівнянь рівноваги, це означає, що задачі теорії пружності статично невизначувані.

б) Геометричні рівняння (рівняння Коші)

У результаті деформації диску елемент, що виділено з нього (рис. 4.6а), переміститься так, що точка A займе положення A' (рис. 4.6б). Окрім того, станеться лінійна деформація та сторони прямокутника $ABCD$ отримують подовження, внаслідок чого вершина B переміститься не в B' , а в B'' .

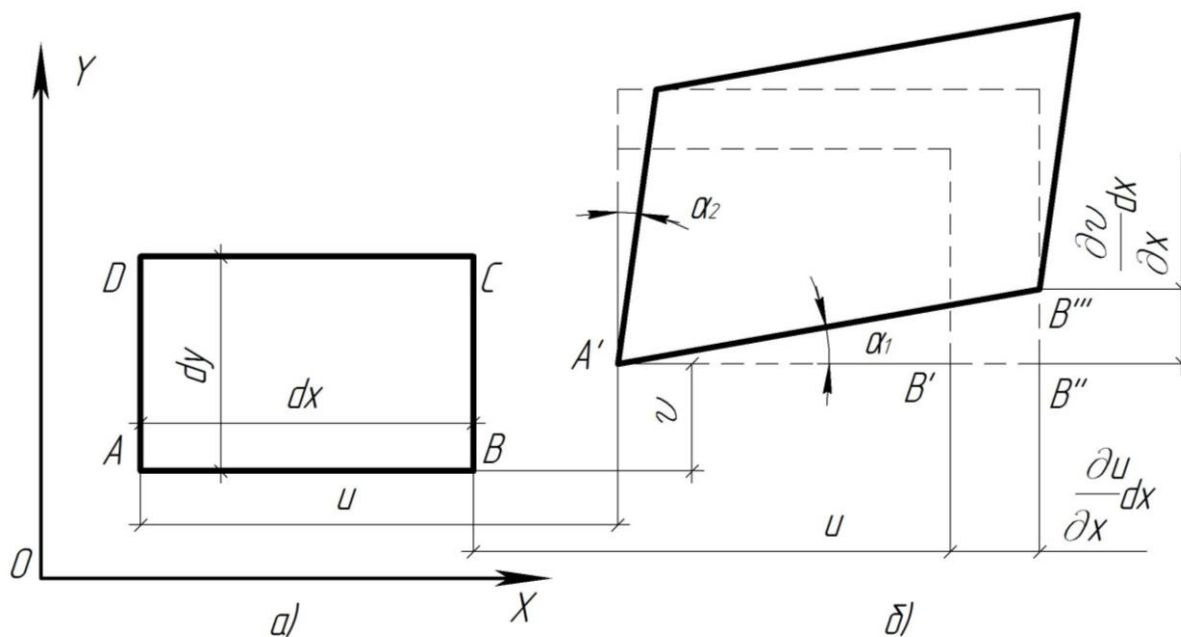


Рисунок 4.6

Цей елемент зазнає також кутової деформації, внаслідок чого остаточною положенням вершини B буде B'' . Абсолютне подовження

сторони AB , (рис. 4.6б), дорівнює $\frac{\partial u}{\partial x} dx$, а відносне $\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Аналогічно $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Кутова деформація $\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$.

Визначимо спочатку α_1 . З огляду на малість кута можна записати

$$\alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B''B'''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}.$$

На основі гіпотези про малість деформацій (див. тема 2, п.2.8) $\varepsilon_x \ll 1$, тому можна записати $\alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$. Аналогічно $\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$, та остаточно

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким чином, отримуємо **систему геометричних рівнянь** (рівнянь Коші):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad (4.22)$$

що **пов'язують переміщення з деформаціями**. Система (4.22) ідентична системі (4.14).

в) Фізичні рівняння (рівняння закону Гука)

З опору матеріалів відомо, що для тримірного напруженого стану справедливі шість рівнянь закону Гука (див. тема2, п.2.9):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Для окремих різновидів плоскої задачі ці рівняння перетворюються по-різному.

УПНС. $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Тоді з (4.23) виходить:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x); \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Решта рівнянь обертається у тотожність.

ПД. $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. Третє з рівнянь (4.23) матиме вид $\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) = 0$, звідки $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Підставимо отриманий вираз в перше рівняння (4.23):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \mu[\sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \right\} = \frac{1}{E} \left[(1 - \mu^2)\sigma_x - \mu(1 + \mu)\sigma_y \right] = \\ &= \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_y \right). \end{aligned}$$

Таким чином, визначимо ε_y та отримаємо систему

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right); \\ \varepsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right); \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{cases} \quad (4.25)$$

Решта рівнянь обертаються у тотожність. Системи (4.24) та (4.25) мають однакову структуру та відрізняються тільки коефіцієнтами.

Граничні умови (умови на контурі)

Вісім рівнянь плоскої задачі теорії пружності – (4.12), (4.14), (4.10) або (4.20), пов'язують між собою *напруження, деформації та переміщення у будь-якій точці в середині диску*.

Усі ці рівняння справедливі для дисків будь-якої форми, завантажених різноманітними способами. Для того, щоб урахувати форму диску та навантаження, що діють по його контуру, необхідно записати умови на контурі або граничні умови. Граничні умови можуть бути різних видів. Розглянемо їх на прикладі прямокутного диску (рис. 4.7).

Нагадаємо, що рівняння (4.12) та (4.14) диференціальні, а отримати спільне рішення диференціальних рівнянь без задоволення граничним умовам взагалі неможливо.

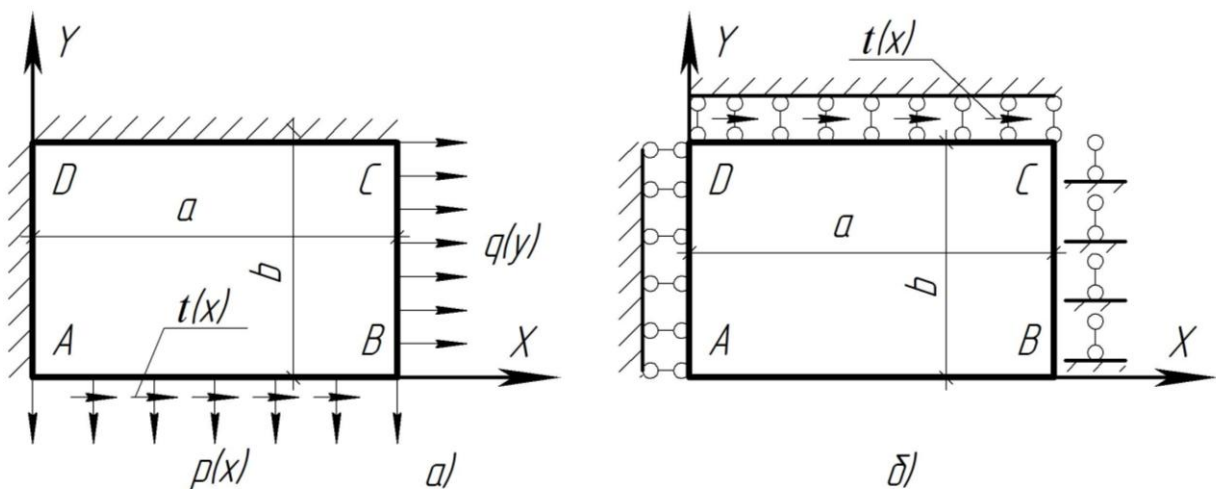


Рисунок 4.7

У кожній точці контуру мають бути виконані 2 граничні умови, що залежать від того, яке там діє навантаження або які накладені зв'язки. Так на рис. 4.7а сторони диску – $AD(x=0)$ та $DC(y=b)$ жорстко закріплено, тому для них граничні умови записують так:

$$x=0 \begin{cases} u=0, \\ v=0; \end{cases} \quad y=b \begin{cases} u=0, \\ v=0. \end{cases} \quad (\text{а})$$

На сторонах AB та BC задано навантаження, тобто відомі нормальні та дотичні напруження:

$$y=0 \begin{cases} \sigma_y = p(x), \\ \tau_{yx} = -t(x); \end{cases} \quad x=a \begin{cases} \sigma_x = q(y), \\ \tau_{xy} = 0; \end{cases} \quad (\text{б})$$

(знаки напружень залежать від їх напрямку; додатний напрямок показано на рис. 4.5б).

На рис. 4.7 сторону AD закріплено так, що горизонтальне переміщення відсутнє. У вертикальному ж напрямку відсутнє навантаження. На стороні BC – навпаки:

$$x=0 \begin{cases} u=0, \\ \tau_{yx} = 0; \end{cases} \quad x=a \begin{cases} v=0, \\ \sigma_x = 0. \end{cases} \quad (\text{в})$$

На стороні CD у вертикальному напрямку накладено зв'язки, в горизонтальному діє навантаження. Сторона AB вільна від навантажень:

$$y=b \begin{cases} v=0, \\ \tau_{yx} = t(x); \end{cases} \quad y=0 \begin{cases} \sigma_y = 0, \\ \tau_{yx} = 0. \end{cases} \quad (\text{д})$$

З наданих прикладів видно, що умови (а) – сторона AB – містять тільки переміщення. **Такі граничні умови називають геометричними, або кінематичними.** Умови для сторони BC записані тільки в напруженнях. **Граничні умови такого типу називаються силовими, або статичними.** В умови для сторін AB та CD увійшло по одному напруженню та по одному переміщенню. **Такі умови називають змішаними.** Для кожної сторони можна записати 2 граничні умови. Таким чином, восьми умов, яким задовольняє прямокутний диск, достатньо для визначення восьми сталих, які виникають в процесі інтегрування бігармонічного рівняння.

4.4. Задачі теорії пружності та методи їх розрахунку

Пряма задача. Для диску заданої форми відоме зовнішнє навантаження, об'ємні сили та розташування зв'язків на контурі. Потрібно визначити напруження, деформації та переміщення в будь-якій точці всередині диску.

Зворотна задача. Для диску заданої форми відомі напруження або переміщення в будь-якій внутрішній точці. Потрібно визначити зовнішні навантаження, об'ємні сили та переміщення точок контуру.

Змішана задача. Задана частково інформація про напруження та переміщення всередині диску, частково інформація про умови на контурі.

Основне значення для розрахунку конструкцій має пряма задача. Вона ж і найбільш складна. Зворотна вирішується значно простіше, вона має допоміжне значення.

Пряма задача теорії пружності потребує розв'язування восьми рівнянь, з яких п'ять – диференціальні. У таких випадках велику систему рівнянь зводять до системи з меншою кількістю рівнянь (або навіть до одного рівняння), виключаючи частину невідомих.

Залежно від того, які невідомі виключають, розрізняють такі методи розв'язування прямої задачі:

Рішення в напруженнях. Систему з восьми рівнянь зводять до трьох рівнянь відносно напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$; переміщення та деформації з цих рівнянь виключають, а визначають їх вже після того, як будуть знайдені всі напруження.

Рішення в переміщеннях. Виключають напруження та деформації і отримують систему 2-х рівнянь відносно переміщень u та v .

Можливий також змішаний метод.

В усіх випадках до отриманої системи диференціальних рівнянь треба приєднати граничні умови.

4.5. Розв'язування плоскої задачі в напруженнях для прямокутних областей. Рівняння нерозривності деформацій

Постановка задачі. Функція напружень

Для визначення трьох невідомих складових напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ використовуємо два рівняння рівноваги (4.12) і рівняння сумісності деформацій (4.15).

При розв'язуванні плоскої задачі в напруженнях (4.15) необхідно перетворити замінивши деформації через напруження. Підставимо в нього деформації із закону Гука (4.20):

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

або

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4.26)$$

Продиференціюємо перше рівняння Нав'є (4.12) по x , друге по y і почленно додамо. При постійності об'ємних сил отримуємо:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0,$$

звідки

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Підставивши дотриманий вираз у (4.26), після зведення подібних отримуємо:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0,$$

або

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Для випадку, коли з об'ємних сил діє тільки власна вага, отримуємо рівняння нерозривності деформації записане у напруженнях

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (4.27)$$

Таке рівняння називають **гармонічним**, а функція $(\sigma_x + \sigma_y)$, яка задовольняє це рівняння є **гармонічною**.

Отже, задача зведена до інтегрування двох рівнянь рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

і рівняння суцільності (нерозривності деформацій):

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (4.28)$$

Вводять нову невідому функцію $\varphi = \varphi(x, y)$ так, щоб рівняння рівноваги задовольнялось тотожно:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad (4.29)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X \cdot y - Y \cdot x.$$

Функцію $\varphi = \varphi(x, y)$ називають **функцією напружень** або **функцією Ері**.

Якщо підставити напруження, виражені через функцію Ері (4.29) в рівняння суцільності (4.28), то отримаємо

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0,$$

тобто

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

або

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (4.30)$$

Позначення ∇^4 читається як «набла чотири» і називають його **подвійним диференціальним оператором Лапласа**.

У розгорнутому вигляді рівняння (4.30) записують так:

$$\nabla^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.31)$$

Функцію φ , яка задовольняє рівняння (4.31), **називають бігармонічною**. А саме рівняння (4.31) називають – **бігарманічне рівняння плоскої задачі**. Якщо до нього приєднати граничні умови (виражені через функцію напружень), то розв’язування плоскої задачі зведеться до визначення однієї невідомої – $\varphi(x, y)$. Знаючи її можна потім за допомогою (4.29) знайти напруження, далі за допомогою (4.10) або (4.20) – деформації та, нарешті, за допомогою (4.14) – переміщення.

Граничні умови також можна виразити через функцію напружень:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \cdot y + Y \cdot x \right) m &= X_g \\ - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + X \cdot y + Y \cdot x \right) \cdot l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot m &= Y_g. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Отже, розв’язок плоскої задачі зводиться до відшукування бігармонічної функції φ , яка задовольняє граничні умови.

4.6. Розв’язування плоскої задачі в поліномах

При розв’язуванні плоскої задачі в напруженнях, якими б не були форми диску, закріплення та навантаження його контуру, рівняння (4.31), (4.29), (4.25), (4.24), (4.22) залишаються завжди такими, а змінюються тільки граничні умови. Залежно від останніх розв’язок бігармонічного рівняння може мати різну форму. Тут можуть бути різні алгебраїчні, тригонометричні та інші функції, можна застосовувати ряди Фур’є, а у випадках, коли аналітичного розв’язку не існує, використовують числові методи – наприклад, метод кінцевих різниць.

У деяких простих випадках можна знайти розв’язок, надаючи $\varphi(x, y)$ вигляд алгебраїчного полінома (ступінь його, як правило, не вище 6-го – 7-го відносно змінних x та y). Поліном повинен бути підібраний таким чином, щоб він задовільняв рівнянню (4.31). При цьому його коефіцієнти не задаються, є невідомими величинами і визначаються з граничних умов.

Їх кількість повинна відповідати числу граничних умов даної задачі. Граничні умови також повинні бути записані через функцію напружень. Таким чином, інформація про функцію напружень задається частково, така задача є змішаною задачею (напівзвотною).

Розв'язування плоскої задачі в поліномах є одним з варіантів реалізації зворотного методу розв'язування задачі.

Для того, щоб краще вивчити властивості поліномів різних ступенів, розглянемо декілька зворотних задач.

Розглянемо варіанти поліномів, які можна було би використовувати для вираження функції напружень.

Поліном першої степені

$$\varphi_1 = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y. \quad (4.33)$$

Не використовують для функції напружень, так як його другі похідні перетворюються в нуль, що відповідає відсутності напружень.

Поліном другої степені

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} \cdot x^2 + b_2 \cdot x \cdot y + \frac{c_2}{2} \cdot y^2 \quad (4.34)$$

дає нульові четверті похідні, і як наслідок, бігармонічне рівняння (4.32) задовольняється тотожно. Другі похідні є константами, що відповідає постійності напружень, і, як наслідок, рівномірному навантаженню на контурі пластинки.

Поліном третьої степені

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} \cdot x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1} \cdot x^2 \cdot y + \frac{c_3}{1 \cdot 2} \cdot x \cdot y^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3} \cdot y^3 \quad (4.35)$$

також дає нульові четверті похідні, тобто є бігармонічним. Так як другі похідні цього полінома є лінійними функціями, то така функція напружень відповідає навантаженню, яке лінійно змінюється на контурі пластинки.

Поліном третього степеня можна записати у такому вигляді

$$\varphi = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 \cdot y + c \cdot x \cdot y^2 + e \cdot y^3 + f \cdot x^2 + g \cdot x \cdot y + h \cdot y^2.$$

Згідно (4.29)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2c \cdot x + 6e \cdot y + 2h; & \sigma_y &= 6a \cdot x + 2b \cdot y + 2f; \\ \tau_{xy} &= -(2b \cdot x + 2c \cdot y + g). \end{aligned}$$

Усі напруження виявляються лінійними функціями x та y .

Із застосуванням поліному третьої степені розв'язують задачу про розрахунок трикутної греблі необмеженої висоти на гідростатичне навантаження (рис. 4.8а).

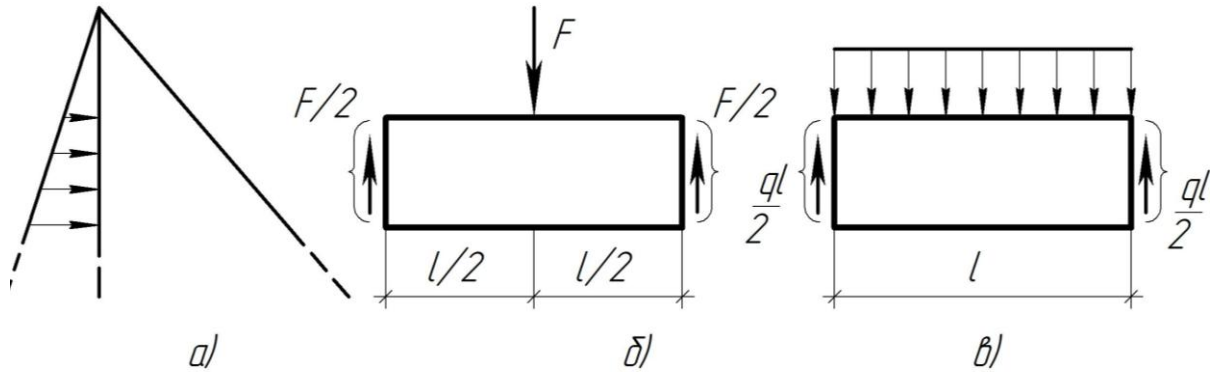


Рисунок 4.8

Поліноми другої та третьої степені, якщо їх підставити у рівняння (4.31), завжди тотожно задовольняють йому.

Поліном четвертої степені

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} \cdot x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} \cdot x^3 \cdot y + \frac{c_4}{2 \cdot 2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3} \cdot x \cdot y^3 + \frac{l_4}{3 \cdot 4} \cdot y^4 \quad (4.36)$$

дає такі четверті похідні

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 2a_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 2l_4. \quad (4.37)$$

Підставляючи (4.37) у рівняння (4.32) отримаємо

$$2a_4 + 2c_4 + 2l_4 = 0$$

або

$$a_4 + c_4 + l_4 = 0. \quad (4.38)$$

Отже, поліном (4.36) задовольняє бігармонічне рівняння при умові (4.38). Тобто будь-які чотири коефіцієнти, наприклад a_4 , b_4 , c_4 , d_4 можуть бути взяті довільними, а п'ятий має бути виражений через них з рівняння (4.38):

$$l_4 = -a_4 - c_4.$$

Тоді поліном (4.37) буде виглядати так:

$$\varphi_4 = a_4 \left(\frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{b_4}{3 \cdot 2} \cdot x^3 \cdot y + c_4 \left(\frac{x^2 \cdot y^2}{2 \cdot 2} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{d_4}{2 \cdot 3} \cdot x \cdot y^3 \quad (4.39)$$

Аналогічно можна показати застосування поліномів вищої степені для розв'язування задачі.

Поліном четвертої степені можна записати у такому вигляді:

$$\varphi = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 \cdot y + c \cdot x^2 \cdot y^2 + e \cdot y^3.$$

Повний вираз поліному 4-ої степені складається з 12 членів.

Необхідно підставити φ у рівняння (4.31):

$$24a + 2 \cdot 4c + 0 = 0, \text{ звідси } c = -3a.$$

Тоді

$$\varphi = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 \cdot y - 3a \cdot x^2 \cdot y^2 + e \cdot y^3 = a(x^4 - 3x^2 \cdot y^2) + b \cdot x^3 \cdot y + e \cdot y^3.$$

Згідно (4.29)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -6a \cdot x^2 + 6ey; & \sigma_y &= a(12x^2 - 6y^2) + 6b \cdot x \cdot y; \\ \tau_{xy} &= 12a \cdot x \cdot y - 3b \cdot x^2. \end{aligned}$$

Напруження є функціями 2-ої степені, а їхні епюри мають вигляд квадратних парабол. З використанням поліному 4-ої степені розраховують диск, який показано на рис. 4.8б. При ньому виявляється можливість уточнити розв'язок, отриманий методами опору матеріалів.

Поліном n'ятої степені.

У цьому випадку епюри напружень можуть бути параболами не вище 3-ої степені. Можливе вирішення задачі, схему якої показано на рис. 4.8в.

У загальному випадку необхідно розкласти навантаження на контурі по поліномах. Далше для кожної складової навантаження прийняти відповідну функцію напружень і визначити її коефіцієнти з граничних умов. Просумувавши отримані функції напружень, отримаємо розв'язок задачі.

4.7. Розв'язування плоскої задачі в тригонометричних рядах

Розглянемо функцію напружень

$$\varphi = Y \cdot \cos \alpha \cdot x, \quad (4.40)$$

де Y – функція тільки координати y ; $\alpha = n \cdot \pi / l$;
 l – довжина контура вздовж осі X .

Четверті похідні цієї функції будуть такими:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 \cdot Y \cdot \cos \alpha \cdot x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 \cdot Y'' \cdot \cos \alpha \cdot x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cdot \cos \alpha \cdot x.$$

Підставляючи ці похідні у рівняння (4.30), отримаємо

$$\alpha^4 \cdot Y \cdot \cos \alpha \cdot x - 2\alpha^2 \cdot Y'' \cdot \cos \alpha \cdot x + Y^{IV} \cdot \cos \alpha \cdot x = 0$$

або

$$(Y^{IV} - 2\alpha^2 \cdot Y'' + \alpha^4 \cdot Y) \cdot \cos \alpha \cdot x = 0. \quad (4.41)$$

Так як це рівняння задовольняється при будь-яких значеннях x , то

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 \cdot Y'' + \alpha^4 \cdot Y = 0. \quad (4.42)$$

Розв'язок рівняння (4.42) запишемо через гіперболічні функції

$$Y = A \cdot \operatorname{ch} \alpha \cdot y + B \cdot y \cdot \operatorname{ch} \alpha \cdot y + C \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot y + D \cdot y \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot y.$$

Таким чином, **функція напружень**

$$\varphi = (A \cdot \operatorname{ch} \alpha \cdot y + B \cdot y \cdot \operatorname{ch} \alpha \cdot y + C \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot y + D \cdot y \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot y) \cdot \cos \alpha \cdot x.$$

є бігармонічною.

Аналогічно можна показати, що бігармонічною є і функція

$$\varphi = (A' \cdot ch \alpha \cdot y + B' \cdot y \cdot ch \alpha \cdot y + C' \cdot sh \alpha \cdot y + D' \cdot y \cdot sh \alpha \cdot y) \cdot \sin \alpha \cdot x.$$

Для розв'язання плоскої задачі можна прийняти функцію напружень у вигляді тригонометричного ряду

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} [& (A_n \cdot ch \alpha_n \cdot y + B_n \cdot y \cdot ch \alpha_n \cdot y + C_n \cdot sh \alpha_n \cdot y + \\ & + D_n \cdot y \cdot sh \alpha_n \cdot y) \cdot \cos \alpha_n \cdot x + A'_n \cdot ch \alpha \cdot y + B'_n \cdot y \cdot ch \alpha \cdot y + \\ & + C'_n \cdot sh \alpha \cdot y + D'_n \cdot y \cdot sh \alpha \cdot y) \cdot \sin \alpha_n \cdot x]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

При використанні цього розв'язку навантаження на контурі також може бути розкладене у тригонометричний ряд. Значення постійних $A_n, B_n, C_n, D_n, A'_n, B'_n, C'_n, D'_n$ визначають з граничних умов.

4.8. Метод скінченних різниць (метод сіток)

Метод кінцевих різниць (метод сіток) є ефективним засобом наближеного розв'язування диференціальних рівнянь. Його суть у тому, що неперервну функцію замінюють набором значень у фіксованих точках. Похідні функції виражають через різниці значень функції у точках, завдяки чому диференціальне рівняння замінюють системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо деяку функцію одної змінної $y(x)$, графік якої зображений на рис. 4.9.

Виберемо на осі X точки, які віддалені одна від одної на однакову відстань $\Delta x = h$. Цю відстань називають кроком. Значення першої похідної $\frac{dy}{dx}$ у точці i можна наближено записати так:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}). \quad (4.44)$$

Використовуючи двічі вираз (4.44), можна записати другу похідну

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_i = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_{i+1} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{i-1} \right] = \frac{1}{4h^2} (y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}).$$

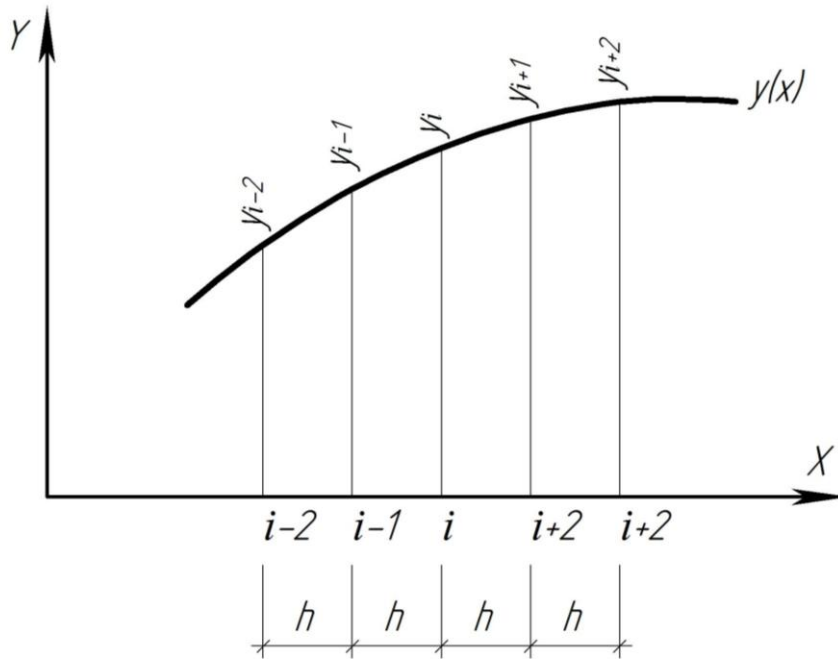


Рисунок 4.9

Скорочуючи інтервал у два рази, отримаємо

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}). \quad (4.45)$$

Аналогічно використовуючи двічі (4.45) запишемо четверту похідну:

$$\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)_i = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}). \quad (4.46)$$

Для плоскої задачі диференціальне рівняння записують у часткових похідних. Розбивають область (рис. 4.10) сіткою на комірки з однаковими розмірами $\Delta x = \Delta y = h$.

Пронумеруємо точки навколо досліджуваної точки 0 і запишемо часткові похідні у нульовій точці, використовуючи вирази (4.44)-(4.46):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_3); \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2h}(\varphi_2 - \varphi_4); \quad (4.47)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); & \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_4 \right] = \frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}); \end{aligned} \right\} (4.48)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4}(\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9); \\ \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4}(\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11}); \\ \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_2 - 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_4 \right] = \\ &= \frac{1}{h^4} [4\varphi_0 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + \varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}]. \end{aligned} \right\} (4.49)$$

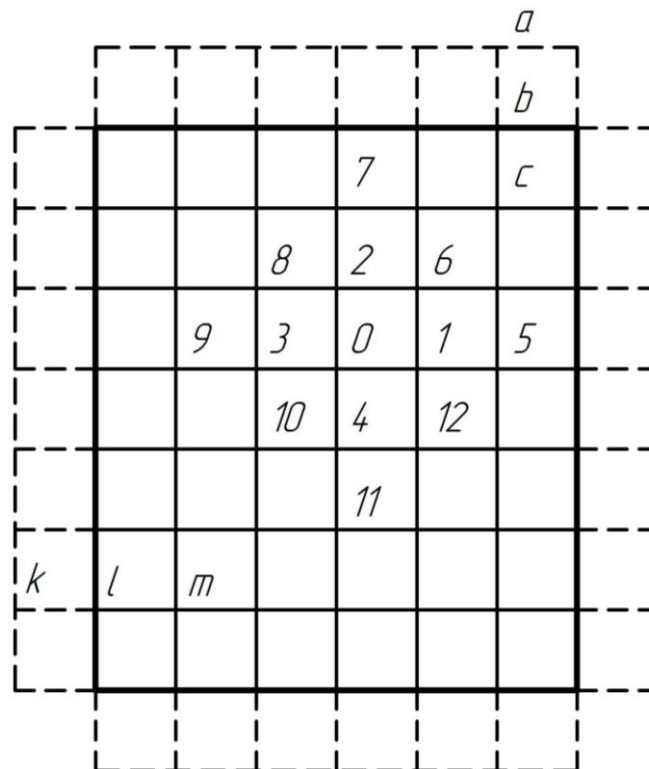


Рисунок 4.10

Використовуючи (4.49), можна записати бігармонічне рівняння (4.30) у кінцевих різницях. Після скорочення на $\frac{1}{h^4}$ це рівняння набуде для точки 0 такий вигляд:

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0. \quad (4.50)$$

Рівняння (4.50) можуть бути записані для кожної точки всередині контура. У ці рівняння увійдуть також функції напружень для точок на контурі і відстаючих на один крок за контуром (штрихові лінії на рис. 4.9)

Значення функції на контурі і за контуром визначають з граничних умов. У такому випадку отримують повну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення значень φ у точках всередині контура.

Щоб записати граничні умови використовують аналогію з балками. Розглядаючи верхню грань контура як балку можна скласти залежність між згинальним моментом і навантаженням:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q.$$

Разом з тим, для напружень σ_y з граничної умови маємо:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q.$$

Порівнюючи приведені залежності, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 M}{dx^2}$$

або після інтегрування

$$\varphi = M + C_1 \cdot x + C_2.$$

Так як напруження виражаються через другі похідні функції напружень, то значення констант C_1 і C_2 не впливають на їх величину і можна прийняти

$$\varphi = M.$$

Оскільки константи інтегрування у виразі моменту залежать тільки від характеру закріплень балки, то їх можна прийняти будь-якими. Зручно

визначати ці згинальні моменти вважаючи контур рамою з шарнірними закріпленнями стержнів у вузлах (рис. 4.11). Додатними при цьому є моменти, які розтягують волокна стержнів, які розташовані всередині рами.

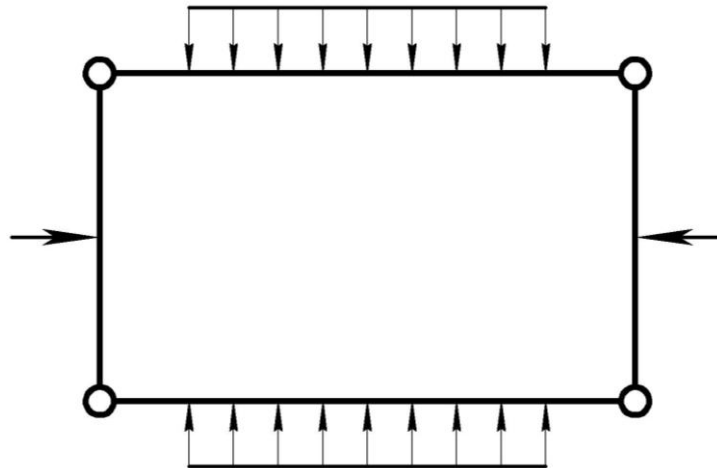


Рисунок 4.11

Для визначення значення φ у законтурній точці a (див. рис. 4.10) записують її похідну для відповідної точки b на контурі:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_b = \frac{1}{24}(\varphi_a - \varphi_c).$$

Звідси отримаємо

$$\varphi_a = \varphi_c + 2h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_b.$$

Значення похідної $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ на верхній грані отримаємо з виразу

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Дійсно

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

звідки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\int \tau_{xy} dx + C.$$

При відсутності дотичного навантаження на контурі $\int \tau_{xy} dx = 0$ похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ постійна вздовж грані. Враховуючи, що на лівій вертикальній грані $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ дорівнює похідній $\frac{dM}{dy}$ згинаючого моменту вертикального елемента рами, отримуємо, що при $x=0$ $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{dM}{dy} = Q$. Ця поперечна сила у вертикальному стержні рами з рівноваги вузла рами дорівнює поздовжній силі у горизонтальному стержні $Q_{верт} = N_{гор}$.

Для прямокутного контура при відсутності дотичного навантаження отримаємо

$$\varphi_a = \varphi_c + 2h \cdot N_b. \quad (4.51)$$

З урахуванням відповідності знаків між поперечними і поздовжніми силами у вузлах рами, аналогічне співвідношення справедливе для законтурних точок на інших гранях. Наприклад, на лівій грані для т. k маємо

$$\varphi_k = \varphi_m - 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_l = \varphi_m + 2h \cdot N_l. \quad (4.52)$$

Після складання і розв'язування системи рівнянь виду (4.50) напруження визначають за формулами (4.29), записаними у кінцевих різницях. Наприклад, для точки 0 отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{h^2} (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \\ \sigma_y &= \frac{1}{h^2} (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{4h^2} (\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Отже, метод кінцевих різниць є наближенням. Точність розрахунку підвищується зі зменшенням кроку сітки. Метод дає можливість розв'язувати плоску задачу при складному окресленні контуру, а також при наявності вирізів всередині області.

Тема 5

ЗГИН ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

- 5.1. Визначення та гіпотези**
- 5.2. Переміщення і деформації у пластинках**
- 5.3. Напруження у пластинках**
- 5.4. Внутрішні зусилля у пластинках**
- 5.5. Диференціальне рівняння вигнутої серединної поверхні**
- 5.6. Граничні умови для прямокутних пластин**

5.1. Визначення та гіпотези

Пластинка – це призматичне або циліндричне тіло (рис. 5.1), обмежене двома площинами, відстань між якими, тобто товщина h , мала порівняно з розмірами основ. Площину, що ділить товщину пластинки навпіл, називають *серединною площиною* (заштрихована ділянка на рис. 5.1). Лінія перетину серединної площини з бічними гранями утворює *контур пластинки*.

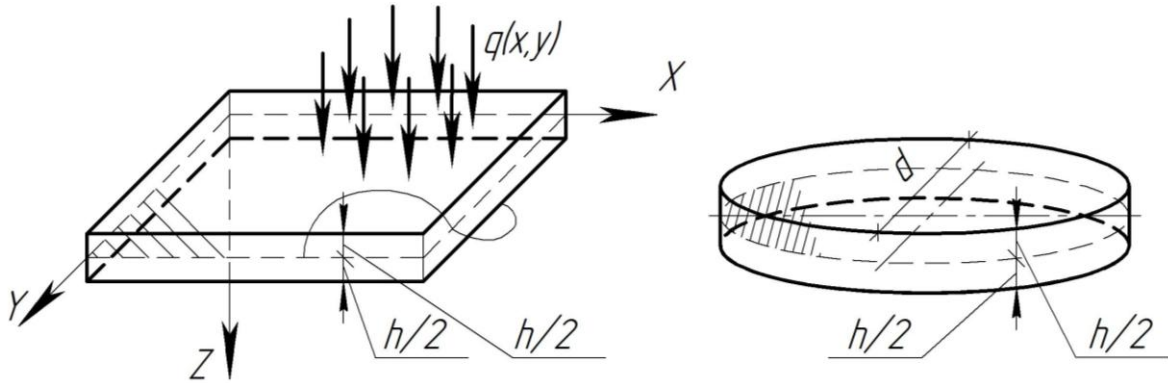


Рисунок 5.1

Осі X та Y розташовують у серединній площині, вісь Z направляють вниз. Згин пластинки виникає у результаті дії навантаження, яке прикладене до основ пластинки перпендикулярно до серединної площини.

Тонкою вважають пластинку, для якої $\frac{1}{80} \leq \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$ (a – характерний розмір основи), а можливий найбільший прогин w буде не більше $\frac{1}{4}h$ (тобто $\frac{w}{h} < \frac{1}{4}$).

Якщо товщина більша, ніж допускає перша умова, тобто $\frac{h}{a} > \frac{1}{5}$, то пластинку відносять до **товстих плит**, а коли прогин більший, ніж допускає друга умова, тобто $\frac{w}{h} > \frac{1}{4}$, то це **гнучка пластинка** (мембрана).

Пластинки широко розповсюджені у техніці, у тому числі і в будівництві. Це різні **конструкції залізобетонних покриттів та перекриттів** (як збірні, так і монолітні), **фундаментні плити** та ін.

Тонкі пластинки розраховують за, так званою, **технічною теорією пластинок**, яка, окрім **загальних гіпотез теорії пружності**, заснована на таких гіпотезах **Кірхгофа**:

1. **Гіпотеза прямої нормалі.** Нормаль до серединної площини залишається прямою і нормальною до вигнутої серединної площини, довжина нормалі не змінюється. Або, при навантаженні, паралельному осі Z , усі точки серединної площини переміщуються тільки у напрямку осі Z . Звідси виходить, що в серединній площині $u = v = 0$, а значить $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$.

2. **Гіпотеза про нерозтяжність серединної площини.** Серединна площина пластинки при згині не змінює своєї форми і розмірів. Або, прямий відрізок, нормальний до серединної площини, залишається після деформації прямим і нормальним до деформованої серединної площини, а його довжина не змінюється (рис. 5.2). Це означає, що у вертикальних перерізах пластинки відсутні деформації зсуву γ_{xz} та γ_{yz} , а також лінійна деформація ε_z .

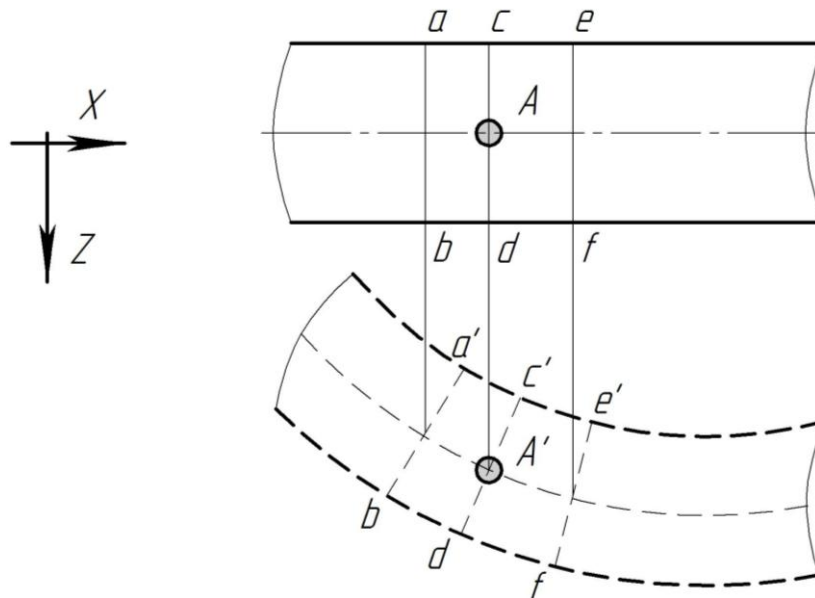


Рисунок 5.2

3. **Гіпотеза про ненавискування шарів пластинки.** Тиск шарів пластинки один на одного перпендикулярно до серединної площини вважають малим і ним можна знехтувати. Або, тиском між шарами пластинки, що паралельні серединній площині, нехтують.

Оскільки розрахунок товстих плит набагато складніший, тому, вважають, що за технічною теорією можна розраховувати пластинки з відношенням $\frac{h}{a}$ до $\frac{1}{3}$.

5.2. Переміщення і деформації у пластинках

На підставі першої гіпотези Кірхгофа переміщення w всіх точок однієї нормалі вздовж осі Z однакові і відповідають переміщенням точки на серединній площині. Ці переміщення називають прогинами серединної площини. Проілюструємо це. Виразимо горизонтальні переміщення u та v через прогин w . У перерізі пластинки, паралельному осі X (рис. 5.3), виберемо точку A на серединній площині; внаслідок деформації вона переміститься вертикально і займе положення A' . Точка B , що лежить на відстані z від серединної площини, отримає не тільки вертикальне, а й горизонтальне переміщення $u = -B'B''$ (воно від'ємне, тому що направлено проти осі X). Згідно рис. 5.3 $B'B'' = +z \sin \alpha \approx z \operatorname{tg} \alpha$.

Тут α – кут повороту нормалі $a'b'$ та дотичної $t-t'$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$, тому

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}. \text{ Аналогічно } v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.1)$$

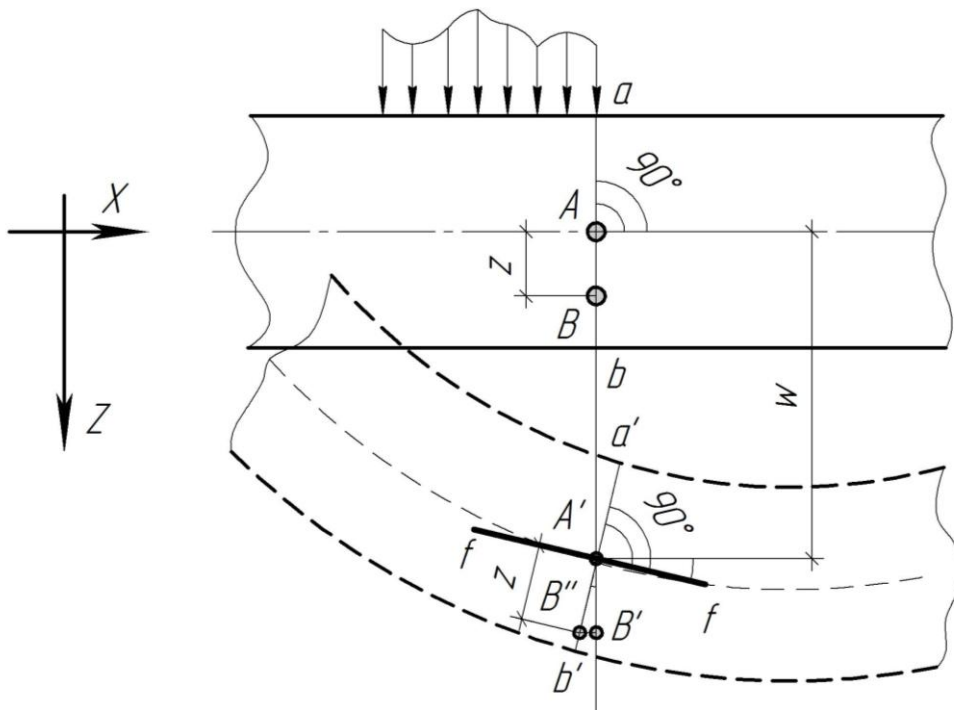


Рисунок 5.3

З рис. 5.3 видно, що вертикальне переміщення точок a, A, b дорівнюють з точністю до величин, якими знехтуємо. Тому можна вважати, що w не залежить від z та є функцією тільки двох змінних: $w = w(x, y)$.

На підставі першої гіпотези Кірхгофа лінійні деформації уздовж осі Z відсутні:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Також відсутні кутові деформації в площинах, перпендикулярних серединній площині:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Ці співвідношення інтегрують по товщині пластинки:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y); \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y).$$

За другою гіпотезою Кірхгофа переміщення на рівні серединної площини відсутні: $u_0 = 0; \quad v_0 = 0$. Тоді при $z = 0$

$$u_0 = 0 + f_1(x, y) = 0; \quad v_0 = 0 + f_2(x, y) = 0$$

відповідно

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.2)$$

Отже, вираз (5.2) аналогічний (5.1).

Якщо підставити вираз (5.1) у геометричні рівняння, тобто рівняння Коші (4.22), то отримаємо вирази деформацій через прогин w :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Решта деформацій відсутні. Отже, *всі переміщення і деформації виражені через одну функцію прогину серединної площини.*

Рівняння (5.3) – це *задачі згину тонкої пластинки.*

5.3. Напруження у пластинках

Гіпотеза 3 дозволяє використати для пластинок фізичні рівняння виведені для узагальненого плоского напруженого стану (4.24).

Отже, на підставі третьої гіпотези Кірхгофа напруження $\sigma_z = 0$. Перетворимо формули узагальненого закону Гука у прямій формі (2.28):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu\sigma_x).$$

Якщо домножити друге рівняння на μ і додати до першого, то:

$$\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma_x,$$

звідки

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y).$$

Аналогічні перетворення дають

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Підставляючи деформації ε_x і ε_y з (5.3) отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Дотичні напруження τ_{xy} отримаємо з четвертої формули узагальненого закону Гука у зворотній формі (2.37) з урахуванням залежностей коефіцієнтів Ламе (2.36) і задач згину тонкої пластинки (5.3):

$$\tau_{xy} = -\frac{E \cdot z}{1 + \mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.5)$$

На підставі першої гіпотези Кірхгофа з п'ятої та шостої формул узагальненого закону Гука у зворотній формі (2.37) отримаємо

$$\tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = 0.$$

Однак це суперечить умовам рівноваги. Дійсно, при відсутності об'ємного навантаження з першого рівняння Нав'є (3.1) випливає, що

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \quad (5.6)$$

Підставивши у (5.6) напруження з (5.4) і (5.5)

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{E \cdot z}{1 + \mu} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

після перетворень отримують

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

або з урахуванням позначення оператора Лапласа

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \quad (5.7)$$

Проінтегрувавши цей вираз по z отримують

$$\tau_{xz} = \frac{E \cdot z^2}{2(1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y). \quad (5.8)$$

При відсутності на основі пластинки дотичного навантаження

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2}; \quad \tau_{xz} = 0.$$

Тоді

$$\frac{E \left(\frac{h}{2} \right)^2}{2(1 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f(x, y) = 0$$

$$f(x, y) = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Відповідно вираз для τ_{xz} набуде вигляду

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Аналогічні перетворення другого рівняння Нав'є дають:

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w.$$

Таким чином, *при згині тонкої пластинки в її перетинах виникають такі напруження:*

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{xz} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Епюри розподілу напружень по товщині пластинки зображені на рис. 5.4. З формул (5.9) видно, що напруження σ_x , σ_y , τ_{xy} розподіляються по висоті перерізу пластинки (тобто вздовж осі Z) лінійно. Епюри напружень τ_{xz} та τ_{yz} мають форму квадратної параболи. Отже, характер розподілу нормальних і дотичних напружень у перетинах пластинки аналогічний їх розподілу в балці при поперечному згині.

Всі напруження, як і деформації, виражені через одну функцію прогинів $w(x, y)$.

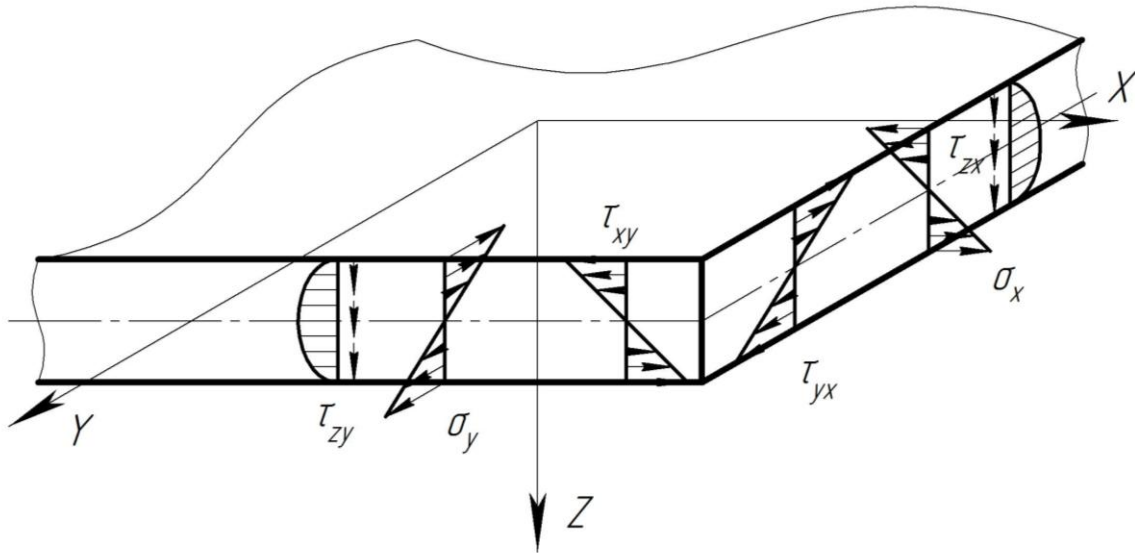


Рисунок 5.4

5.4. Внутрішні зусилля у пластинках

Усі напруження, зображені на рис. 5.4, можна привести до внутрішніх зусиль: σ_x та σ_y – до згинальних моментів, τ_{xy} та τ_{yx} – до крутних моментів, τ_{xz} та τ_{yz} – до поперечних сил.

Виділимо елемент пластинки одиничної довжини уздовж осей X та Y (рис. 5.5).

У кожній точці на гранях цього елемента (див. рис. 5.5) діють нормальні і дотичні напруження. Рівнодіючі цих напружень на смужці висотою dz , виділеній на межі з нормаллю x , зводять до таких елементарних зусиль:

$$dN_x = \sigma_x \cdot dz; \quad dS_x = \tau_{yx} \cdot dz;$$

$$dM_x = \sigma_x \cdot z dz; \quad dQ_x = \tau_{zx} \cdot dz;$$

$$dM_{yx} = \tau_{yx} \cdot z dz.$$

Підставляючи в ці вирази напруження з (5.9) та інтегруючи по z , отримують такі співвідношення:

$$N_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

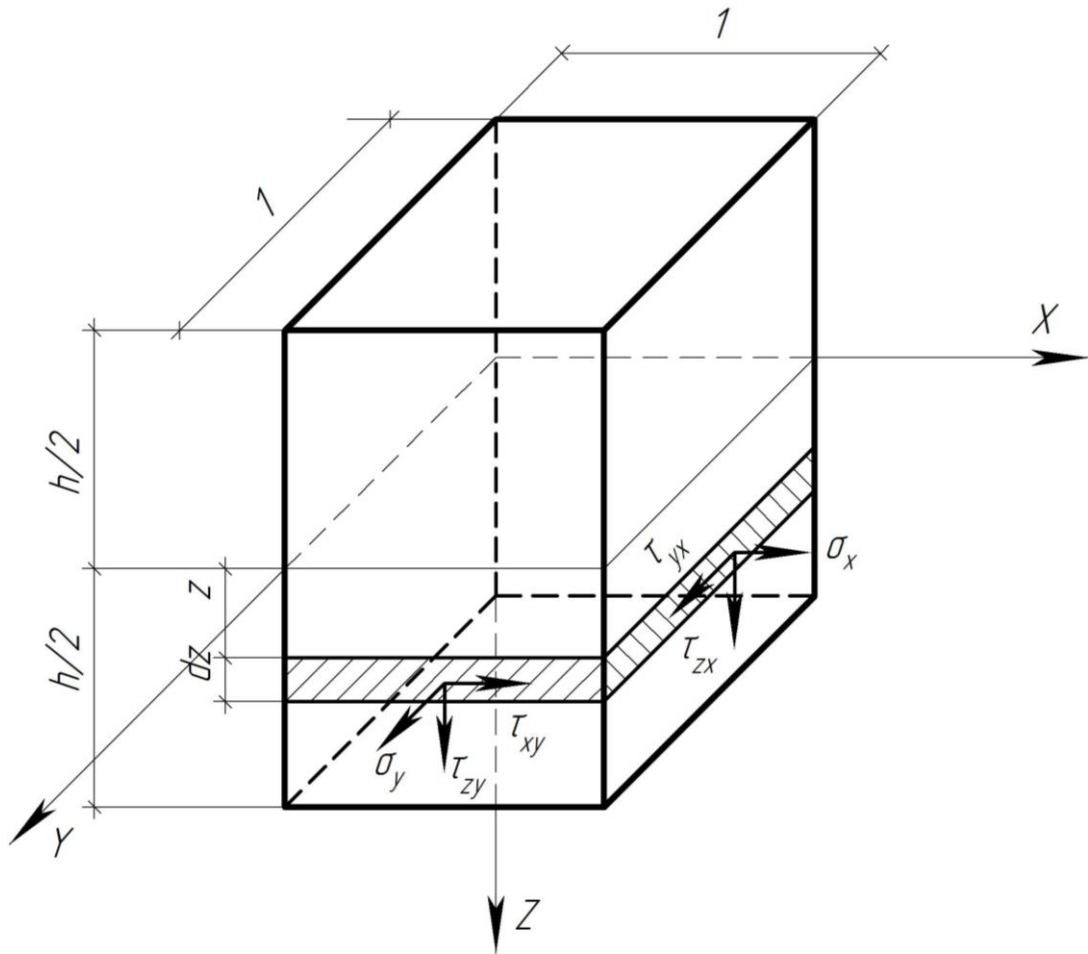


Рисунок 5.5

$$S_x = -\frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

$$M_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) =$$

$$= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz = -\frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w;$$

$$M_{yx} = -\frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = -(1-\mu) \cdot \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\mu) \cdot D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Тут введено позначення

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (5.10)$$

Це так звана **циліндрична жорсткість пластинки**, яка визначає пружні і геометричні характеристики пластинки.

Аналогічно для перетину з нормаллю y отримують:

$$N_y = 0; \quad S_y = 0; \quad Q_y = -D \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w;$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = -(1-\mu) \cdot D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Із закону взаємності дотичних напружень $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ випливає, що $M_{xy} = M_{yx}$, тому вводять нове позначення: $H = M_{xy} = M_{yx}$.

Отже, в перетинах тонкої пластинки, перпендикулярних серединній площині, при її згині діють такі **погонні** (що припадають на одиницю довжини перерізу) **зусилля**:

- **згинальні моменти**

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

- **поперечні сили**

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y &= -D \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

або

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \\ Q_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right); \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

- крутний момент

$$H = -(1 - \mu) \cdot D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.14)$$

Нормальні N_x , N_y і зсуваючі S_x , S_y зусилля при згині пластинки відсутні. Вирази (5.11)-(5.14) – це основні рівняння згину пластинок.

Усі внутрішні зусилля вимірюють на одиницю ширини перерізу пластинки. Тому їхні розмірності – кНм/м та кН/м.

Всі зусилля виражені через функцію $w(x, y)$ прогинів серединної площини. Їх додатні напрямки зображені на рис. 5.6.

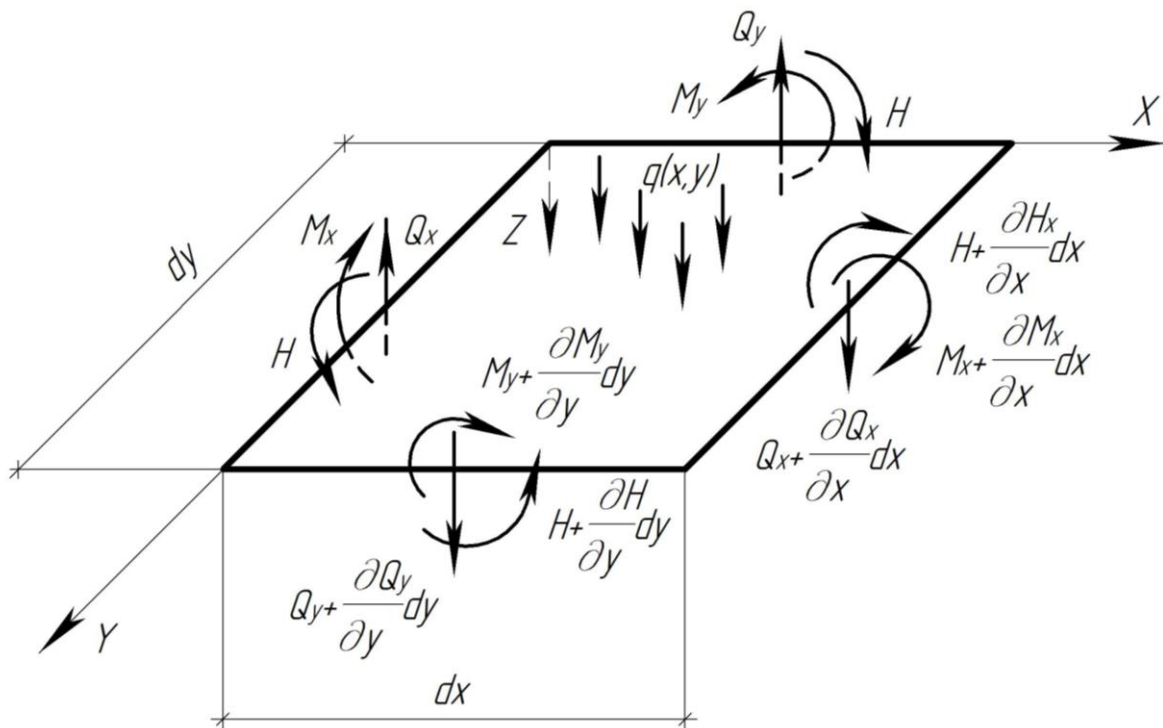


Рисунок 5.6

Індекси при зусиллях відповідають нормалі до перетину, на якому діють ці зусилля. Наприклад M_x – це погонний згинаючий момент у перерізі з нормаллю x .

Порівнюючи між собою формули напружень (5.4), (5.5) і погонних зусиль (5.11), (5.12), (5.14), з урахуванням позначення (5.10), **можна виразити напруження через зусилля:**

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x \cdot z}{h^3}; & \sigma_H &= \frac{12M_H \cdot z}{h^3}; \\ \tau_{xy} &= \frac{12H \cdot z}{h^3}; \\ \tau_{zx} &= 6Q_x \cdot \frac{\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{h^3}; & \tau_{zy} &= 6Q_y \cdot \frac{\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{h^3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Якщо врахувати, що величина $\frac{h^3}{12}$ – це момент інерції прямокутного перетину одиничної ширини, то **формули для визначення нормальних напружень σ_x, σ_y співпадають з формулами опору матеріалів:**

$$\sigma_x = \frac{M_x \cdot z}{I}; \quad \sigma_y = \frac{M_y \cdot z}{I}.$$

Аналогічна відповідність з формулами дотичних напружень в балці прямокутного перетину має місце для дотичних напружень τ_{zx} і τ_{zy} .

5.5. Диференціальне рівняння вигнутої серединної поверхні

Отримані співвідношення для деформацій, напружень і зусиль виражають через функцію $w(x, y)$ прогинів серединної площини пластинки. Тому розв'язування задачі згину тонкої пластинки полягає у визначенні цієї функції.

Розглянемо рівновагу елемента серединної площини (див. рис. 5.6), що знаходиться під дією перпендикулярного до неї навантаження q і погонних зусиль на кордонах елемента.

Спроектуємо сили на вісь Z :

$$\begin{aligned} \sum Z = & \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q dx dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - \\ & - Q_y dy dx + q dx dy = 0. \end{aligned}$$

Розкриваючи дужки і зводячи подібні, після скорочення на $dx dy$ отримаємо:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q(x, y). \quad (5.16)$$

Запишемо суму моментів сил відносно осі OY :

$$\begin{aligned} \sum M_{OY} = & \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dx dy - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) - \\ & - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + Q_y dx \frac{dx}{2} + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - \\ & - H dy dx - q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Розкриваючи дужки, зводимо подібні і відкидаємо складові третього порядку малості. Решта складові скорочуємо на $dx dy$:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \quad (5.17)$$

Аналогічне співвідношення отримаємо з рівняння моментів щодо осі OX :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \quad (5.18)$$

Продиференціюємо (5.17) за x , (5.18) за y і підставимо похідні поперечних сил у (5.16):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = -q(x, y). \quad (5.19)$$

Підставивши у (5.18) вирази згинальних і крутного моментів з (5.11) і (5.13)

$$-D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q.$$

і звівши подібні отримаємо:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y)$$

або

$$D \nabla^4 w - q = 0. \quad (5.20)$$

Це диференціальне рівняння вигнутої серединної площини. Називають його також **рівнянням Софі Жермен**. Функцію прогинів $w(x, y)$ отримують інтегруванням цього рівняння з урахуванням умов на контурі пластинки, тобто граничних умов.

5.6. Граничні умови для прямокутних пластин

Для пластин використовують два типи граничних умов: геометричні та статичні. *У геометричних умовах задають величини лінійних і кутових переміщень*, зокрема для пластин – це прогини і кути повороту нормалі до серединної площини. *Статичні умови задають величини зусиль*. При згині пластинки – це згинальні і крутний моменти, а також поперечні сили.

Рівняння Софі Жермен є диференціальним рівнянням четвертого порядку. Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння (5.20), потрібно задовольнити 8-ми граничним умовам, тому що порядок рівняння четвертий, а незалежних змінних дві (x, y) . Тому на кожній стороні контуру записують дві граничні умови, що залежать від способу закріплення цієї сторони.

Розглянемо прямокутну пластинку (рис. 5.7) з різними закріпленнями країв і покажемо який вид для них мають граничні умови.

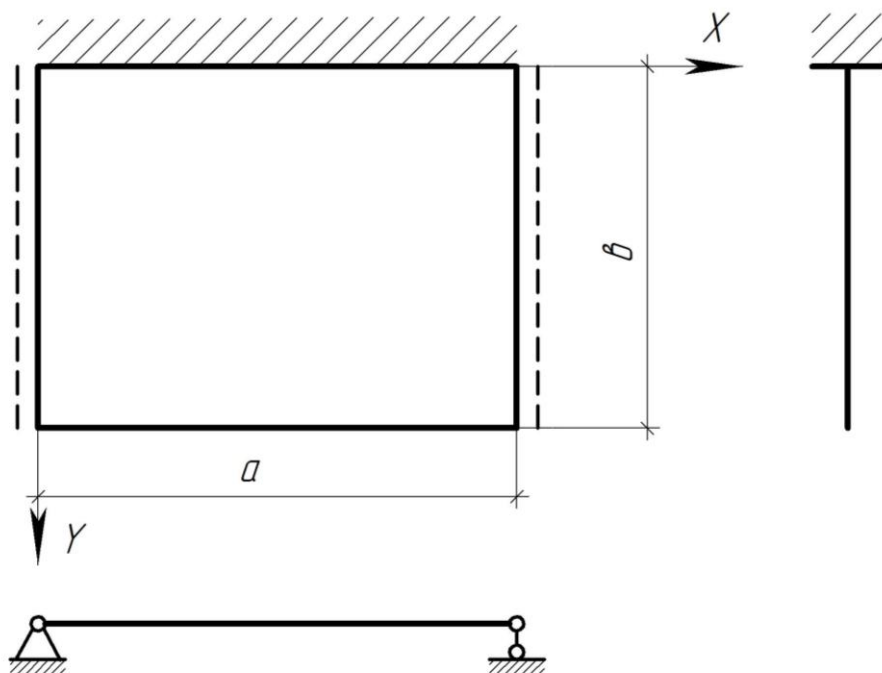


Рисунок 5.7

На защемленому краю відсутні прогини і кути повороту нормалі до серединної площини в напрямку, перпендикулярному до краю.

Запишемо граничні умови для жорсткого закріплення.

Якщо жорстко закріплено край, паралельний осі Y (рис. 5.8a), то граничні умови (прогин w та кут повороту елемента в площині XOZ дорівнюють нулю):

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (5.21)$$

Якщо жорстко закріплено край, паралельний осі X (рис. 5.8a), то граничні умови будуть такими:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (5.22)$$

На вільно (шарнірно) опертому краю (на рис. 5.7 при $x = 0$ і $x = a$) відсутні прогини і згинальні моменти в напрямках, перпендикулярних до краю:

$$w = 0; \quad M_x = 0. \quad (5.23)$$

Виражаючи моменти через функцію прогинів, отримаємо з (5.11) другу умову в розгорнутому вигляді:

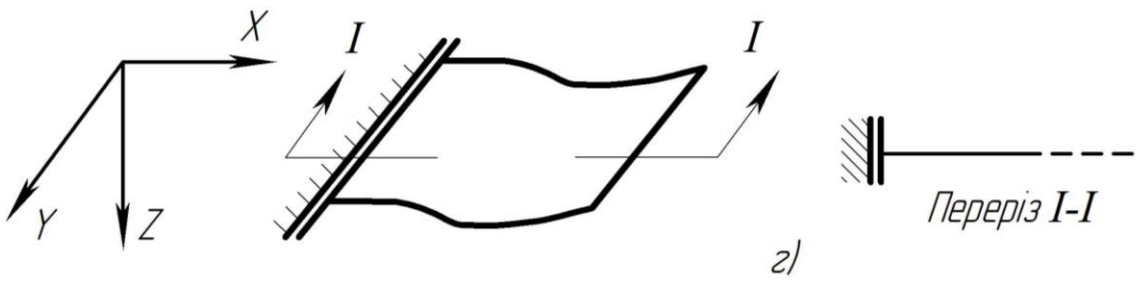
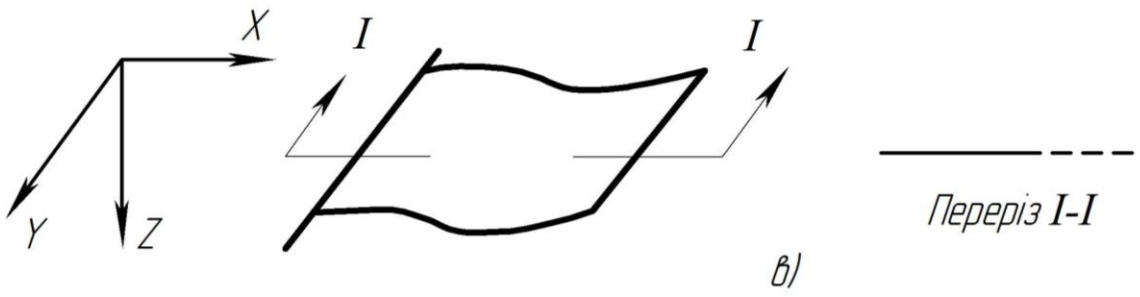
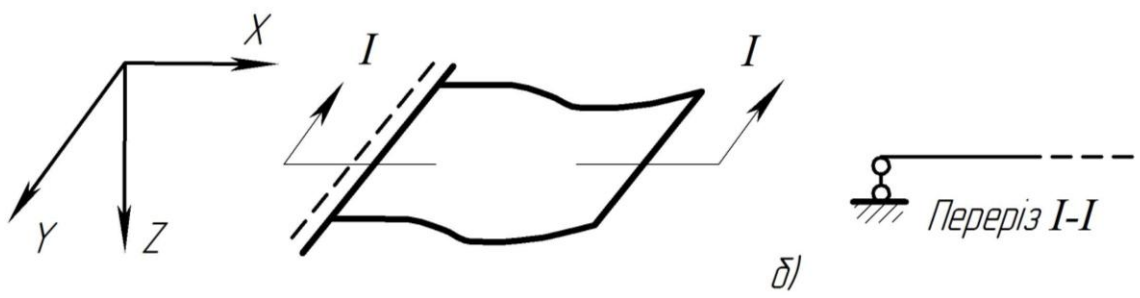
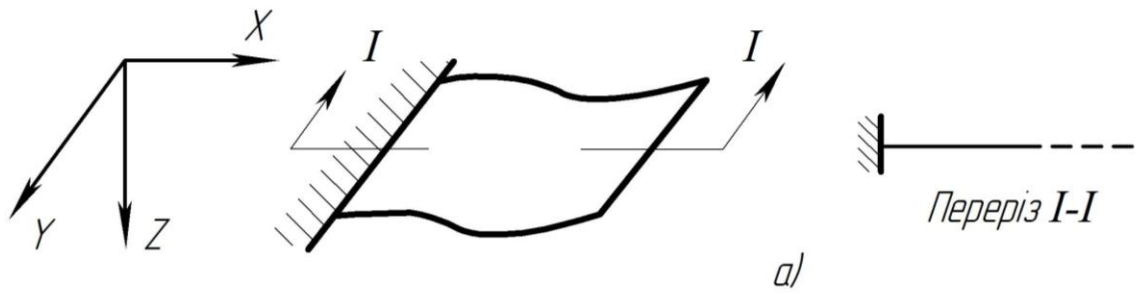


Рисунок 5.8

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (5.24)$$

Для схеми (рис. 5.8б), коли шарнірно обпертий край, котрий паралельний осі X , граничні умови:

$$w = 0; \quad M_y = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (5.25)$$

З огляду на те, що уздовж розглянутих країв прогини не залежить від координати y , кінцево маємо:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (5.26)$$

Для вільного краю (на рис. 5.7 при $y = b$ та рис. 5.8в) відсутні всі погонні зусилля:

$$M_y = 0; \quad Q_y = 0; \quad H = 0. \quad (5.27)$$

Отже, маємо надлишок граничних умов: три, замість необхідних двох.

Щоб уникнути цього, розглянемо дію крутних моментів на вільному краю (рис. 5.9а). На ділянці довжиною dx рівнодіючу крутного моменту Hdx замінимо парою сил $\frac{Hdx}{dx} = H$ (рис. 5.9б). На суміжній ділянці dx ця пара сил матиме величину $H + \frac{\partial H}{\partial x}$.

При такому розгляді дію крутних моментів замінюють розподіленим навантаженням інтенсивністю $\frac{\partial H}{\partial x}$ і кутовими зосередженими силами H (рис. 5.9в). Додавши це навантаження і поперечну силу Q_y , отримаємо деяку приведену поперечну силу

$$Q_{y \text{ прив.}}^* = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.28)$$

або з урахуванням (5.12), (5.13) і (5.14):

$$Q_{y \text{ прив.}}^* = -D \left[\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + (1 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

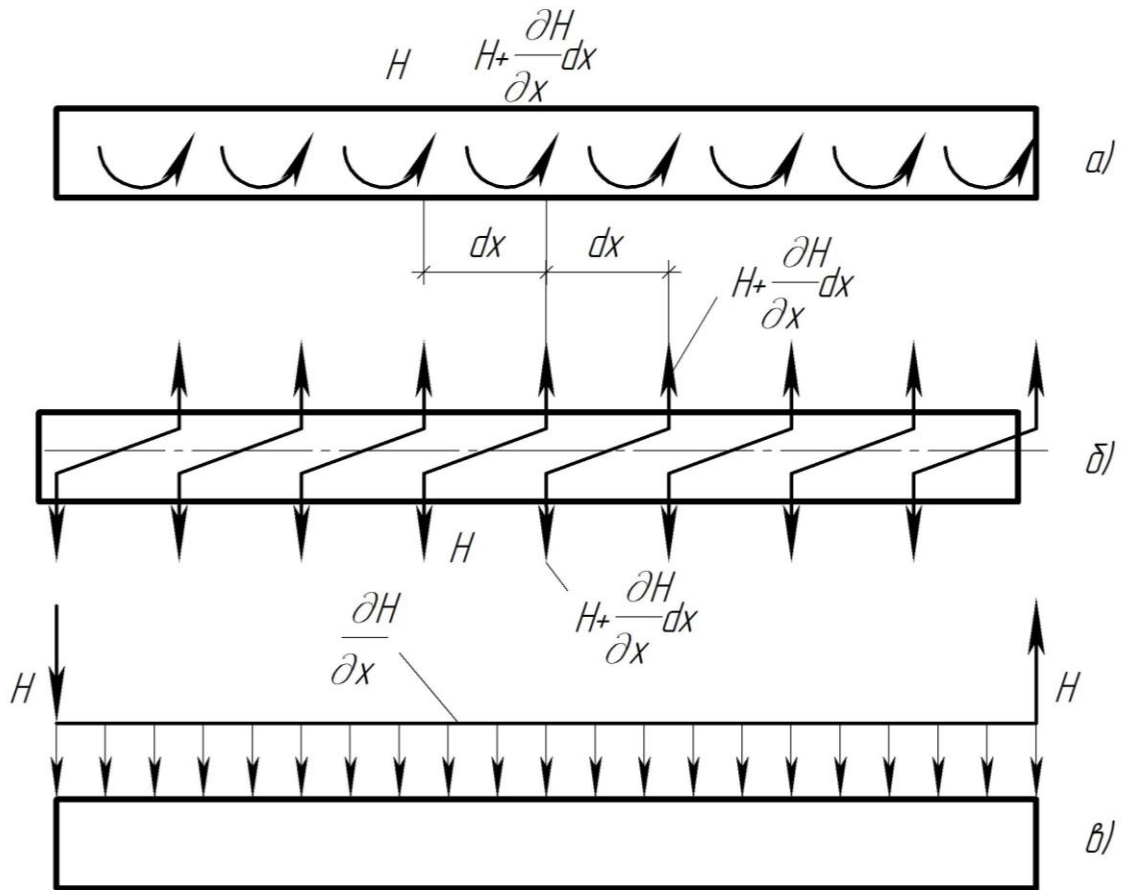


Рисунок 5.9

Отже, на вільному краю пластинки замість трьох умов можна записати дві.

Якщо вільний край паралельний осі Y (див. рис. 5.8в), то граничні умови:

$$M_x = 0; \quad Q_{x \text{ прив}}^* = 0 \quad (5.29)$$

або

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (5.30)$$

Якщо вільний край паралельний осі X (див. рис. 5.8б), то граничні умови

$$M_y = 0; \quad Q_{y \text{ прив}}^* = 0 \quad (5.31)$$

або

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (5.32)$$

Розглянемо випадок **ковзного закріплення** (рис. 5.8z). При такому закріпленні пластинки вільно пересуваються у вертикальному напрямку, тому що вертикальні опорні зв'язки відсутні. Це означає, що дорівнює нулю зусилля $Q_{x \text{ прив.}}^*$. Крім того, відсутній поворот у площині XOZ (див. рис. 5.8z). Граничні умови такі:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad Q_{x \text{ прив.}}^* = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (5.33)$$

Якщо в такий спосіб закріпити край, паралельний осі X , то граничні умови такі:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad Q_{y \text{ прив.}}^* = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (5.34)$$

На краях пластинки можуть бути прикладені зовнішні навантаження у вигляді моментів або вертикальних сил. Якщо до вільного краю або до краю, на якому є ковзне закріплення, прикладене розподілене вертикальне навантаження інтенсивністю p , то в граничних умовах (5.30) або (5.33) замість $Q_{x \text{ прив.}}^* = 0$ записують $Q_{x \text{ прив.}}^* = \pm p(y)$, а в (5.32) або (5.34) – $Q_{y \text{ прив.}}^* = \pm p(x)$.

Якщо ж до шарнірно обпертого або вільного краю прикладений розподілений момент m , то в (5.24) та (5.30) замість $M_x = 0$ записують $M_x = \pm m(y)$, а в (5.25) та (5.32) – $M_y = \pm m(x)$.

Знак «+» або «-» у всіх цих виразах залежить від того, чи відповідає напрямок навантаження додатному напрямку відповідного зусилля (див. рис. 5.6).

Тема 6

РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЗГИНУ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

- 6.1. Рішення Нав'є
- 6.2. Метод Рітца-Тимошенко
- 6.3. Метод Бубнова-Гальоркіна
- 6.4. Метод кінцевих різниць
- 6.5. Розрахунок пластинки,
шарнірно обпертої по всьому контуру

6.1. Рішення Нав'є

Це рішення отримано для задачі згину прямокутної пластинки, шарнірно опертої по всьому контуру (рис. 6.1). Поперечне навантаження $q(x, y)$ вважаємо змінним за будь-яким законом.

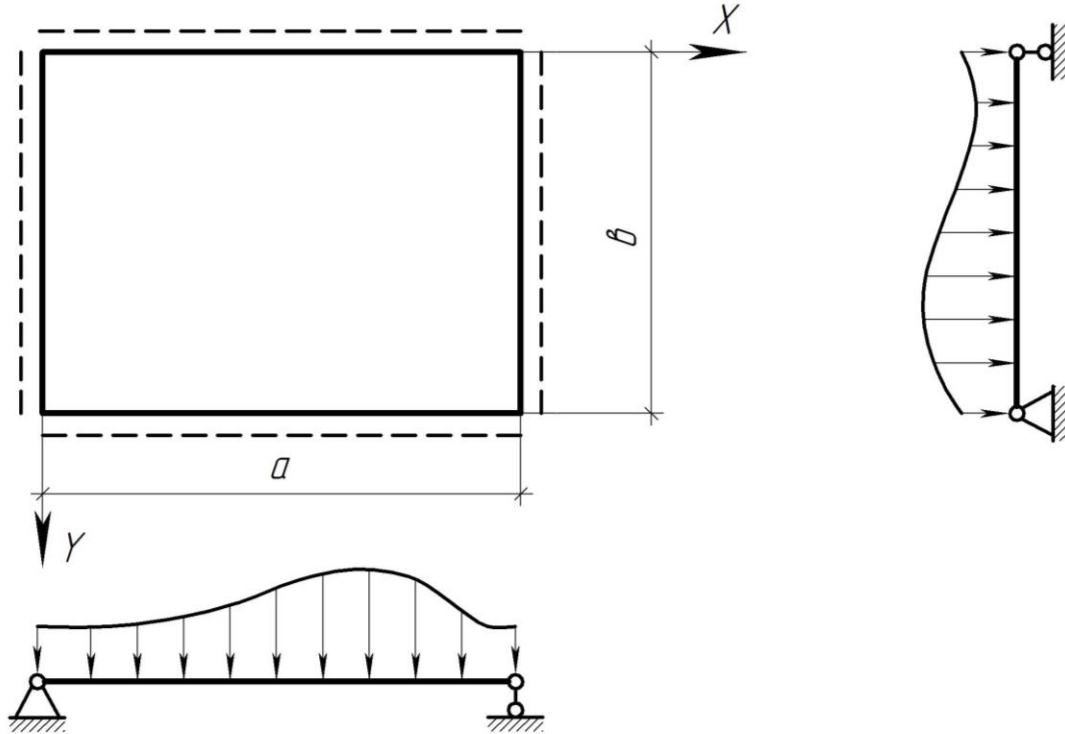


Рисунок 6.1

Функцію прогинів $w(x, y)$ шукають у вигляді подвійного тригонометричного ряду

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (6.1)$$

$$m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

Завдання полягає у визначенні коефіцієнтів ряду A_{mn} (6.1).

Перевіримо виконання граничних умов. При шарнірному закріпленні маємо:

$$\text{при } x = 0 \text{ і } x = a \quad w = 0 \text{ і } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y = 0 \text{ і } y = b \quad w = 0 \text{ і } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

При $x = 0$ $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0$ і при $x = a$ $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0$.

Аналогічно, при $y = 0$ і $y = b$ отримаємо $\sin \frac{n\pi y}{b} = 0$. Таким чином, прогини на гранях пластинки відсутні.

Запишемо другі похідні прогинів:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Ці похідні, як і прогини, містять множники $\sin \frac{m\pi x}{a}$ і $\sin \frac{n\pi y}{b}$, і тому при $x = 0$, $x = a$ і при $y = 0$, $y = b$ також перетворюються в нуль. Таким чином, функція (6.1) задовольняє всім граничним умовам і може бути використана для вирішення завдання.

Для визначення коефіцієнтів A_{mn} візьмемо четверті похідні функції прогинів:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

і підставимо їх у рівняння Софі Жермен (5.20)

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y).$$

Після перетворень отримаємо:

$$D \pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y). \quad (6.2)$$

Навантаження $q(x, y)$ також можна подати у вигляді подвійного тригонометричного ряду у синусах:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.3)$$

Коефіцієнти цього ряду, згідно з теорією рядів Фур'є, в прямокутній області $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ визначають за формулою

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (6.4)$$

З урахуванням (6.3) і (6.4) рівняння (6.2) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} D \pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Рівність двох рядів виконується, якщо дорівнюють одні одним їх відповідні члени, тобто

$$D \pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}. \quad (6.6)$$

Звідси знаходимо:

$$A_{mn} = \frac{C_{mn}}{D \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

або, з урахуванням виразу для C_{mn} (6.4), маємо:

$$A_{mn} = \frac{4}{D \pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (6.7)$$

Розглянемо випадок згину пластинки під дією рівномірно розподіленого на всій поверхні навантаження $q(x, y) = q = \text{const}$.

Коефіцієнти ряду в прямокутній області визначають за формулою

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \\ &= q_0 \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = 4q \frac{ab}{mn \cdot \pi^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Відповідно коефіцієнти

$$A_{mn} = \frac{16q}{D \pi^6 m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (6.9)$$

Отже, **функція прогинів** (6.1) для випадку рівномірно-розподіленого навантаження на всій поверхні пластинки набуде вигляду:

$$w(x, y) = \frac{16q}{D \pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (6.10)$$

Максимальний прогин буде в центрі пластинки (при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$)

і визначають його за формулою

$$w_{\max} = \frac{16q}{D \pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (6.11)$$

або, з урахуванням, $D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}$,

$$w_{\max} = \frac{192q}{\pi^6 E h^3} (1 - \mu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (6.12)$$

Для практичного використання вираз (6.12) зручно представити у такому вигляді:

$$w_{\max} = \frac{\alpha q a^4}{E h^3}, \quad (6.13)$$

де

$$\alpha = \frac{192}{\pi^6} (1 - \mu^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2}$$

– коефіцієнт, що залежить від співвідношення сторін пластинки $\frac{a}{b}$.

Значення цього коефіцієнта є у відповідних довідниках.

Ряд, що входить у вираз для α , швидко сходиться. Так, при утриманні перших чотирьох ненульових членів ряду для квадратної пластинки ($\frac{a}{b} = 1$) і $\mu = 0,3$ отримаємо:

$$\alpha = \frac{192}{\pi^6} (1 - 0,3^2) \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}}{1 \cdot 1 (1^2 + 1^2)^2} + \frac{\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2}}{1 \cdot 3 (1^2 + 3^2)^2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}}{3 \cdot 1 (3^2 + 1^2)^2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2}}{3 \cdot 3 (3^2 + 3^2)^2} \right] = 0,0443,$$

що збігається з точним значенням.

При підстановці функції прогинів (6.11) у вирази (5.11) отримаємо **залежності для визначення згинальних моментів:**

$$M_x = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (6.14)$$

$$M_y = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.15)$$

Згинальні моменти досягають найбільшого значення в центрі пластинки:

$$M_{x \max} = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{b}; \quad (6.16)$$

$$M_{y \max} = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \mu m^2}{m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{b}. \quad (6.17)$$

Аналогічно прогинам, отримані вирази (6.16) і (6.17) можна записати у такому вигляді:

$$M_{x \max} = \beta q a^2; \quad (6.18)$$

$$M_{y \max} = \beta_1 q a^2. \quad (6.19)$$

Ряди в коефіцієнтах β і β_1 сходяться повільніше, ніж в прогинах. Так, для квадратної пластинки при збереженні перших чотирьох ненульових членів ряду отримуємо $\beta = 0,0469$. Це значення відрізняється від точного ($\beta = 0,0479$) вже на 2,1%.

При знайденій функції прогинів можна **визначити поперечні сили**. Залежності для них з врахуванням (5.13) мають такий вигляд:

$$Q_x = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}; \quad (6.20)$$

$$Q_y = \frac{16q a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m \left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)}. \quad (6.21)$$

Найбільших значень поперечні сил досягають на серединах сторін пластинки. Так Q_x , набуває найбільшого значення при $x = 0, y = \frac{b}{2}$:

$$Q_{x \max} = \frac{16q a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (6.22)$$

або

$$Q_{x \max} = \gamma q a. \quad (6.23)$$

Q_y набуває найбільшого значення при $x = \frac{a}{2}; b = 0$:

$$Q_{y \max} = \frac{16q a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m \left(m^2 \frac{a^2}{b^2} + n^2 \right)} \quad (6.24)$$

або

$$Q_{y \max} = \gamma_1 q a. \quad (6.25)$$

Ряди в коефіцієнтах γ, γ_1 сходяться ще повільніше, ніж в β, β_1 . Зокрема, для квадратної пластинки при утриманні перших чотирьох

ненульових членів ряду отримаємо $\gamma = 0,283$, що відрізняється від точного значення $\gamma = 0,338$ вже на 16,3%.

Слід зазначити, що більш загальним є **рішення Леві**, яке передбачає наявність шарнірного обпирання лише на двох протилежних краях пластинки, а інші можуть мати довільні закріплення. Це рішення в нашому курсі не розглядається.

6.2. Метод Рітца-Тимошенко

Метод заснований на теоремі Лагранжа, відповідно до якої з усіх можливих розподілів переміщень пружного тіла істинними є такі, які надають повній потенційній енергії системи мінімальне значення, тобто:

$$U_n = U + W = \min. \quad (6.26)$$

Тут U – **робота пружної деформації тіла**. Для випадку згину тонкої пластинки вона має вигляд:

$$U = -\frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (6.27)$$

Робота зовнішніх сил, що діють на пластинку, при відсутності об'ємного навантаження

$$W = \iint_S q w dx dy. \quad (6.28)$$

Прийmemo **функцію прогинів** пластинки у вигляді ряду

$$w_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_{ik}, \quad (6.29)$$

де φ_{ik} – деякі задані функції, $\varphi_{ik} = \varphi_{ik}(x, y)$;

a_{ik} – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Після підстановки функції (6.29) вираз (6.26) є квадратичною функцією параметрів a_{ik} , а робота зовнішніх сил – їх лінійною функцією.

Мінімуму повної потенційної енергії системи відповідає умова рівності нулю її похідних за параметрами a_{ik} :

$$\frac{\partial U}{\partial a_{ik}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.30)$$

Отже, отримують систему n^2 лінійних рівнянь для визначення параметрів a_{ik} .

Рівняння (6.30) виражають як умови рівноваги, так і статичні граничні умови. Тому при задані функцій φ_{ik} , що входять у вираз прогинів (6.29), обов'язково задовольняти лише кінематичні граничні умови.

Підставляючи знайдені з (6.30) параметри a_{ik} у (6.29) отримаємо **шукану функцію прогинів пластинки.**

Отримане рішення є наближеним. Збіжність ряду (6.29) до точного рішення можна підвищити, приймаючи функції φ_{ik} такими, що задовольняють як статичним, так і кінематичним граничним умовам, а також збільшуючи число членів ряду.

6.3. Метод Бубнова-Гальоркіна

Метод заснований на властивості ортогональних функцій. Ортогональними на відрізку $a \leq x \leq b$ називають функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, для яких виконується умова

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0. \quad (6.31)$$

Якщо одна з функцій, наприклад $\varphi_2(x)$, тотожно дорівнює нулю, то вона буде ортогональна до будь-якої функції $\varphi_1(x)$. Наприклад, функція

$$\varphi(x) = Ely^{IV} - q, \quad (6.32)$$

є лівою частиною диференціального рівняння зігнутої осі балки, тотожно дорівнює нулю при всіх значеннях x , тому

$$\int_l (Ely^{IV} - q) \varphi_i(x) dx = 0. \quad (6.33)$$

Якщо функцію прогинів $y(x)$ замінити наближено рядом

$$y_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \varphi_i, \quad (6.34)$$

то вираз $Ely^{IV} - q$ вже тотожно не дорівнюватиме нулю, відтак не буде ортогональним будь-якій функції. Тоді будемо вимагати, щоб цей вираз

був ортогональним до кожної з функцій φ_i , які становлять ряд y_n (6.34), тобто щоб виконувалися умови:

$$\int_l (EIy^{IV} - q)\varphi_i dx = 0, \quad (6.35)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Отже, *отримаємо систему n лінійних рівнянь для визначення n коефіцієнтів a_i , що входять у ряд.*

Наведені міркування можна застосувати і до функцій двох змінних.

Розглянемо функцію прогинів у вигляді ряду (6.29).

Вимагатимемо, щоб ліва частина диференціального рівняння зігнутої серединної поверхні (рівняння Софі Жермен)

$$D \nabla^4 w - q = 0 \quad (6.36)$$

була ортогональна кожній з функцій $\varphi_{ik}(x, y)$ ряду (6.29). Ці умови для прямокутної області $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ призводять до такої системи рівнянь:

$$\int_0^a \int_0^b (D \nabla^4 w - q)\varphi_{ik} dx dy = 0, \quad (6.37)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Рішення системи дає значення коефіцієнтів a_{ik} і, тим самим, функцію прогинів.

Метод Бубнова-Гальоркіна дозволяє простіше, ніж у методі Рітца-Тимошенко отримати значення коефіцієнтів ряду (6.29). Труднощі тут пов'язані з підбором функцій φ_{ik} , так як вони повинні задовольняти не тільки кінематичним, але і статичним граничним умовам.

Методу Бубнова-Гальоркіна можна дати енергетичну інтерпретацію. Ліва частина диференціального рівняння (6.36) є проекцією на вісь Z внутрішніх і зовнішніх сил, що діють на нескінченно малий елемент серединної поверхні пластинки. Функції φ_{ik} , що входять в ряд w , можна розглядати як можливі переміщення серединної поверхні. Тоді умови (6.37) виражають *принцип можливих переміщень*.

Методи Рітца-Тимошенко і Бубнова-Гальоркіна рівноцінні і призводять до однакових результатів, якщо функції φ_{ik} обрані так, що задовольняють всім граничним умовам.

6.4. Метод кінцевих різниць

Суть методу скінченних різниць викладена в п. 4.8. Неперервну функцію замінюють набором значень у фіксованих точках. Похідні функції виражають через різниці значень функції у точках, завдяки чому диференціальне рівняння замінюють системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

З урахуванням наведених у цій темі виразів похідних диференціальне рівняння зігнутої серединної поверхні, тобто рівняння Софі Жермен (6.36) для точки 0 сітки прямокутної пластинки (рис. 6.2) набуде такого вигляду:

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_6 + w_8 + w_{10} + w_{12}) + w_5 + w_7 + w_9 + w_{11} = \frac{q_0 h^4}{D}. \quad (6.38)$$

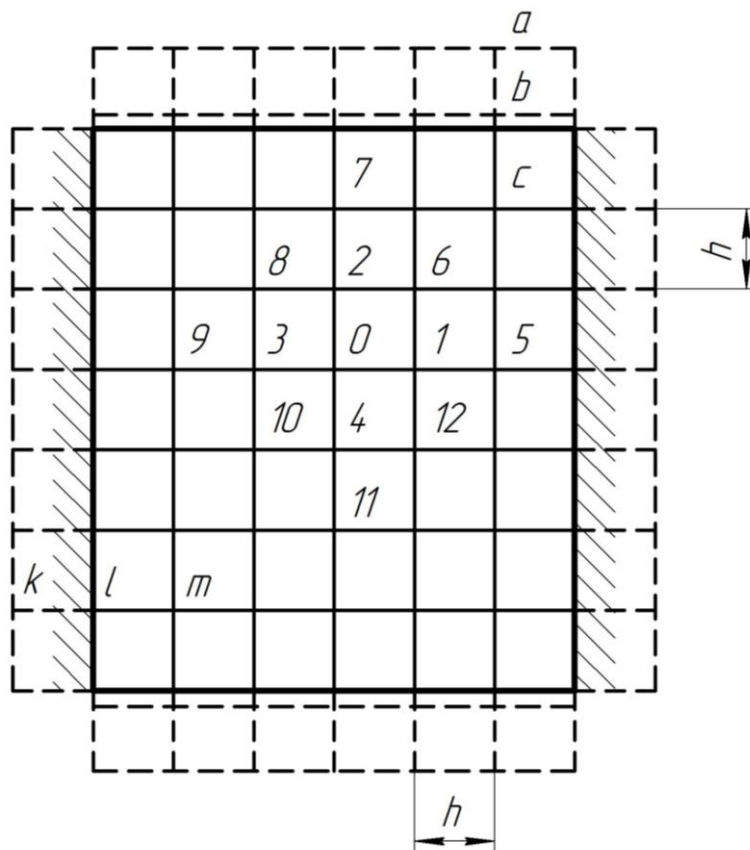


Рисунок 6.2

Як і у випадку плоскої задачі, *ці рівняння складають для всіх внутрішніх точок сітки. Значення прогинів, які входять у них, для точок на контурі і за контуром визначають з граничних умов.* Для точок на защемленому (т. *l*) і шарнірно опертому (т. *b*) контурах (див. рис. 6.2) прогини відсутні: $w_b = 0$; $w_l = 0$.

Умова відсутності повороту нормалі на защемленому краю пластинки призводить до співвідношення $w_k = w_n$, а умова відсутності згинальних моментів на шарнірно опертому краю дає: $w_a = -w_c$.

Для вільного краю граничні умови в кінцевих різницях призводять до більш складних співвідношень.

Після підстановки граничних умов рішення системи рівнянь (6.38) дає значення прогинів у внутрішніх точках сітки.

Значення погонних зусиль (згинальні моменти, поперечні сили, крутний момент) визначають за формулами (5.11), (5.13), (5.14) через кінцеві різниці. Наприклад, згинальні моменти в точці 0 (див. рис. 6.2) матимуть такий вигляд:

$$(M_x)_0 = -\frac{D}{h^2} \left[w_1 - 2w_0 + w_3 + \mu \left(w_3 - 2w_0 + w_5 \right) \right];$$

$$(M_y)_0 = -\frac{D}{h^2} \left[w_3 - 2w_0 + w_5 + \mu \left(w_1 - 2w_0 + w_3 \right) \right].$$

6.5. Розрахунок пластинки, шарнірно опертої по всьому контуру

Розглянемо приклад розрахунку пластинки шарнірно-опертої по всьому контуру для різних випадків її навантаження.

А. Синусоїдальне навантаження.

До прямокутної шарнірно опертої пластинки (рис. 6.3) прикладене навантаження, розподілене за законом:

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (6.39)$$

При $x = 0$ $\sin \frac{\pi x}{a} = \sin 0 = 0$; при $x = a$ $\sin \frac{\pi x}{a} = \sin \pi = 0$; при $y = 0$

та $y = b$ аналогічно отримаємо $\sin \frac{\pi y}{b} = 0$. Таким чином, у будь-якій точці контуру виявляється $q = (x, y) = 0$. В центрі пластинки ($x = a/2$; $y = b/2$) $\sin \frac{\pi x}{a} = \sin \frac{\pi y}{b} = 1$ та $q = (x, y) = q_0$. Потрібно знайти вираз для прогинів $w(x, y)$, що задовольнятиме диференціальне рівняння зігнутої серединної поверхні (рівняння Софі Жермен) (6.36) та граничним умовам:

$$x=0 \begin{cases} w=0; \\ M_x=0; \end{cases} \quad x=a \begin{cases} w=0; \\ M_x=0; \end{cases} \quad y=0 \begin{cases} w=0; \\ M_y=0; \end{cases} \quad x=b \begin{cases} w=0; \\ M_y=0. \end{cases} \quad (6.40)$$

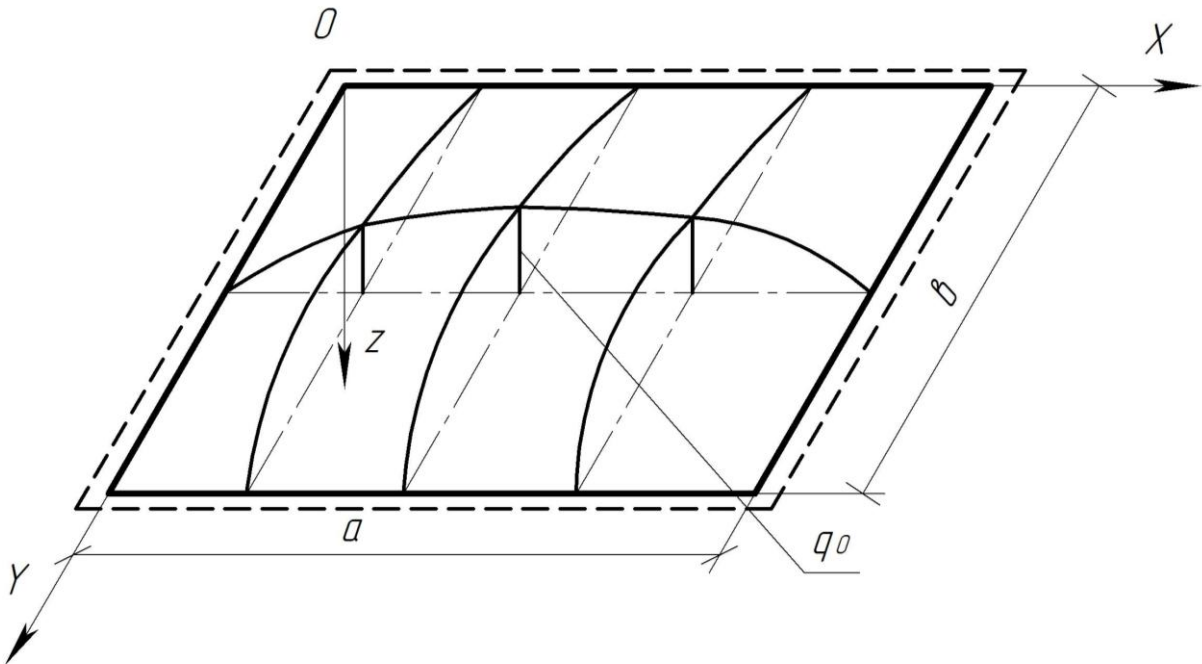


Рисунок 6.3

Приймаємо, що прогини описуються законом:

$$w(x, y) = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (6.41)$$

тут A – невідома величина, тобто прогин у центрі пластинки.

Якщо підставити прогини з рівняння (6.41) у рівняння згинальних моментів (5.11), то отримаємо:

$$M_x = D A \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \mu \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad (6.42)$$

$$M_y = D A \left[\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \mu \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Вирази (6.41) та (6.42), так само як і (6.39), мають добуток $\sin \frac{\pi \cdot x}{a} \sin \frac{\pi \cdot y}{b}$; значить w , M_x та M_y обертаються в нуль на всьому контурі пластинки та граничні умови (6.40) задовольняються. Підставляємо (6.39) та (6.41) в основне рівняння згину пластинок (6.36):

$$\begin{aligned}
& A \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \\
& = \frac{1}{D} q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.
\end{aligned} \tag{6.43}$$

З якого визначимо

$$A = \frac{q_0}{D \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2} = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 D (1+k^2)^2}, \tag{6.44}$$

де $k = a/b$.

Отже, кінцевий вираз для визначення прогину:

$$w(x, y) = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 D (1+k^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \tag{6.45}$$

Підставимо вираз (6.45) у (6.42):

$$M_x = \frac{q_0 a^2 (1 + \mu k^2)}{\pi^2 (1+k^2)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \tag{6.46}$$

$$M_y = \frac{q_0 a^2 (\mu + k^2)}{\pi^2 (1+k^2)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \tag{6.47}$$

Якщо підставити (6.45) у вирази (5.13) і (5.14), то отримаємо формули для визначення крутного моменту і поперечних сил:

$$H = \frac{q_0 a^2 k (1 + \mu)}{\pi^2 (1+k^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \tag{6.48}$$

$$Q_x = \frac{q_0 a}{\pi (1+k^2)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \tag{6.49}$$

$$Q_y = \frac{q_0 a k}{\pi (1+k^2)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \tag{6.50}$$

За формулами (6.45), (6.46)-(6.50) можна побудувати просторові епюри розподілу прогину та внутрішніх зусиль у пластинці. Форма цих епюр зображена на рис. 6.4.

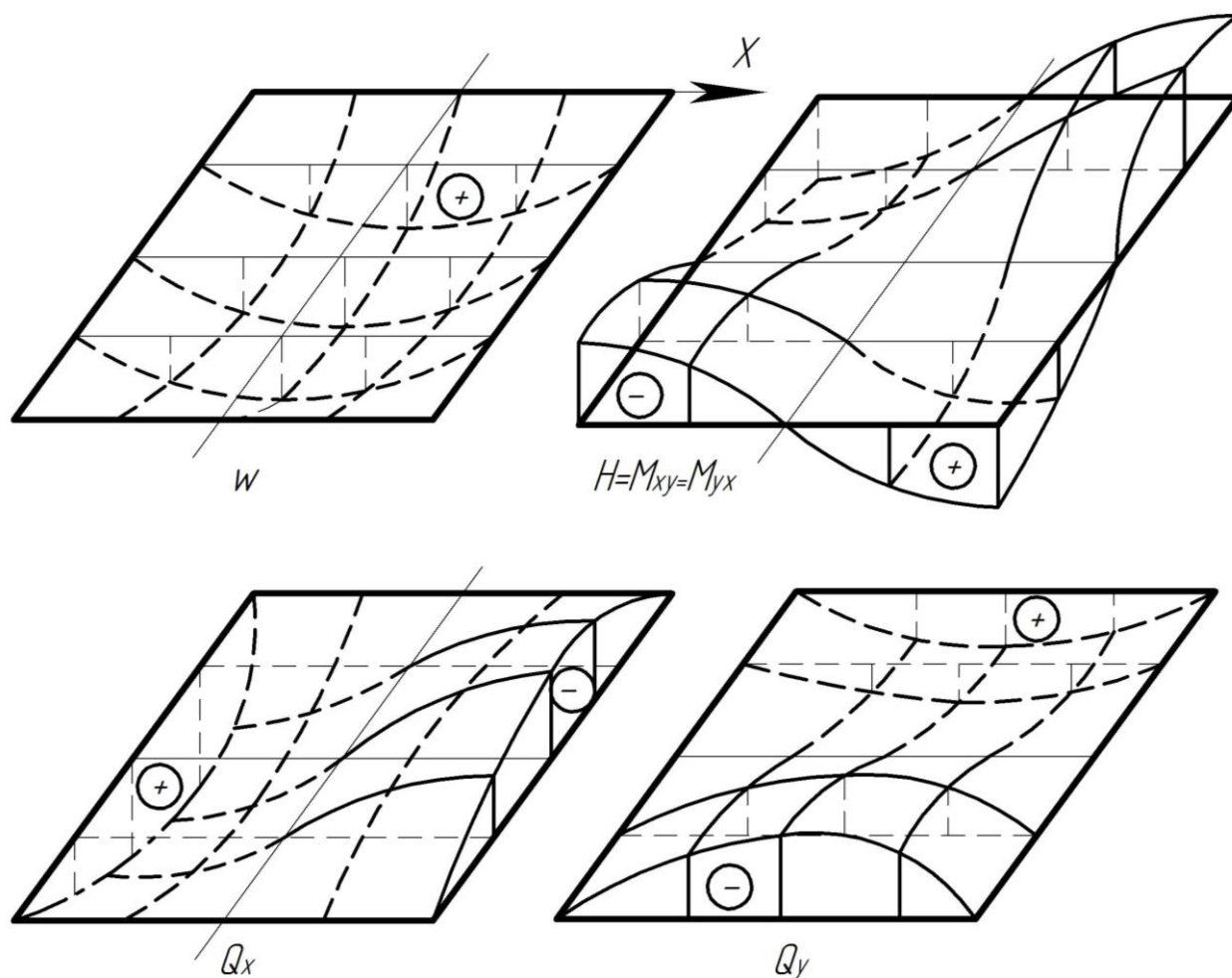


Рисунок 6.4

Б. Довільне навантаження.

У цьому випадку навантаження потрібно представити у вигляді подвійного тригонометричного ряду:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.51)$$

Коефіцієнти цього ряду, згідно з теорією рядів Фур'є, визначають за формулою:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (6.52)$$

Прогин, який шукаємо, також визначається подвійним рядом:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.53)$$

Кожний член цього ряду задовольняє умовам шарнірного обпирання (6.40), так само, як це було доказано для виразів (6.39) та (6.41). Підстановка (6.53) у рівняння (6.36) надає:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{C_{mn}}{D} \right\} \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Якщо сума тригонометричного ряду дорівнює нулю, то дорівнює нулю кожний коефіцієнт цього ряду (в даному випадку – вираз у фігурних дужках. Тому

$$A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] = C_{mn};$$

відповідно

$$A_{mn} = \frac{C_{mn}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} = \frac{q_0 a^4 C_{mn}}{\pi^4 D (m^2 + k^2 n^2)}. \quad (6.54)$$

При $m = n = 1$ (6.54) перетворюється в (6.44). Підставляючи (6.54) у (6.53) знаходимо вираз для прогину, а після цього за допомогою формул (5.11), (5.13) і (5.14) – вирази для внутрішніх зусиль. Усі вони, як і (6.53), мають вигляд подвійних рядів. Так, наприклад:

$$M_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \mu \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.55)$$

В. Рівномірно розподілене навантаження.

Якщо пластинка завантажена рівномірно розподіленим навантаженням, тобто $q = const$, то згідно (6.52) коефіцієнти ряду можна визначити за формулою:

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{4q}{ab} \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \\ &= \frac{4q}{ab} \left(\frac{a}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{a} \right)_0^a \times \left(\frac{b}{n\pi} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)_0^b = \\ &= \frac{4q}{\pi^2 m n} (\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1). \end{aligned} \quad (6.56)$$

При парних значеннях m та n $\cos m\pi = \cos n\pi = 1$ та вирази у дужках дорівнюють нулю. При непарних значеннях $\cos m\pi = \cos n\pi = -1$, та вирази у дужках дорівнюють -2 . Кінцево:

$$C_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 m n}. \quad (6.57)$$

$$w(x, y) = \frac{16q a^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (6.58)$$

$$\bar{A}_{mn} = \frac{1}{m n (m^2 + k^2 n^2)^2}. \quad (6.59)$$

В рядах (6.51), (6.53), (6.55) та ін. індекси приймають лише непарні значення не тільки при $q = const$, але і в тих випадках, коли навантаження розподілене відносно середини прольоту (рис. 6.5).

Для того, щоб обчислити значення суми подвійного ряду, потрібно було б перебрати усі сполучення значень m та n в межах від 1 до ∞ . В реальних розрахунках обмежуються кінцевою кількістю членів ряду: $m = 1, \dots, I$; $n = 1, \dots, K$. У цьому випадку загальна кількість членів ряду буде дорівнювати IK . Значення: I та K обирають залежно від потрібної точності та швидкої збіжності ряду. **Чим плавніше розподілене навантаження, тим скоріше збігаються ряди.** Так, наприклад, для схем на рис. 6.5а та 6.5д ряди збігаються повільніше, ніж для схем рис. 6.5б, 6.5в, 6.5г.

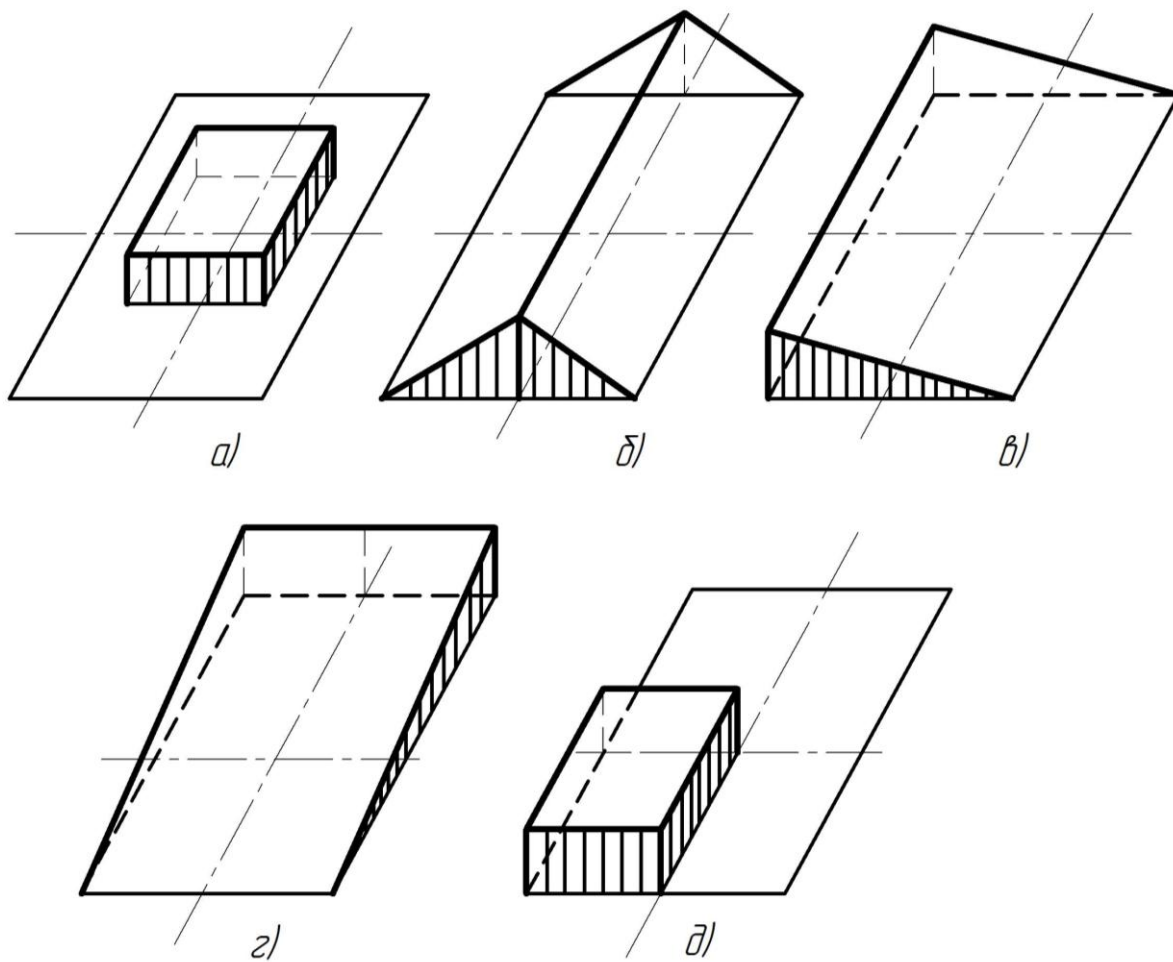


Рисунок 6.5

Тема 7

РОЗРАХУНОК ТОНКИХ ОБЛОНОК

- 7.1. Основні визначення**
- 7.2. Розрахунок оболонок за безмоментною теорією**
 - 7.2.1. Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні**
 - 7.2.2. Згин осі оболонки обертання**
- 7.3. Оболонка довільної форми**
- 7.4. Розрахунок оболонок за моментною теорією**
 - 7.4.1. Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні**
 - 7.4.2. Крайовий ефект у оболонці обертання**

7.1. Основні визначення

Оболонка – це тіло, утворене двома поверхнями, відстань між якими – товщина h , мала порівняно з іншими розмірами.

Поверхню, що ділить товщину оболонки навпіл, називають серединною поверхню. Зазвичай всі рівняння тонкої оболонки відносяться до серединної поверхні.

Виділимо елемент серединної поверхні (рис. 7.1) і розсічемо його двома взаємно перпендикулярними площинами, що проходять через нормаль ϑ у точці M .

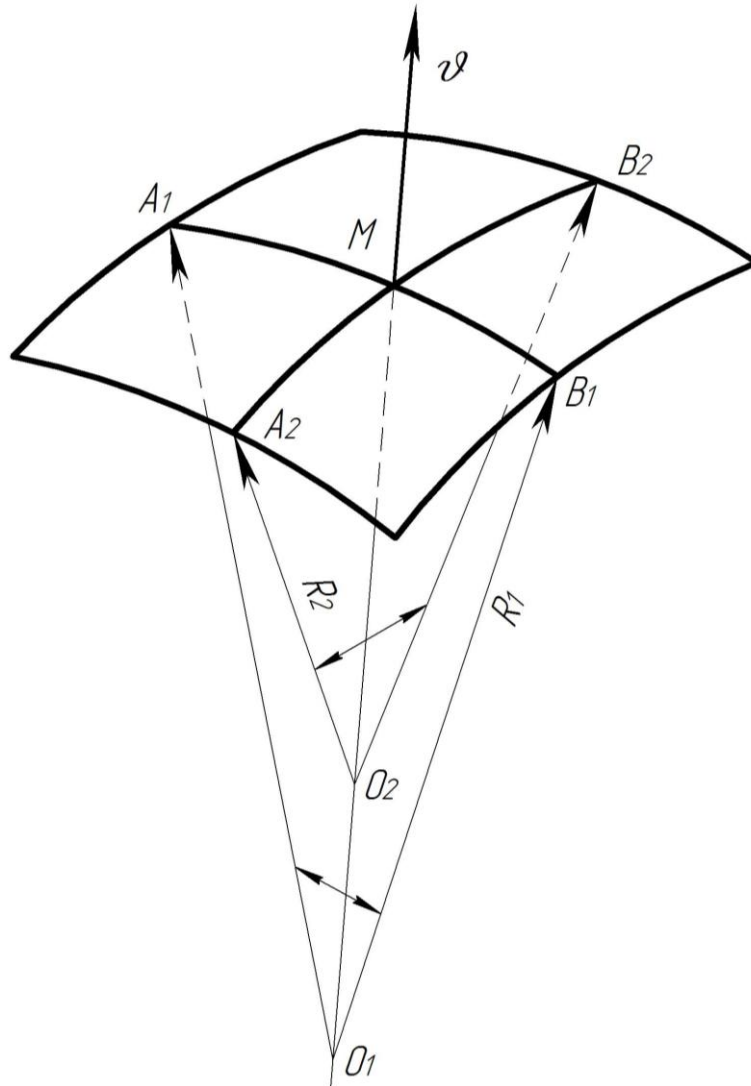


Рисунок 7.1

Лінії перетину (A_1B_1 і A_2B_2) цих площин з серединною поверхню є криві, радіуси кривизни яких у т. M позначимо R_1 і R_2 . Величини, зворотні цим радіусам

$$K_1 = 1/R_1 \text{ і } K_2 = 1/R_2 ,$$

є кривизнами серединної поверхні оболонки.

Завжди можна на серединній поверхні знайти дві взаємно перпендикулярні лінії, одна з яких має найбільшу, а інша найменшу кривизну. Саме ці кривизни зазвичай позначають K_1 K_2 і називають головними кривизнами. Добуток головних кривизн називають гауссовою кривизною:

$$\Gamma = K_1 \cdot K_2. \quad (7.1)$$

Залежно від величини гауссової кривизни розрізняють оболонки додатної, від'ємної, нульової і змішаної кривизни.

Приклад оболонки з додатною гауссовою кривизною – *сферична оболонка*, з від'ємною – *гіперболічна* (сідлоподібна). *Тороподібна оболонка* має змішану гауссову кривизну, а *циліндрична* і *конічна* – нульову.

Під дією навантаження в оболонці виникають **внутрішні зусилля, які можна розділити на дві групи**. До першої відносять зусилля, які діють у площині, дотичній до середини поверхні – *нормальні* N_1 і N_2 , а також *зсувні* S_1 і S_2 зусилля (рис. 7.2а). У другу групу включають *згинальні* M_1, M_2 та *крутні* M_{12}, M_{21} *моменти* і *поперечні сили* Q_1, Q_2 (рис. 7.2б).

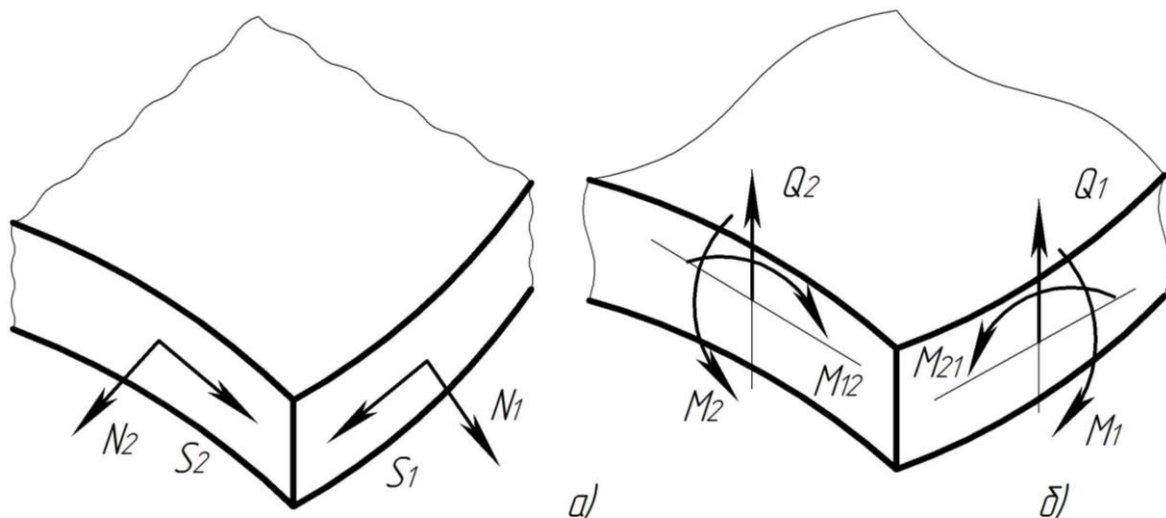


Рисунок 7.2

На відміну від пластинок, **в оболонках в основному виникають розтяг і стиск**, частка згинальних деформацій в роботі оболонок значно менша. Ця обставина обумовлює велику економічність оболонки порівняно з пластинкою.

Оболонки, в яких діють зусилля тільки першої групи і напруження можна вважати постійними за товщиною, вони зазнають безмоментного стану. Напружений стан, у якому діють також і зусилля другої групи, називають моментним.

Умови, за яких виникає безмоментний стан оболонки:

- кривизни серединної поверхні змінюються плавно;
- навантаження уздовж серединної поверхні змінюється плавно;
- закріплення на краях оболонки дозволяють вільні переміщення в напрямку нормалі до серединної поверхні;
- навантаження на краях оболонки діє в площинах, дотичних до серединної поверхні.

Безмоментна теорія розрахунку оболонок ґрунтується на гіпотезах Кірхгофа-Лява:

- гіпотеза прямої нормалі, відповідно до якої нормаль до серединної поверхні до і після деформації залишається прямою і довжина її не змінюється;
- гіпотеза про відсутність нормальних напружень на площадках, дотичних до серединної поверхні.

7.2. Розрахунок оболонок за безмоментною теорією

7.2.1. Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні

*Оболонка обертання має одну вісь симетрії. Її серединна поверхня утворена обертанням навколо осі кривої $r = r(z)$ (рис. 7.3), яку називають **меридіаном**. Точка M цієї кривої описує коло радіусом r – **паралель**. Величину r називають радіусом паралельного кола.*

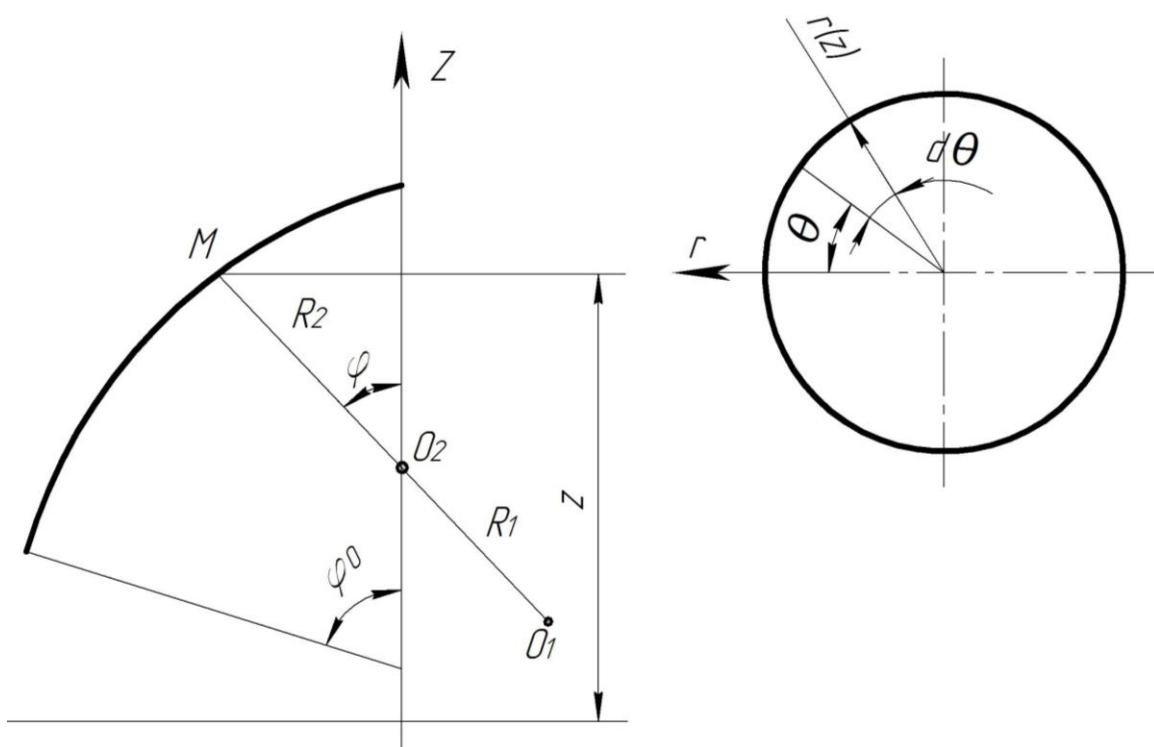


Рисунок 7.3

При осесиметричному навантаженні в оболонці обертання зсувні (кососиметричні) зусилля відсутні.

Виділимо елемент оболонки двома меридіональними і двома паралельними (перпендикулярними до осі симетрії) площинами (рис. 7.4). На елемент діють *меридіональні погонні зусилля* N_1 , *кільцеві погонні зусилля* N_2 і *навантаження*, складова якого вздовж нормалі до поверхні – q_ϑ .

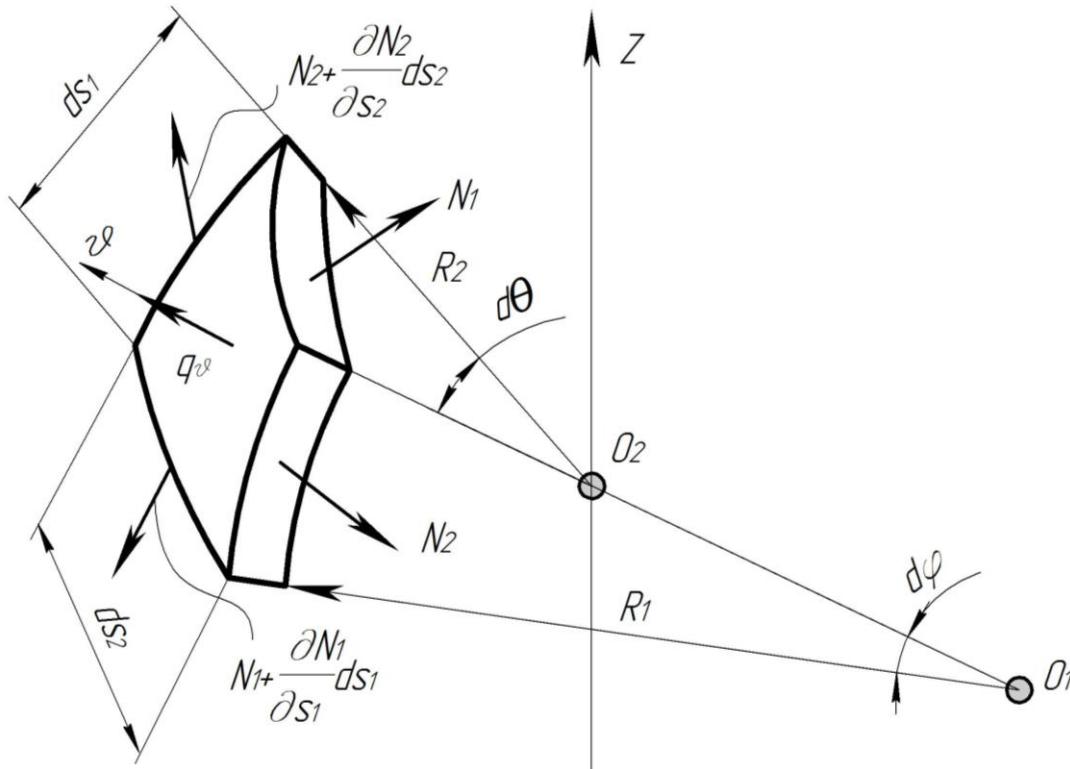


Рисунок 7.4

Проекція сил на нормаль ϑ до поверхні дає:

$$\begin{aligned}
 q_\vartheta ds_1 ds_2 - N_1 ds_2 \frac{d\varphi}{2} - \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial s_1} ds_1 \right) ds_2 \frac{d\varphi}{2} - \\
 - N_2 ds_1 \frac{d\theta}{2} - \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial s_2} ds_2 \right) ds_1 \frac{d\theta}{2} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{7.2}$$

Нехтуючи величинами третього порядку малості і замінюючи диференціали кутів диференціалами дуг $d\varphi = \frac{ds_1}{R_1}$, $d\theta = \frac{ds_2}{R_2}$, після скорочення (7.2) на ds_1 , ds_2 отримаємо:

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} = q_g. \quad (7.3)$$

Для визначення *меридіонального зусилля* N_1 відітнемо горизонтальною площиною верхню частину оболонки (рис. 7.5) і спроектуємо діючі на неї сили на вісь Z .

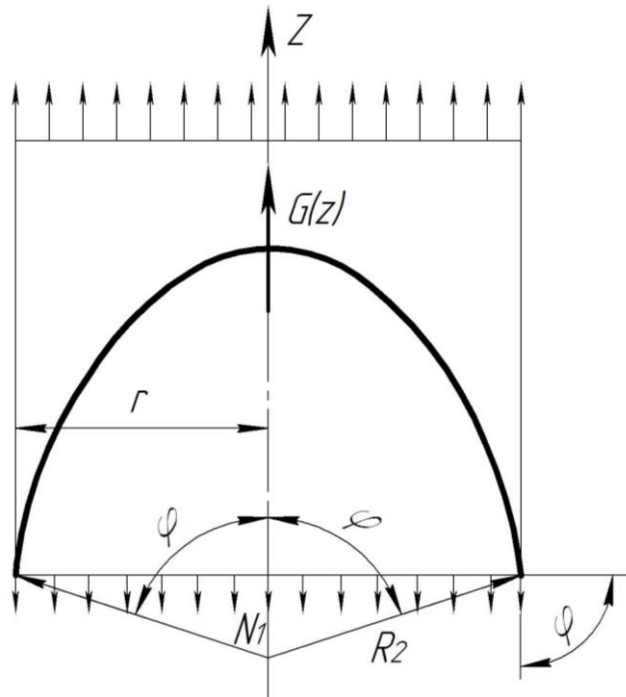


Рисунок 7.5

Рівнодіюче навантаження $G(z)$, прикладене до відтятої частини оболонки, завдяки осесиметричності діє вертикально. У цьому випадку отримаємо:

$$G(z) - N_1 \cdot 2\pi r \sin\varphi = 0,$$

звідки

$$N_1 = \frac{G(z)}{2\pi r \sin\varphi}. \quad (7.4)$$

Підставляючи меридіональне зусилля (7.4) у (7.3) можемо отримати кільцеве зусилля N_2 .

Меридіональні зусилля дають горизонтальні складові

$$H = N_1 \cos\varphi, \quad (7.5)$$

які на нижньому краю оболонки створюють горизонтальні зусилля

$$H_0 = N_1^0 \cos \varphi_0. \quad (7.6)$$

При навантаженні $G(z)$, спрямованому вниз, ці зусилля розтягують опорне кільце.

Розглянемо половину опорного кільця (рис. 7.6), завантаженого радіальним навантаженням H_0 .

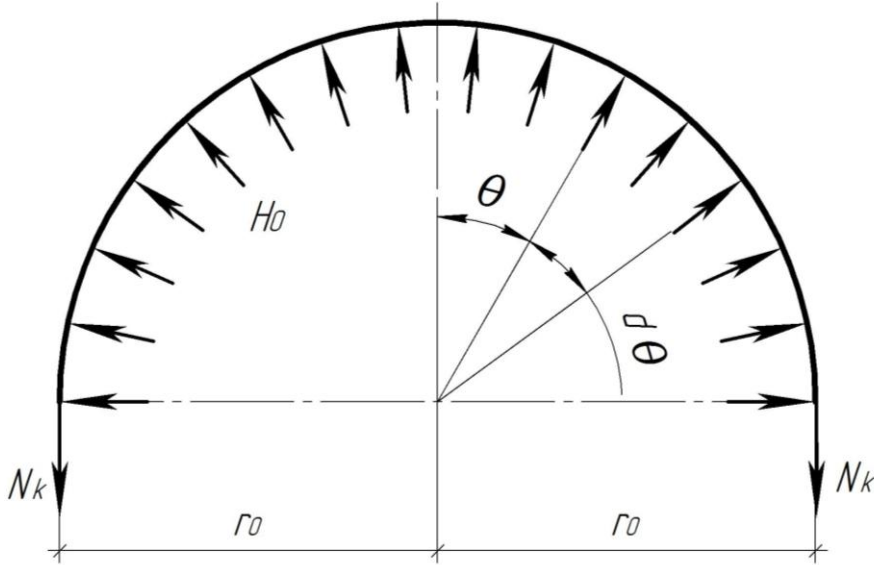


Рисунок 7.6

З умови рівноваги

$$2N_k - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_0 r_0 \cos \theta d\theta = 0 \quad (7.7)$$

отримаємо розтягуюче зусилля в кільці:

$$N_k = H_0 \cdot r_0. \quad (7.8)$$

З урахуванням (7.6) і значення $r_0 = R_2^0 \sin \varphi_0$ розтягуюче зусилля буде

$$N_k = \frac{1}{2} N_1^0 R_2^0 \sin 2\varphi_0. \quad (7.9)$$

Найбільше значення зусилля N_k досягає при $\varphi_0 = 45^\circ$, а при $\varphi_0 = 90^\circ$ наближається до нуля.

7.2.2. Згин осі оболонки обертання

Розрахунок оболонки на довільне навантаження можна виконати на основі аналогії її з прямим стержнем, що працює на поперечний згин.

Вважають, що меридіональні зусилля в перерізі оболонки, перпендикулярному до осі симетрії, змінюються згідно із законом площини.

Відсікаючи верхню частину оболонки (рис. 7.7а), позначимо $Q(z)$ – горизонтальну складову навантаження і $M(z)$ – її момент відносно осі перетину, перпендикулярної до площі рисунка.

Позначивши N_1^0 – зусилля в точці перетину оболонки, що лежить на осі Y , отримаємо закон зміни меридіонального зусилля вздовж паралелі

$$N_1 = N_1^0 \frac{y}{r}$$

або, з урахуванням $y = r \cos\theta$,

$$N_1 = N_1^0 \cdot \cos\theta. \quad (7.10)$$

Горизонтальна проекція цих зусиль (рис. 7.7а, б)

$$H = N_1 \cos\varphi = N_1^0 \cos\theta \cos\varphi$$

дає рівнодіючу

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} H \cdot \cos\theta \cdot r d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_1^0 \cdot r \cdot \cos^2\theta \cdot \cos\varphi d\theta = \\ &= 4\pi \cdot r \cdot N_1^0 \cdot \cos\varphi \end{aligned} \quad (7.11)$$

Меридіональні зусилля створюють також момент відносно осі X , який зрівноважує зовнішній момент $M(z)$:

$$\begin{aligned} M(z) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_1 \cdot \sin\varphi \cdot r \cdot y d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} N_1^0 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot r^2 \cdot \cos\theta d\theta = \\ &= 4\pi r^2 N_1^0 \sin\varphi. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Вважаючи, що зсувні зусилля S у горизонтальному перетині оболонки (рис. 7.7в) розподілені за законом

$$S = S^0 \sin \theta, \quad (7.13)$$

знайдемо їх рівнодіючу:

$$Q_2 = 2 \int_0^{\pi} S r \sin \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi} S^0 r^2 \sin^2 \theta d\theta = \pi r S^0. \quad (7.14)$$

Рівнодіючі Q_1 (7.11) і Q_2 (7.14) повинні зрівноважити поперечне навантаження $Q(z)$, прикладене до відтятої частини оболонки:

$$Q(z) = Q_1 + Q_2 = \pi r (N_1^0 \cos \varphi + S^0). \quad (7.15)$$

З (7.12) знаходимо меридіональне зусилля

$$N_1^0 = \frac{M(z)}{4\pi r^2 \sin \varphi}. \quad (7.16)$$

З (7.15) визначаємо зсувне зусилля

$$S^0 = \frac{Q(z)}{\pi r} - \frac{M(z)}{4\pi r^2 \operatorname{tg} \varphi}. \quad (7.17)$$

Формули (7.16) і (7.17) дають можливість через горизонтальну складову поперечного навантаження $Q(z)$ і момент $M(z)$ визначити меридіональне і зсуваюче зусилля в перетинах оболонки. Розрахунок на вертикальну складову $G(z)$ навантаження можна виконати за формулами (7.3), (7.4).

Такий розрахунок є наближенням, оскільки навантаження в загальному випадку може викликати інші зусилля порівняно зі знайденими за формулами (7.3), (7.4), (7.16), (7.17).

7.3. Оболонка довільної форми

Для відображення поверхні оболонки зазвичай використовують ортогональну систему криволінійних координат α і β (рис. 7.8), які відповідають лініям головних кривизн.

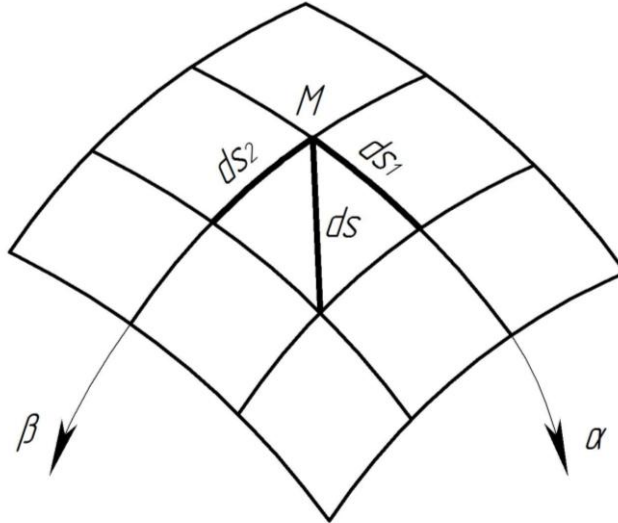


Рисунок 7.8

Нескінченно малі дуги ds_1 і ds_2 можна вважати відрізками прямих. Їх називають *лінійними елементами поверхні* і вони пропорційні диференціалам координат:

$$ds_1 = A d\alpha, \quad ds_2 = B d\beta. \quad (7.18)$$

Коефіцієнти A і B називають *коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні*:

$$(ds)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 = A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2. \quad (7.19)$$

Наприклад, для оболонки обертання, якщо координату α відраховувати уздовж меридіана, β – уздовж паралелі, а розташування точки на поверхні визначати координатою z на меридіані і кутом θ на паралелі, отримаємо:

$$ds_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz, \quad ds_2 = r d\theta. \quad (7.20)$$

Звідси

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}, \quad B = r. \quad (7.21)$$

У загальному випадку оболонки коефіцієнти A і B є функціями координат α і β .

Виділимо нескінченно малий елемент $CDFE$ серединної поверхні оболонки (рис. 7.9).

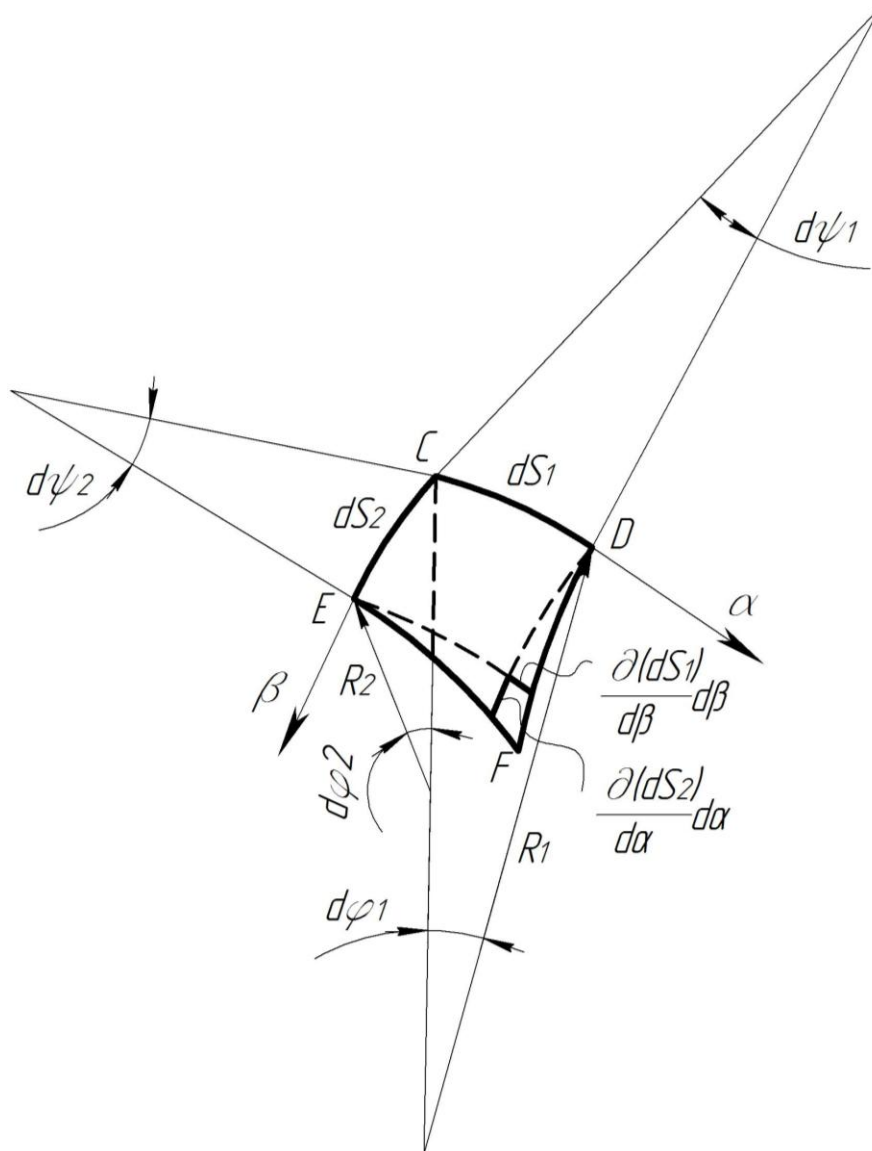


Рисунок 7.9

Сторони цього криволінійного чотирикутника:

$$CD = ds_1 = A d\alpha; \quad EF = ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \beta} d\beta = \left(A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha; \quad (7.22)$$

$$CE = ds_2 = Bd\beta; \quad DF = ds_2 + \frac{\partial s_2}{\partial \alpha} d\alpha = \left(B + \frac{\partial A}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta. \quad (7.23)$$

Грані елемента в дотичній площині утворюють кути:

$$d\psi_1 \approx \frac{EF - CD}{CE} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha; \quad d\psi_2 \approx \frac{DF - CE}{CD} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta. \quad (7.24)$$

Дугам CD і CE відповідають кути $d\varphi_1$ і $d\varphi_2$ в площинах головних кривизн:

$$d\varphi_1 \approx \frac{CD}{R_1} = \frac{A d\alpha}{R_1}; \quad d\varphi_2 \approx \frac{CE}{R_2} = \frac{B d\beta}{R_2}. \quad (7.25)$$

У безмоментному стані на гранях виділеного елемента діють погонні нормальні N_1, N_2 і зсуваючі S_1, S_2 зусилля (рис. 7.10). В ортогональній системі координат XYZ поверхневе навантаження представлено складовими його інтенсивності X_g, Y_g, Z_g .

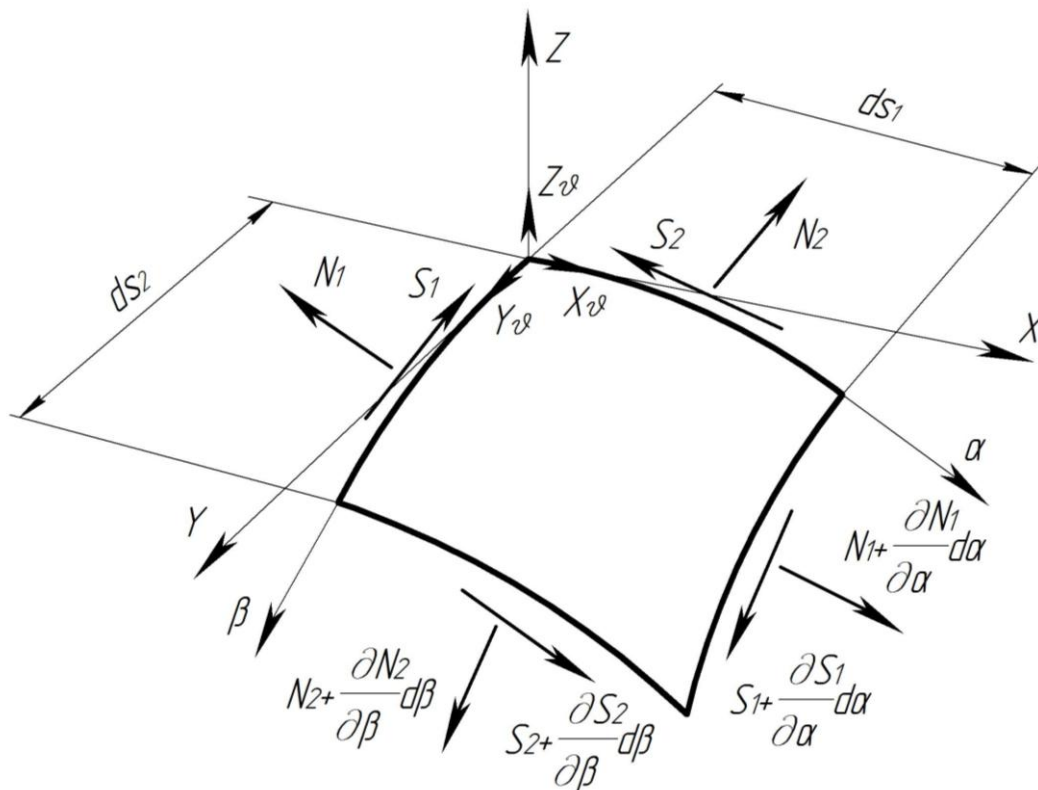


Рисунок 7.10

З умови рівності нулю суми моментів сил відносно осі Z отримаємо

$$S_1 = S_2 = S. \quad (7.26)$$

Це співвідношення виражає *закон парності зсувних зусиль*.

Проектуючи всі сили на вісь X , отримаємо:

$$\begin{aligned} & \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left(ds_2 + \frac{\partial(ds_2)}{\partial \alpha} d\alpha \right) - N_1 ds_2 + \\ & + \left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial \beta} d\beta \right) \left(ds_1 + \frac{\partial(ds_1)}{\partial \beta} d\beta \right) - S_2 ds_1 - \\ & - \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} d\beta \right) \left(ds_1 + \frac{\partial(ds_1)}{\partial \beta} d\beta \right) d\psi_2 + \\ & + \left(S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} da \right) \left(ds_2 + \frac{\partial(ds_2)}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\psi_1 + X_g ds_1 ds_2 = 0. \end{aligned}$$

Розкриваючи дужки, зводячи подібні і відкидаючи нескінченно малі вище другого порядку, отримаємо:

$$\begin{aligned} & N_1 \frac{\partial(ds_2)}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha ds_2 + S_2 \frac{\partial(ds_1)}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial S_2}{\partial \beta} d\beta ds_1 - \\ & - N_2 ds_1 d\psi + S_1 ds_2 d\psi_1 + X_g ds_1 ds_2 = 0. \end{aligned}$$

Перетворюємо похідні:

$$N_1 \frac{\partial(ds_2)}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha ds_2 = \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 ds_2) d\alpha; \quad (7.27)$$

$$S_2 \frac{\partial(ds_1)}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial S_2}{\partial \beta} d\beta ds_1 = \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2 ds_1) d\beta \quad (7.28)$$

і підставляємо диференціали кутів $d\psi_1$, $d\psi_2$ і $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ з (7.24), (7.25).

Враховуючи закон парності зсувних зусиль (7.26), отримаємо перше **рівняння рівноваги** (7.29). Аналогічно отримані інші рівняння (7.30) і (7.31) з умов рівності нулю проекцій на осі Y та Z :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}(S A) + S \frac{\partial A}{\partial \beta} + X_g A B = 0; \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(S B) + S \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}(N_2 A) - N \frac{\partial A}{\partial \beta} + Y_g A B = 0; \quad (7.30)$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - Z_g = 0. \quad (7.31)$$

Решта рівнянь (моменти сил відносно осей X та Y) перетворюються у тотожності.

Рівняння (7.29)-(7.31) включають три невідомих зусилля N_1 , N_2 , S , тобто оболонка статично визначена в нескінченно малому.

Розглянемо окремі випадки оболонки.

Сферична оболонка. Для неї $R_1 = R_2 = R$. Відраховуючи координату α уздовж меридіана і замінюючи її на φ , а координату β – уздовж паралелі і замінюючи її на θ (рис. 7.11), отримаємо:

$$ds_1 = R d\varphi, \quad ds_2 = R \sin\varphi d\theta, \quad (7.32)$$

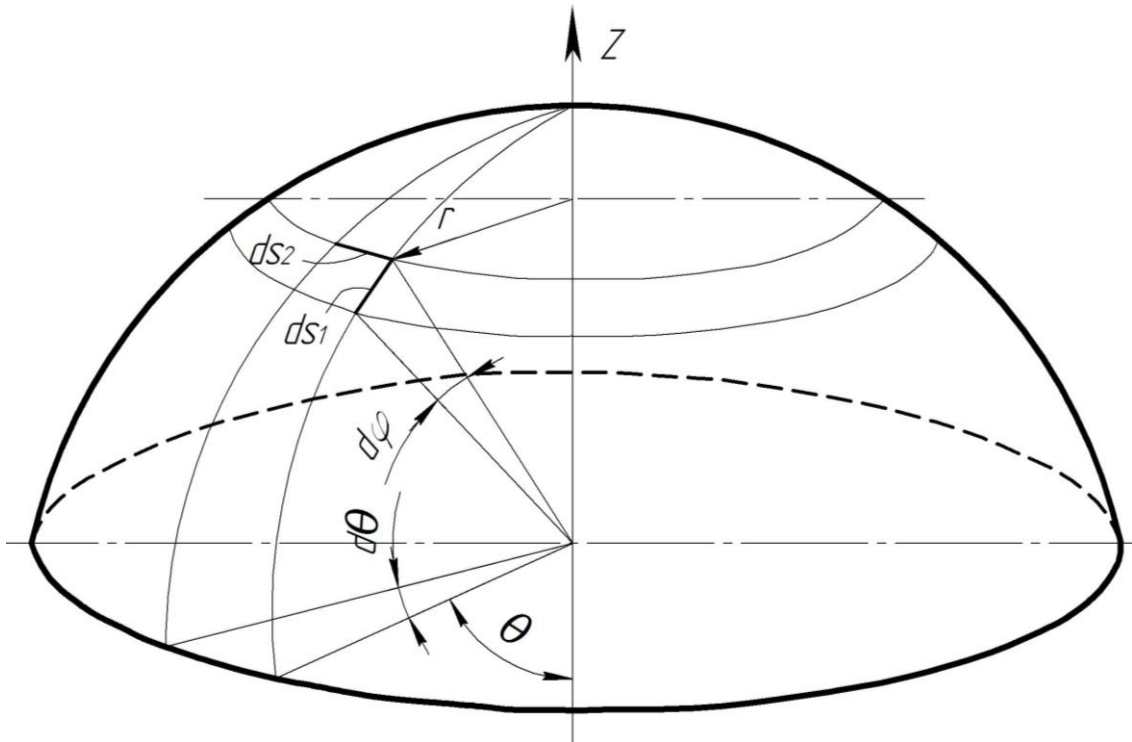


Рисунок 7.11

ТОБТО

$$A = R, \quad B = R \sin \varphi. \quad (7.33)$$

Рівняння рівноваги (7.29)-(7.31) для сферичної оболонки з врахуванням (7.32) і (7.33) набудуть вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 \sin \varphi) - N_2 \cos \varphi + \frac{\partial S}{\partial \theta} + X_g R \sin \varphi = 0; \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (S \sin \varphi) + S \cos \varphi + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Y_g R \sin \varphi = 0; \quad (7.35)$$

$$N_1 + N_2 - Z_g \cdot R = 0. \quad (7.36)$$

Циліндрична оболонка (рис. 7.12). Для цієї оболонки

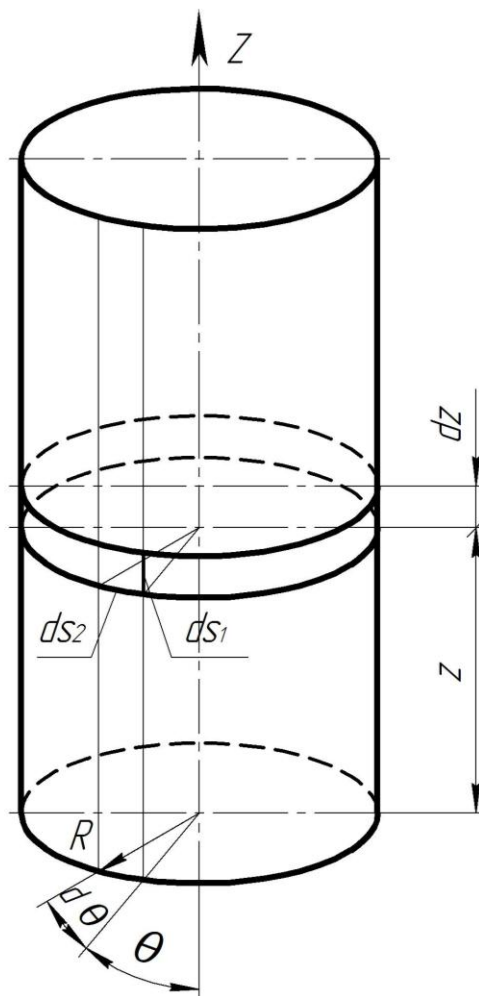


Рисунок 7.12

$$R_1 = \infty; R_2 = R; ds_1 = dz; ds_2 = R d\theta; A = 1; B = R. \quad (7.37)$$

Рівняння рівноваги (7.29)-(7.31) для циліндричної оболонки з врахуванням залежностей (7.37) набудуть вигляду:

$$\frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial S}{\partial \theta} + X_g = 0; \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Y_g = 0; \quad (7.39)$$

$$N_2 - Z_g \cdot R = 0. \quad (7.40)$$

7.4. Розрахунок оболонок за моментною теорією

7.4.1. Оболонка обертання при осесиметричному навантаженні

Розглянемо рівновагу елемента $abcd$ серединної поверхні оболонки (рис. 7.13). На його гранях, крім зусиль N_1 , N_2 діють поперечні сили Q_1 і згинальні моменти M_1 , M_2 . З симетрії навантаження випливає, що **зсувні зусилля, крутний момент і поперечні сили Q_2 відсутні**, а **зусилля N_2 і моменти M_2 будуть постійні уздовж паралелі**. Навантаження задане складовими Y_g і Z_g .

Умови рівності нулю суми проєкцій сил на осі Y та Z , а також моментів відносно осі X призводять до **таких умов рівноваги:**

$$\frac{d}{d\varphi}(N_1 r) - N_2 R_1 \cos\varphi + Q_1 r + Y_g r R_1 = 0; \quad (7.41)$$

$$\frac{d}{d\varphi}(Q_1 r) - N_1 r - N_2 R_1 \sin\varphi + Z_g r R_1 = 0; \quad (7.42)$$

$$\frac{d}{d\varphi}(M_1 r) - M_2 R_1 \cos\varphi - Q_1 r R_1 = 0. \quad (7.43)$$

Решта рівнянь рівноваги перетворюються у тотожності, задача є статично невизначеною і тому необхідно досліджувати деформації.

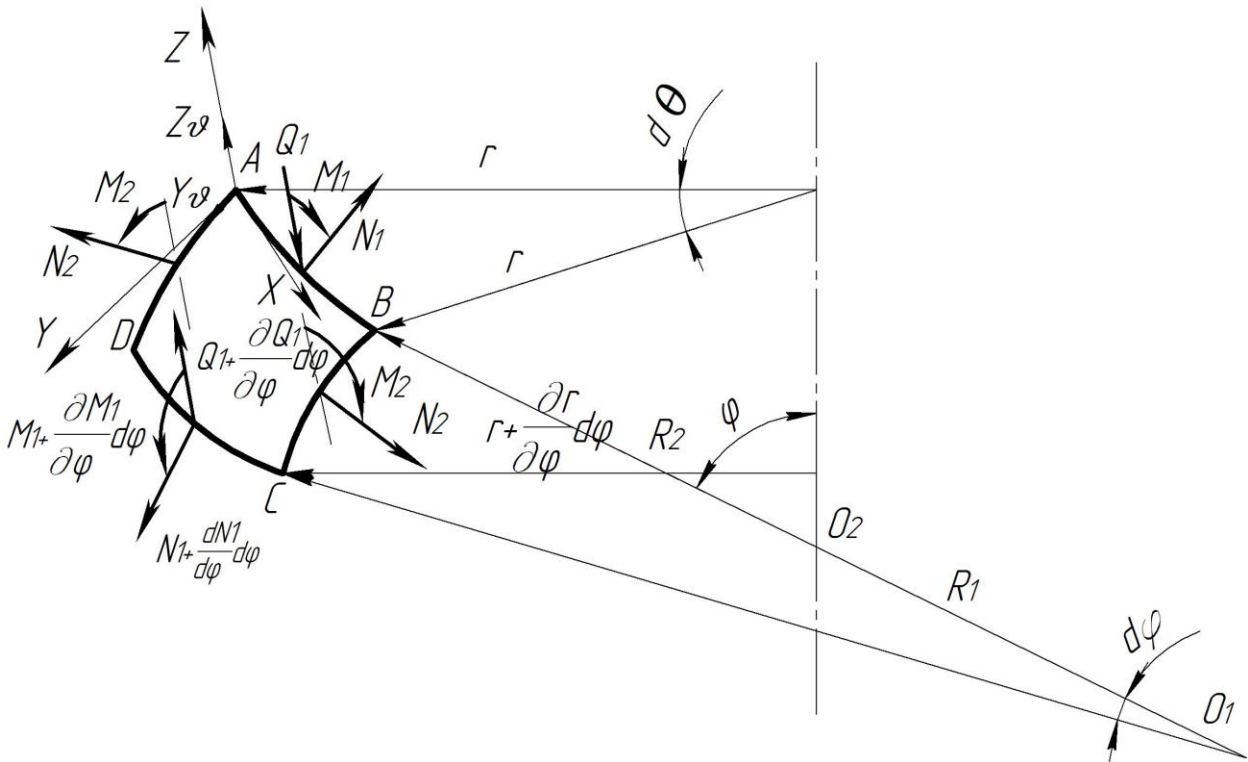


Рисунок 7.13

При осесиметричному навантаженні переміщення точок серединної поверхні визначаються двома складовими: v – уздовж дотичної до меридіана (тангенціальне переміщення) і w – вздовж нормалі до поверхні (радіальне переміщення).

Розглянемо деформацію елемента AB меридіана довжиною $R_1 d\varphi$ (рис. 7.14). Після деформації довжина елемента змінюється на величину

$$A'B' - AB = \frac{dv}{d\varphi} d\varphi + w d\varphi$$

і відносно подовження меридіана складе

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} + w \right). \quad (7.44)$$

Приріст радіусу паралельного кола відповідає горизонтальній проекції відстані AA' на рис. 7.14:

$$r' - r = v \cos \varphi + w \sin \varphi.$$

Ця величина визначає лінійну деформацію в кільцевому напрямку:

$$\varepsilon_2 = \frac{v}{r} \cos \varphi + \frac{w}{r} \sin \varphi = \frac{1}{R_2} (v \operatorname{ctg} \varphi + w). \quad (7.45)$$

Для визначення зміни кривизни меридіана знайдемо поворот нормалі в точках A і B (див. рис. 7.14):

$$\psi_A = \frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dw}{d\varphi}; \quad \psi_B = \frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dw}{d\varphi} + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dw}{d\varphi} \right) d\varphi.$$

Відношення різниці кутів повороту нормалі до довжини $R_1 d\varphi$ дуги AB дає **приріст кривизни меридіана**:

$$\chi_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dw}{d\varphi} \right) = \frac{1}{R_1^2} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(v - \frac{dw}{d\varphi} \right). \quad (7.46)$$

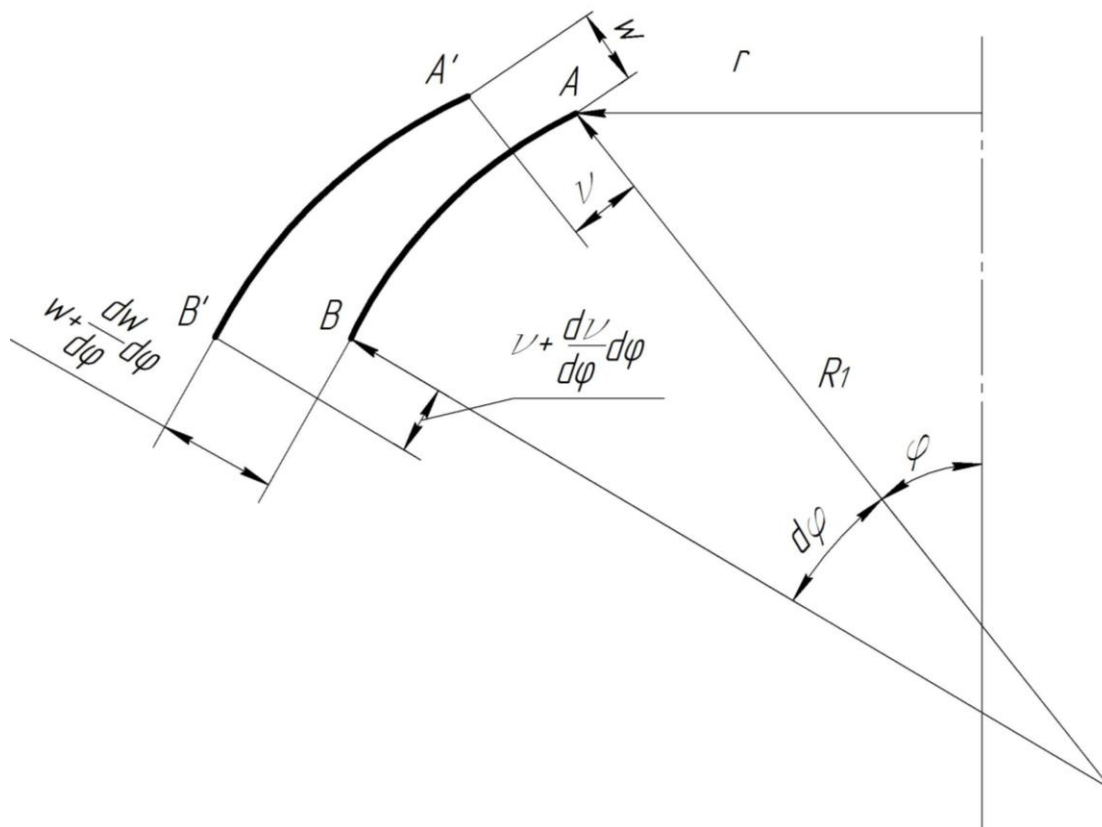


Рисунок 7.14

Поворот нормалі відносно вертикальної осі в кожній точці паралелі однаковий і становить

$$\left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dw}{d\varphi} \right) \cos \varphi.$$

Відповідний взаємний поворот нормалей в суміжних точках паралелі складе

$$\left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dw}{d\varphi} \right) \cos\varphi d\theta.$$

Тоді *приріст кривизни паралелі* отримаємо розподілом величини цього повороту на довжину елемента паралелі $rd\theta$:

$$\chi_2 = \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dw}{d\varphi} \right) \frac{\cos\varphi d\theta}{r d\theta} \approx \frac{1}{R_1 \cdot R_2} \left(v - \frac{dw}{d\varphi} \right) \operatorname{ctg}\varphi. \quad (7.47)$$

Формули (7.44), (7.45), (7.46), (7.47) встановлюють зв'язок між деформаціями і переміщеннями.

Співвідношення між зусиллями і деформаціями представимо спрощеними рівняннями теорії тонких оболонок:

$$N_1 = \frac{E h}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \quad (7.48)$$

$$N_2 = \frac{E h}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); \quad (7.49)$$

$$M_1 = D (\chi_1 + \nu \chi_2); \quad (7.50)$$

$$M_3 = D (\chi_2 + \nu \chi_1), \quad (7.51)$$

де D – циліндрична жорсткість, $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$;

h – товщина оболонки.

Отже, для розрахунку моментної оболонки обертання при осесиметричному навантаженні маємо **11 рівнянь**: (7.41), (7.42), (7.43), (7.44), (7.45), (7.46), (7.47), (7.48), (7.49), (7.50), (7.51) в які входять **11 невідомих**: зусилля N_1, N_2, M_1, M_2, Q_1 , переміщення v, w і деформації $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \chi_1, \chi_2$.

7.4.2. Крайовий ефект в оболонці обертання

У тонких оболонках обертання при осесиметричному навантаженні згинальні моменти M_1, M_2 швидко спадають вздовж меридіана при віддаленні від місця появи безмоментного стану (від закріпленого краю, від місця прикладання зосередженого навантаження). Розв'язки, отримані з рівнянь моментної і безмоментної теорій, практично збігаються. **Зону, в якій наявністю зусиль моментного стану не можна нехтувати, називають зоною крайового ефекту.** Ця зона поширюється уздовж меридіана на довжину, співрозмірну з частками радіусу R_1 . Тому *в межах цієї зони радіуси R_1, R_2 і кут φ можна вважати постійними. Зміна моментних зусиль тут має характер швидко згасаючих коливань.* Тому похідні функцій зусиль і деформацій у межах зони крайового ефекту завжди більші самих зусиль і деформацій. Це дає можливість всюди, де сумуються зусилля, переміщення і деформації з їх похідними, залишати лише відповідні похідні вищого порядку.

На підставі викладеного та з урахуванням того, що в задачі про крайовий ефект навантаження відсутнє, **рівняння рівноваги** набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} R_2 \sin \varphi \frac{dN_1}{d\varphi} - N_2 R_1 \cos \varphi + Q_1 R_2 \sin \varphi &= 0; \\ R_2 \frac{dQ_1}{d\varphi} - N_1 R_2 - N_2 R_1 &= 0; \\ R_2 \sin \varphi \frac{dM_1}{d\varphi} - M_2 R_1 \cos \varphi - Q_1 R_1 R_2 \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

Геометричні рівняння перетворимо введенням нової змінної – *кута повороту нормалі до меридіана після деформації* (рис. 7.15).

Приріст кривизни з (7.46), (7.47) можна виразити через ψ так:

$$\chi_1 = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\psi}{d\varphi}; \quad \chi_2 = \frac{\psi}{R_2} \cdot \operatorname{ctg} \varphi. \quad (7.53)$$

Для визначення ψ розглянемо елемент меридіана (див. рис. 7.15). З криволінійного трикутника ABC випливає, що до деформації

$$\cos \varphi = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dr}{d\varphi}. \quad (7.54)$$

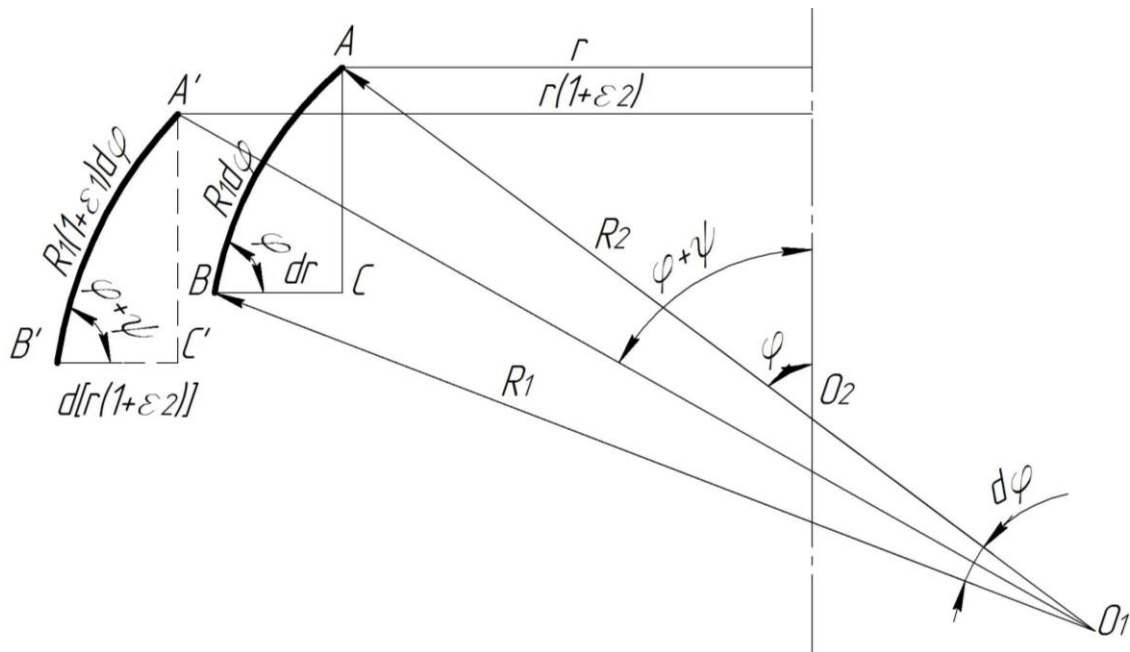


Рисунок 7.15

Відповідно, після деформації з трикутника $A'B'C'$, знаходимо

$$\cos(\varphi + \psi) = \frac{d[r(1 + \varepsilon_2)]}{R_1(1 + \varepsilon_1)d\varphi}.$$

Перетворимо отримане рівняння:

$$(1 + \varepsilon_1)(\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi) = \frac{r}{R_1} \cdot \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \frac{\varepsilon_2}{R_1} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$$

або з урахуванням того, що $\sin\psi \approx \psi$, $\cos\psi \approx 1$,
 $\varepsilon_1 \sin\varphi \sin\psi \approx \varepsilon_1 \psi \sin\varphi \approx 0$, а також (7.54), маємо:

$$\varepsilon_1 \cos\varphi - \psi \sin\varphi = \frac{R_2}{R_1} \sin\varphi \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi} + \varepsilon_2 \cos\varphi.$$

Звідси

$$\psi = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \operatorname{ctg}\varphi - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}.$$

В останньому виразі при досить великих значеннях φ ($\varphi > 30^\circ$) першим доданком можна знехтувати порівняно з доданком, що містить похідну деформації. Тоді

$$\psi = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{d\varepsilon_2}{d\varphi}. \quad (7.55)$$

Спростимо решту рівнянь. Виразивши N_2 з другого рівняння рівноваги (7.52), підставимо в перше. Нехтуючи зусиллями порівняно з їх похідними, отримаємо:

$$\frac{dN_1}{d\varphi} = \operatorname{ctg} \varphi \frac{dQ_1}{d\varphi},$$

звідки після інтегрування, матимемо

$$N_1 = Q_1 \operatorname{ctg} \varphi + C.$$

Оскільки при врахуванні крайового ефекту навантаження відсутнє, $C = 0$, тоді

$$N_1 = Q_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi. \quad (7.56)$$

Підставивши (7.56) в друге рівняння рівноваги (7.52), після спрощень отримаємо:

$$N_2 = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{dQ_1}{d\varphi}. \quad (7.57)$$

З урахуванням (7.56), (7.57) перетворимо вираз (7.45) для ε_2 :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E h} \left(\frac{R_2}{R_1} \frac{dQ_1}{d\varphi} - \nu_1 Q_1 \operatorname{ctg} \varphi \right) \approx \frac{1}{E h} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{dQ_1}{d\varphi}. \quad (7.58)$$

З третього рівняння рівноваги (7.52) випливає:

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{1}{R_2} \cdot M_2 \cdot \operatorname{ctg} \varphi \approx \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dM_1}{d\varphi}. \quad (7.59)$$

Підставляючи (7.59) у (7.50), знаходимо

$$M_1 = D \left(\frac{1}{R_1} \cdot \frac{d\psi}{d\varphi} + \nu \frac{\psi}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi \right) \approx \frac{D}{R_1} \cdot \frac{d\psi}{d\varphi}. \quad (7.60)$$

З урахуванням (7.60) поперечна сила (7.59) буде такою:

$$Q_1 = \frac{D}{R_1^2} \cdot \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}. \quad (7.61)$$

Кільцеву деформацію (7.58) виражаємо через ψ :

$$\varepsilon_2 = \frac{D R_2}{E h R_1^3} \cdot \frac{d^3\psi}{d\varphi^3} = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{d^3\psi}{d\varphi^3}. \quad (7.62)$$

Підставляємо (7.62) в (7.55). Після перетворень отримаємо **наближене диференціальне рівняння крайового ефекту**:

$$\frac{R_2^4}{R_1^4} \cdot \frac{d^4\psi}{d\varphi^4} + 4k^4 \cdot \psi = 0, \quad (7.63)$$

де $k^4 = 3(1-\nu) \frac{R_2^3}{h^2}$.

Для оболонки обертання замість кута φ введемо нову координату – **дугу меридіана** s так, що

$$ds = R_1 d\varphi.$$

Тоді **диференціальне рівняння крайового ефекту** (7.63) набуде такого вигляду:

$$\frac{d^4\psi}{ds^4} + 4 \left(\frac{k}{R_2} \right)^4 \psi = 0. \quad (7.64)$$

Відраховуючи дугу s від нижнього краю оболонки обертання, отримаємо розв'язок диференціального рівняння в такому вигляді:

$$\psi = e^{-\frac{k}{R_2}s} \left(A \cos \frac{k}{R_2}s + B \sin \frac{k}{R_2}s \right). \quad (7.65)$$

Зусилля крайового ефекту біля нижнього краю оболонки можна визначити за формулами:

$$Q_1 = -\frac{2Dk^2}{R_2^2} e^{-\frac{k}{R_2}s} \left(D \cos \frac{k}{R_2}s - F \sin \frac{k}{R_2}s \right); \quad (7.66)$$

$$N_1 = Q_1 \operatorname{ctg} \varphi; \quad (7.67)$$

$$N_2 = \frac{2Dk^3}{R_1 R_2^2} e^{-\frac{k}{R_2}s} \left[(A+B) \cos \frac{k}{R_2}s + (B-A) \sin \frac{k}{R_2}s \right]; \quad (7.68)$$

$$M_1 = -\frac{Dk}{R_2} e^{-\frac{k}{R_2}s} \left[(A-B) \cos \frac{k}{R_2}s + (A+B) \sin \frac{k}{R_2}s \right]; \quad (7.69)$$

$$M_2 = \nu M_1. \quad (7.70)$$

Розрахунок моментної оболонки обертання на осесиметричні навантаження виконують у такій послідовності. За формулами (7.3), (7.4) визначають зусилля N_1^0 і N_2^0 безмоментного стану. Отримані зусилля додають до зусиль (7.66)-(7.70) крайового ефекту і з граничних умов визначають постійні A і B спільного рішення.

Тема 8

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ

- 8.1. Основні визначення**
- 8.2. Статичні, геометричні та фізичні рівняння**
- 8.3. Умови пластичності**
- 8.4. Теорія малих пружно-пластичних деформацій**
- 8.5. Теорема про розвантаження**
- 8.6. Залежності між інтенсивностями напружень і деформацій**
- 8.7. Постановка задачі теорії пластичності**

8.1. Основні визначення

Пластичність – це властивість матеріалу зазнавати залишкової деформації без порушень суцільності під дією навантаження.

Теорія пластичності встановлює загальні закони утворення в твердих тілах пластичних деформацій і появу напружень, які діють на всіх стадіях пластичного деформування.

Теорія пластичності розглядає тіла, які не підкоряються властивостями пружності. Після усунення з таких тіл зовнішнього впливу вони не відновлюють первісну форму, тобто отримують залишкові деформації.

Тіло, що не підкоряється законам пружності з самого початку навантаження, називають *пластичним тілом*. Діаграма розтягу такого тіла зображена на рис. 8.1а.

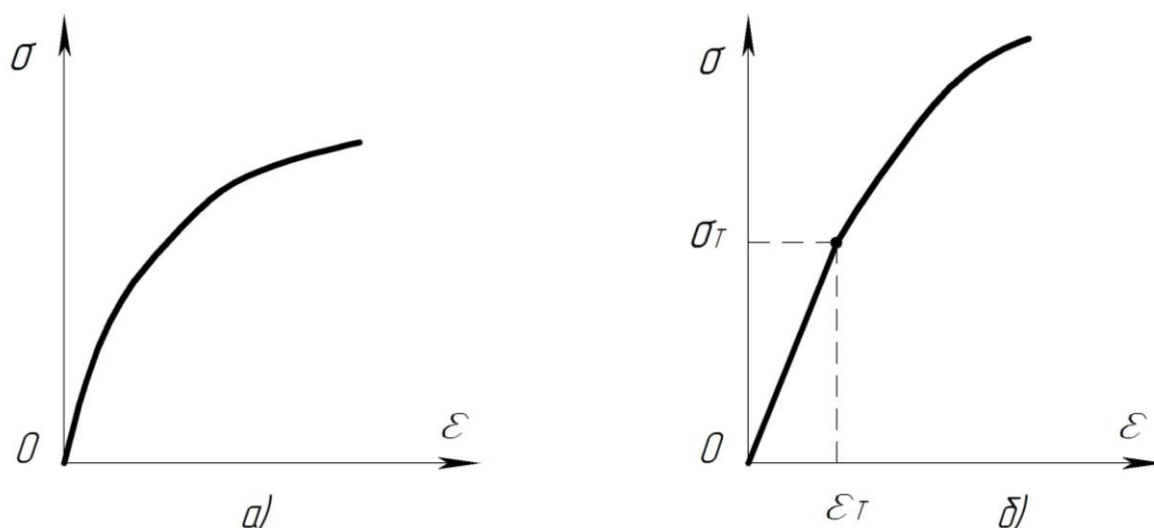


Рисунок 8.1

Якщо ж тіло на початку навантаження має пружні властивості (ділянка Oa на рис 8.1б) і тільки з деякої стадії в ньому виникають залишкові деформації, то його називають *пружно-пластичним тілом*.

У теорії пластичності розглядають два різні завдання:

- вивчення процесу деформування тіл на всіх стадіях навантаження;
- визначення тільки несучої здатності.

Перше завдання відноситься до математичної теорії пластичності. У ній розглядають визначення напружень, деформацій і переміщень від заданого навантаження в будь-який момент навантаження, визначення границі між пружною і пластичною зонами, визначення залишкових напружень і деформацій при частковому і повному знятті навантаження.

Друге завдання відноситься до прикладної теорії пружності. У ній досліджують лише граничний стан тіла без вивчення проміжних стадій деформування.

Закони пластичного деформування залежать від того, зростає або зменшується навантаження. Залежно від цього розрізняють два види деформації: активну і пасивну.

Ці види деформування легко розмежувати при простому розтягу-стиску, чистому зсуві і чистому згині. Активною в цих випадках буде деформація, при якій напруження зростає за абсолютною величиною, а пасивною – при якій напруження зменшується за абсолютною величиною.

При складному напруженому стані активною називають деформацію, при якій в даний момент інтенсивність напружень σ_i (див. тему 1, залежність (1.26)) має значення, що перевищує за абсолютною величиною всі попередні її значення. Пасивною в цьому випадку називають таку деформацію, при якій інтенсивність напружень за абсолютною величиною менша хоча б одного з попередніх її значень.

При активній деформації пластична деформація зростає, при пасивній – залишається незмінною. Активну деформацію називають процесом навантаження, а пасивну – іноді розвантаженням.

На закони пластичного деформування істотно впливає характер навантаження тіла. Розрізняють **просте і складне навантаження**.

Простим називають такий процес навантаження, при якому зовнішні сили зростають пропорційно одному параметру. Така зміна навантажень забезпечує сталість напрямків головних напружень і деформацій в кожній точці тіла.

Складним є таке навантаження, при якому зростанню хоча б однієї з сил не відповідає пропорційне зростання інших сил.

8.2. Статичні, геометричні та фізичні рівняння

Як у теорії пружності, так і в теорії пластичності напружений стан у кожній точці тіла, що знаходиться під дією об'ємного і поверхневого навантаження, **визначається шістьма складовими напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.**

Ці напруження пов'язані трьома диференціальними рівняннями рівноваги Нав'є (див. тему 1, умови (1.5)):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

а на поверхні тіла повинні задовольнятися умови (див. тему 1, умови (1.12)):

$$\left. \begin{aligned} X_g &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot k; \\ Y_g &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot k; \\ Z_g &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot k. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Напружений стан у точці тіла також може бути охарактеризований трьома інваріантами S_1, S_2, S_3 (див. тему 1, умови (1.22)):

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ S_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ S_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

або

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ S_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ S_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Для дослідження напруженого стану використовують також такі інваріантні величини як інтенсивність дотичних напружень τ_i (див. тему 1, умови (1.25)):

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (8.5)$$

та інтенсивність нормальних напружень (див. тему 1, умови (1.26)):

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (8.6)$$

Деформований стан у точці тіла у теорії пластичності також визначають шістьма складовими деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, які пов'язані **формулами Коші** ((див. тему 2, умови (2.10)):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

з трьома складовими переміщень u, v, w .

Деформації повинні задовольняти шість рівнянь суцільності Сен-Венана ((див. тему 2, умови (2.17) і (2.21)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

Аналогічно до головних напружень, що діють у теорії пружності, у теорії пластичності вводять **поняття головних деформацій**, тобто таких, у площині яких відсутні зсуви.

Кубічне рівняння, отримане для **визначення головних деформацій** $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, має **коефіцієнти**:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ E_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1; \\ E_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Ці коефіцієнти є інваріантами деформованого стану.

Порівнюючи першу формулу залежностей (8.10) з виразом (2.33, див. тему 2) об'ємної деформації

$$\sigma_0 = K \cdot \Theta, \quad (8.11)$$

робимо висновок про те, що **об'ємна деформація у теорії пластичності також є інваріантною величиною.**

У теорії пластичності застосовують також інваріантну величину, яку називають – **інтенсивність деформацій**:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}, \quad (8.12)$$

Інтенсивність деформацій – величина, пропорційна куту зсуву на октаедричній (рівнонахиленій до координатних площин) площині.

Числовий коефіцієнт у (8.12) вибраний так, щоб при простому розтягу (стиску) та $\mu = 0,5$ інтенсивність деформацій дорівнює лінійній деформації в напрямку розтягу (стиску).

Фізичні рівняння, представлені в теорії пружності **формулами закону Гука в прямій**

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

(див. тему 2, умову (2.28)) **і зворотній**

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \nu \cdot \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \nu \cdot \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \nu \cdot \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

(див. тему 2, умову (2.37)) **формі**, для застосування в теорії пластичності необхідно перетворити.

Віднімемо з обох частин першої формули (8.14) середнє напруження у точці σ_0 (див. тему 2, умову (2.32))

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1, \quad (8.15)$$

і отримаємо

$$\sigma_x - \sigma_0 = \lambda \cdot \Theta + 2\nu \cdot \varepsilon_x - \sigma_0. \quad (8.16)$$

Постійні λ і ν (див. тему 2, умови (2.36))

$$\lambda = \frac{\mu \cdot E}{(1+\mu) \cdot (1-2\mu)}, \quad \nu = \frac{E}{2(1+\mu)} = G, \quad (8.17)$$

які входять у рівняння (8.16), запишемо так:

$$\lambda = \frac{2G \cdot \gamma}{1-2\mu}; \quad \nu = G. \quad (8.18)$$

З урахуванням постійних (8.18) і співвідношення $\Theta = 3\varepsilon_0$, підставимо (8.11) і **модуль об'ємного розширення** (див. тему 2, умову (2.30))

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (8.19)$$

та співвідношення між модулем зсуву, модулем пружності і коефіцієнтом Пуассона (див. тему 2, умову (2.24))

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (8.20)$$

у (8.16) і отримаємо:

$$\sigma_x - \sigma_0 = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0).$$

Виконавши аналогічні перетворення з другою і третьою формулами закону Гука у зворотній формі для теорії пружності (8.14) приходимо до такої **форми закону Гука для теорії пластичності**

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= 2G \frac{\gamma_{xy}}{2}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= 2G \frac{\gamma_{yz}}{2}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= 2G \frac{\gamma_{zx}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Складові деформацій $\varepsilon_x - \varepsilon_0$, $\varepsilon_y - \varepsilon_0$, $\varepsilon_z - \varepsilon_0$, $\frac{\gamma_{xy}}{2}$, $\frac{\gamma_{yz}}{2}$, $\frac{\gamma_{zx}}{2}$ відповідають зміні форми тіла, тому що зміна об'єму відсутня:

$$\begin{aligned} \Theta' &= (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) = \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_0 = 0. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Отже, залежності (8.21) **встановлюють зв'язок між напруженнями і деформаціями, які відповідають тільки зміні форми тіла.**

Формулами (8.21) відповідають еквівалентні їм співвідношення:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\varepsilon_y - \varepsilon_z} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = 2G, \quad (8.23)$$

які для головних напрямків мають такий вигляд:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = 2G. \quad (8.24)$$

Якщо ввести поняття **головних дотичних напружень** і **головних зсувів**:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad (8.25)$$

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad (8.26)$$

то співвідношення (8.24) набуде вигляду:

$$\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = G. \quad (8.27)$$

Вираз (8.12) **для інтенсивності деформацій** перетворимо, замінюючи в ньому деформації напруженнями відповідно до (8.23):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{3G\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (8.28)$$

Порівнюючи інтенсивність деформацій у теорії пластичності, описану залежністю (8.28), із залежністю для інтенсивності напружень у теорії пружності (8.6) або (1.26), отримуємо такі залежності:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{3G} \quad \text{або} \quad G = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}. \quad (8.29)$$

Враховуючи отримані співвідношення, **закон Гука** (8.21) у **теорії пластичності** можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Аналогічно можна перетворити формулу (8.27), тобто для *головних дотичних напружень* і *головних зсувів*:

$$\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}. \quad (8.31)$$

Співвідношення (8.30) і (8.31) є еквівалентними.

8.3. Умови пластичності

Умова пластичності – це умова можливості переходу матеріалу в даній точці тіла з пружного стану в пластичний.

Для лінійного напруженого стану $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, пластичні деформації виникають при

$$\sigma_1 = \sigma_T, \quad (8.32)$$

де σ_T – границя текучості (плинності) матеріалу – величина, яку встановлюють дослідним шляхом.

Умова для чистого зсуву має вигляд:

$$\tau = \tau_T, \quad (8.33)$$

де τ_T – границя текучості (плинності) матеріалу при зсуві.

При плоскому і об'ємному напруженому стані умови пластичності встановлюють на основі гіпотез. Найчастіше використовують **дві умови пластичності**, які досить правильно визначають перехід матеріалу з пружного стану в пластичний.

Перша умова (умова пластичності Сен-Венана) ґрунтується на припущенні, що *пластичні деформації виникають тоді, коли максимальні дотичні напруження досягають границі текучості при чистому зсуві*:

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (8.34)$$

З опору матеріалів відомо, що

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (8.35)$$

При лінійному напруженому стані маємо $\sigma_1 = \sigma_T$ і $\sigma_3 = 0$, тобто

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_T - 0}{2} = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (8.36)$$

Порівнюючи вираз (8.36) з (8.34), отримаємо

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (8.37)$$

Відповідно *першу умову пластичності* отримують у такому вигляді:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T. \quad (8.38)$$

Це співвідношення в опорі матеріалів відповідає третій теорії міцності – теорії найбільших дотичних напружень.

Друга умова (умова пластичності Губера-Мізеса-Генки) ґрунтується на припущенні, що *пластичні деформації виникають тоді, коли інтенсивність дотичних напружень досягає деякої постійної для даного матеріалу величини:*

$$\tau_i = C. \quad (8.39)$$

Постійну C знаходять за результатами випробувань при простому розтягу.

Початок пластичного деформування в цьому випадку буде при таких умовах:

$$\sigma_1 = \sigma_T; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0. \quad (8.40)$$

Підставляючи (8.40) у рівняння (8.5), отримаємо:

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_T^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_T. \quad (8.41)$$

Порівнюючи (8.41) з (8.39), визначимо постійну

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_T. \quad (8.42)$$

Підставляючи (8.5) і постійну C в (8.39), отримаємо *другу умову пластичності* в такому вигляді:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \sigma_T \quad (8.43)$$

або відповідно до (8.6)

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (8.44)$$

Ця умова відповідає четвертій теорії міцності опору матеріалів.

Умови пластичності Сен-Венана і Губера-Мізеса-Генки дають близькі результати. Експерименти дещо краще підтверджують другу умову. Крім того, ця умова зручніша з математичної точки зору, тому що нормальні напруження σ_i можна простіше записати через складові напружень, ніж максимальні дотичні напруження τ_{\max} . Тому в теорії пластичності частіше використовують умову Губера-Мізеса-Генки.

8.4. Теорія малих пружно-пластичних деформацій

Існуючі *теорії пластичності можна розділити на два види.*

До першого виду належать теорії пружно-пластичних деформацій, які ґрунтуються на рівняннях, що пов'язують напруження і деформації. Ці теорії, як правило, *застосовують для розрахунку будівельних конструкцій.*

До другого виду відносять теорії пластичної текучості, в основі яких лежать рівняння, що зв'язують напруження і швидкості деформацій. Теорії пластичної текучості застосовують у технологічній практиці.

Існує кілька суперечливих поглядів на механізм утворення пластичних деформацій. Дослідження О.А. Іллюшина дозволили усунути ці протиріччя. Він встановив, що *при простому навантаженні і малих деформаціях всі відомі теорії пластичності є окремими випадками загальної теорії пластичності.* Ця теорія – **теорія малих пружно-пластичних деформацій** – досить достовірно описує деформування твердих тіл при малих пружних і пластичних деформаціях.

Теорія малих пружно-пластичних деформацій ґрунтується на таких законах, що впливають з експериментів.

Перший закон – закон зміни об'єму. *При пружно-пластичних деформаціях твердого тіла, як активних, так і пасивних, об'ємна деформація завжди є пружною і підкоряється закону Гука:*

$$\sigma_0 = K \cdot \Theta. \quad (8.45)$$

У теорії пластичності зазвичай використовують припущення про нестискуваність матеріалу. В цьому випадку

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \quad (8.46)$$

тому що σ_0 при цьому не дорівнює нулю, відповідно модуль об'ємного розширення K має дорівнювати нескінченності:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \infty. \quad (8.47)$$

Звідси випливає значення коефіцієнта Пуассона:

$$\mu = 0,5. \quad (8.48)$$

Отже, між модулем зсуву G і модулем пружності E у теорії пластичності є таке співвідношення:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{E}{2(1+0,5)} = \frac{E}{3}. \quad (8.49)$$

Другий закон – закон зміни форми. *При активних пружно-пластичних деформаціях, що виникають в умовах простого навантаження, головні осі напружень і деформацій співпадають і відношення головних дотичних напружень до відповідних зсувів для даного елемента тіла постійні, тобто справедливі співвідношення (8.31).*

Ці співвідношення можуть бути замінені еквівалентними їм формулами (8.30). Тут необхідно врахувати, що шість формул (8.31) не є незалежними. Дійсно, складаючи перші три з них, отримаємо тотожність $0=0$. Отже, формули (8.30) дають систему п'яти рівнянь з шістьма невідомими.

Третій закон: інтенсивність напружень σ_i для даного матеріалу при активній деформації є функцією інтенсивності деформацій ε_i :

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i). \quad (8.50)$$

Як показують експерименти, в умовах простого навантаження діаграма $\sigma_i - \varepsilon_i$ для будь-якого напруженого стану подібна діаграмі $\sigma - \varepsilon$ при розтягу (див. тему 2, рис. 2.3). Отже, між σ_i та ε_i існує залежність, подібна залежності між σ і ε при розтягу:

$$\sigma = f(\varepsilon). \quad (8.51)$$

Отже, залежність $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ для будь-якого напруженого стану можна встановити з дослідів при розтягу.

Аналіз експериментів і рішення часткових завдань теорії пластичності підтверджує, так звану, **теорему О.А. Іллюшина про просте навантаження: теорія малих пружно-пластичних деформацій дає правильні (узгоджені з експериментом) результати у тому випадку, коли процес навантаження тіла є простим.**

8.5. Теорема про розвантаження

Розвантаження всього тіла – це процес зміни зовнішніх сил, при якому у всіх областях тіла, де сталася пластична деформація, інтенсивність напружень починає спадати одночасно. Це означає, що тіло зі стадії активної деформації переходить в стадію пасивної деформації.

О.А. Іллюшин сформулював і довів теорему про розвантаження: *переміщення точки тіла в деякий момент стадії розвантаження відрізняються від їх значень у момент початку розвантаження на величини пружних переміщень, які виникли б у тілі, якби в природному (ненавантаженому) стані до нього були прикладені зовнішні сили, які дорівнюють різниці зовнішніх сил, що діють у зазначені моменти.* Це твердження стосується також деформацій і напружень.

Завдяки цій теорії використовують такий **порядок визначення напружень, деформацій і переміщень при розвантаженні:**

- з рівнянь теорії пластичності визначають напруження, деформації та переміщення, які виникають при найбільшому навантаженні, що діє до початку розвантаження;

- з рівнянь теорії пружності визначають напруження, деформації та переміщення, що спричиняються навантаженнями, які дорівнюють різниці між найбільшими навантаженнями до початку розвантаження і навантаженнями, що залишилися після розвантаження;

- отримують напруження, деформації та переміщення у розглядуваній момент розвантаження як різницю між їх значеннями. Ці значення відповідають найбільшому навантаженню, і значенням, знайденими за величинами навантажень, на які відбулося розвантаження.

8.6. Залежності між інтенсивностями напружень і деформацій

Вид залежності (8.50) між інтенсивністю напружень та інтенсивністю деформацій можна встановити за діаграмою розтягу матеріалу. Розглянемо діаграму (рис. 8.2а), що складається з прямолінійної Oa і криволінійної ab ділянок.

Напруження в довільній точці c можна визначити як різницю відрізків:

$$\sigma = kd - kc = \varepsilon \cdot tg\alpha - kc.$$

Оскільки на діаграмі $tg\alpha$ чисельно дорівнює модулю пружності E , то отримаємо

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - kc = E \cdot \varepsilon \left(1 - \frac{kc}{E \cdot \varepsilon} \right) = E \cdot \varepsilon \left[1 - \omega(\varepsilon) \right],$$

де $\omega(\varepsilon)$ – функція зниження напруження за межею текучості (плинності) порівняно з напруженнями, отриманими в припущенні, що деформування відбувається за пружним законом,

$$\omega(\varepsilon) = \frac{kc}{E \cdot \varepsilon} \quad (8.52)$$

Відповідно до третього закону теорії малих пружно-пластичних деформацій залежність (8.50) повинна мати такий же вигляд як при простому розтягу, тобто:

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i \left[1 - \omega(\varepsilon_i) \right]. \quad (8.53)$$

Розглянемо, який вигляд має функція $\omega(\varepsilon_i)$ для різних видів діаграми $\sigma_i - \varepsilon_i$.

Для *діаграми, що складається з двох прямолінійних ділянок* (рис. 8.2б), за межею текучості (ділянка ab) отримаємо:

$$kc = kd - md - ct = E \cdot \varepsilon_i - E \cdot \varepsilon_T - E' (\varepsilon_i - \varepsilon_T)$$

або

$$kc = (E - E') \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_T),$$

де $E' = tg\beta$.

Тепер функція зниження напружень набуде такого вигляду:

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{(E - E') \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_T)}{E \cdot \varepsilon_i} = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right), \quad (8.54)$$

де λ – відносне зниження модуля пружності при переході в пластичну область деформування, $\lambda = \frac{E - E'}{E}$.

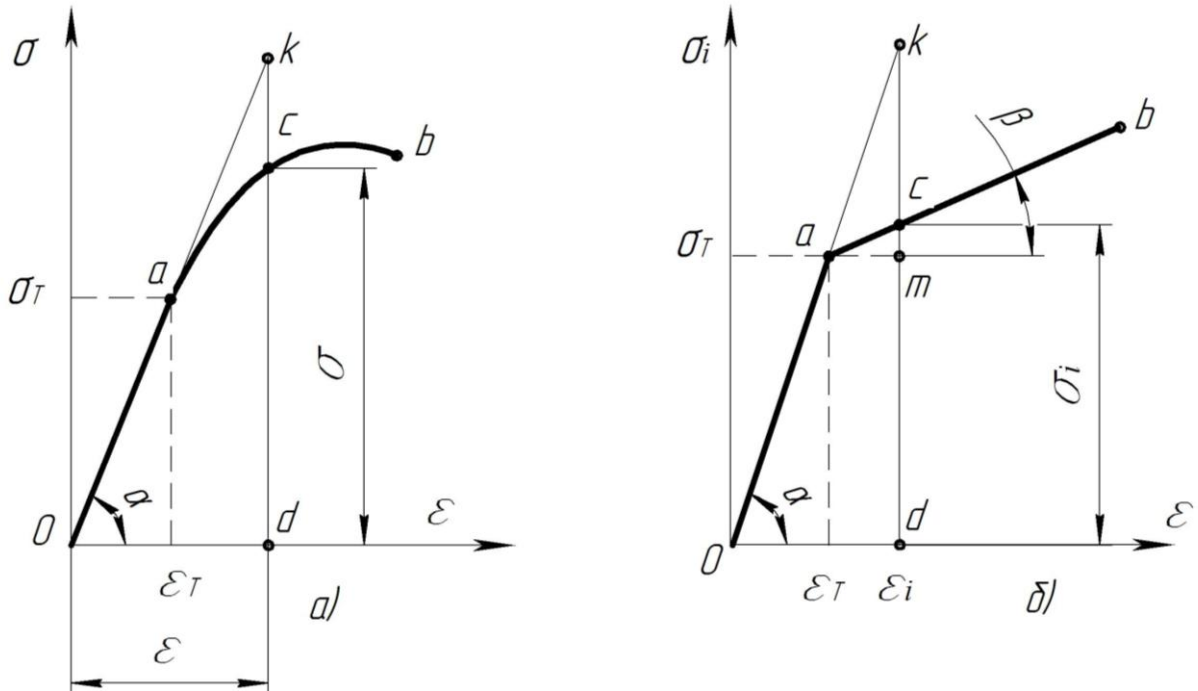


Рисунок 8.2

Отже, функція $\omega(\varepsilon_i)$ для діаграми (див. рис. 8.2б) буде такою:

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T; \\ \omega &= \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right) && \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T. \end{aligned} \quad (8.55)$$

Для *ідеального пружно-пластичного матеріалу*, який підкоряється діаграмі Прандтля (рис. 8.3а), співвідношення (8.55) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T; \\ \omega &= \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} && \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Для матеріалу, діаграма якого не має прямолінійних ділянок (рис. 8.3б), залежність $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ можна прийняти у степеневому вигляді

$$\sigma_i = \sigma_T \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} \right)^m, \quad (8.57)$$

де $0 < m < 1$.

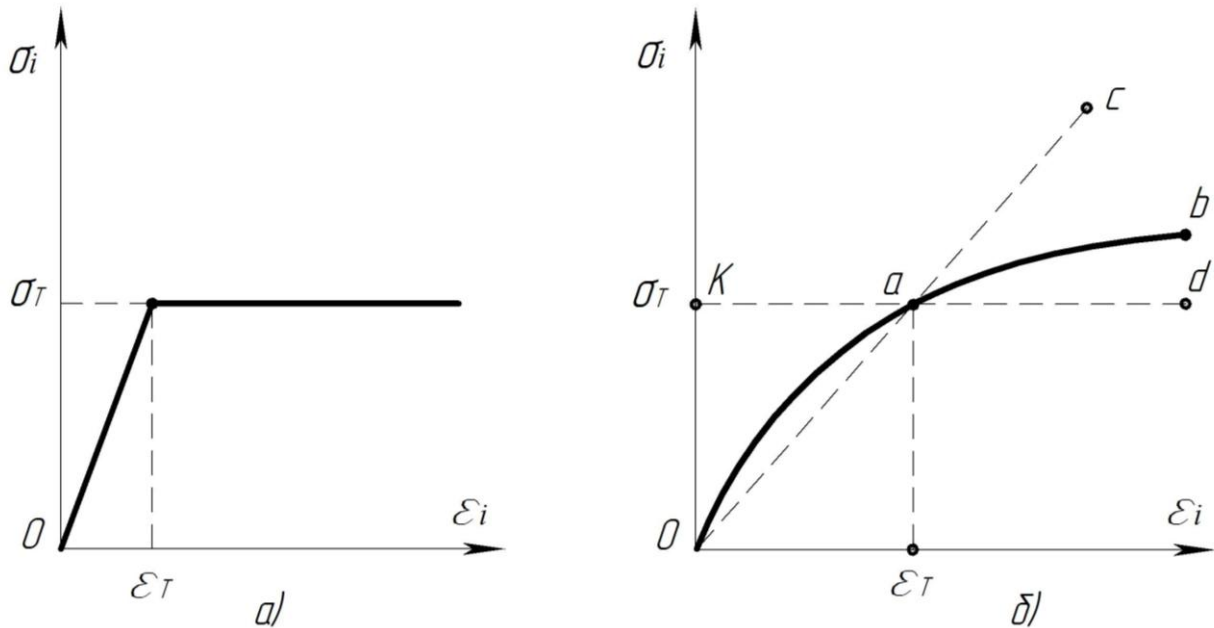


Рисунок 8.3

При $m=1$ отримаємо закон деформування ідеально пружного тіла:

$$\sigma_i = \sigma_T \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} = E \cdot \varepsilon_i. \quad (8.58)$$

На рис. 8.3б цьому закону відповідає штрихова лінія Oac .

При $m=0$ отримаємо закон деформування ідеально пластичного тіла:

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (8.59)$$

На рис. 8.3б цьому закону відповідає штрихова лінія Kad .

8.7. Постановка задачі теорії пластичності

У теорії пластичності маємо 17 невідомих, які є функціями координат x, y, z :

- шість складових напружень – $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$;
- шість складових деформацій – $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$;
- три складових переміщень – u, v, w ;
- інтенсивність напружень σ_i ;
- інтенсивність деформацій ε_i .

Для визначення цих невідомих є 17 рівнянь:

- три диференціальних рівняння рівноваги (8.1);
- шість фізичних рівнянь закону Гука (8.30), причому тільки п'ять з них є незалежними. Як шосте рівняння беруть закон зміни об'єму (8.45);
- шість формул Коші (8.7);
- залежність між інтенсивністю напружень і деформацій (8.50);
- вираз для інтенсивності деформацій (8.12).

Отже, при активній деформації і простому завантаженні завдання має математичне рішення. Однак, практично отримати його важко, тому що основні співвідношення виражені диференціальними рівняннями в частинних похідних, притому нелінійними.

Для матеріалу з слабо вираженим зміцненням дійсну діаграму деформування можна замінити діаграмою ідеального пружно-пластичного тіла (рис. 8.3а). Тоді замість шести фізичних рівнянь (8.30) можна взяти одну з умов пластичності, наприклад (8.44). При такій заміні можна однозначно визначити деформації для тіла, яке повністю знаходиться в пластичному стані. Однозначне рішення в цьому випадку можна отримати тільки тоді, коли в тілі поряд з пластичними є і пружні зони.

При вирішенні задачі теорії пластичності можуть бути використані ті ж способи, що і в теорії пружності: рішення в напружених, рішення в переміщеннях і змішане рішення.

Математичне рішення задачі може бути отримано тими ж методами, що і в теорії пружності: прямим, зворотним і напівзворотним. **Ефективним є наближений метод пружних рішень**, запропонований О.А. Іллюшиним.

Тема 9

РОЗРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ГРАНИЦЕЮ ПРУЖНОСТІ

- 9.1. Модель ідеального пружно-пластичного матеріалу
- 9.2. Розрахунок статично невизначуваних стержневих систем
 - 9.2.1. Розрахунок методом допустимих напружень
 - 9.2.2. Розрахунок за методом граничних навантажень
- 9.3. Утримувальна здатність вала при деформації кручення
- 9.4. Пластичний розрахунок статично визначуваної балки
- 9.5. Розрахунок нерозрізних балок методом граничних навантажень

9.1. Модель ідеального пружно-пластичного матеріалу

Розрахунки елементів конструкцій, за умови, коли максимальні напруження у небезпечному перерізі не перевищують граничних (для даного матеріалу) значень називають **розрахунком за методом допустимих напружень**. При цьому не враховують стан матеріалу в інших частинах конструкцій.

Як показують результати детальних досліджень, такі конструкції в цілому можуть задовольняти експлуатаційні вимоги. Тобто, їх ще можна додатково навантажувати, бо конструкції мають запас міцності більший, ніж визначений при розрахунках у пружній стадії. У випадку такого довантаження в небезпечних перерізах елементів з'являються **пластичні деформації**. Поява таких деформацій вимагає знання про характер деформування конкретного матеріалу за межею текучості. Здебільшого при інженерних розрахунках для їх спрощення вибирають **модель ідеального пружно-пластичного матеріалу** (рис. 9.1а). Визначальні співвідношення для такої моделі:

$$\sigma = \begin{cases} E \cdot \varepsilon & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_T, \\ \sigma_T & \text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_T, \\ \sigma - E(\varepsilon_1 - \varepsilon) & \text{при розвантаженні,} \end{cases} \quad (9.1)$$

За цією моделлю матеріал відповідає закону Гука до досягнення **границі текучості**, після якої деформування відбувається за сталого напруження σ_T . Така схема деформування найближча для таких матеріалів як маловуглецеві сталі та алюмінієві сплави. Їх поведінку при різних видах деформацій можна представити так званою діаграмою Прандтля (рис. 9.1б).

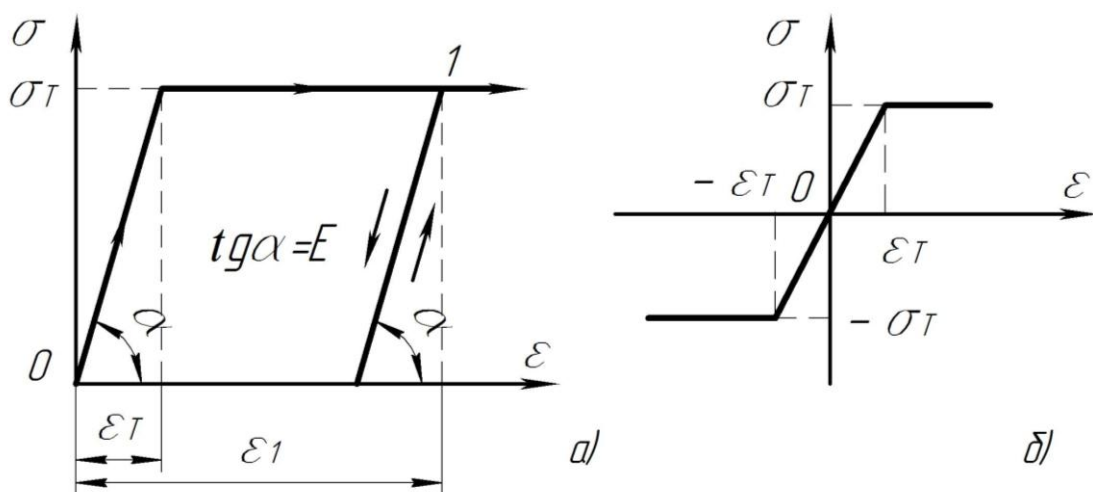


Рисунок 9.1. Модель деформування ідеального пружно-пластичного матеріалу (а) та діаграма Прандтля для маловуглецевих сталей і алюмінієвих сплавів

Нехтування на цій діаграмі ділянкою зміцнення, як правило, забезпечує додатковий запас міцності всієї конструкції. Метод розрахунку на міцність, у якому використовують пластичні деформації, називають **методом граничних навантажень, або методом «руйнівних» навантажень.**

Граничним, чи руйнівним, умовно називають таке навантаження, яке викликає в конструкції великі пластичні деформації (за рахунок появи в її елементах так званих **пластичних шарнірів**), після чого вона перестає задовольняти експлуатаційні вимоги. *Цей метод дозволяє ефективніше використати утримувальну здатність конструкції, ніж розрахунок за напруженнями,* і тому є економічнішим.

9.2. Розрахунок статично невизначуваних стержневих систем

Розрахунок стержневих систем на розтяг і стиск відрізняється від розрахунку таких систем на інші види деформацій тим, що при розтягу (стиску) досягнення максимальним напруженням граничного значення в одній точці є рівнозначним досягненню граничних значень фактично в усьому перерізі елемента конструкції. Якщо така конструкція є статично визначеною, то це означає, що далі її навантаження спричиняє *втрату нею утримувальної здатності й перетворення її на геометрично змінний механізм.* Тому навантаження, яке призвело конструкцію до цього стану, можна називати **граничним, або руйнівним.** Тобто, у статично визначених стержневих системах розрахунок на розтяг і стиск **за методом граничних напружень** є еквівалентним розрахунку таких систем **за методом граничних навантажень.** Разом з тим, для статично невизначуваних систем розрахунку за різними методами даватимуть різні результати.

9.2.1. Розрахунок методом допустимих напружень

Розглянемо статично невизначувану стержневу систему, що складається із жорсткого бруса, шарнірно закріпленого в точці K та двох пружних стержнів, котрі його підтримують (рис. 9.2а). На кінці бруса (т. B) діє сила F . Для спрощення розрахунку приймаємо, що брус як жорстке тіло отримує переміщення тільки за рахунок деформацій стержнів. При цьому нехтуємо горизонтальними складовими переміщень точок бруса, як величинами другого порядку малості, порівняно з вертикальними складовими цих переміщень.

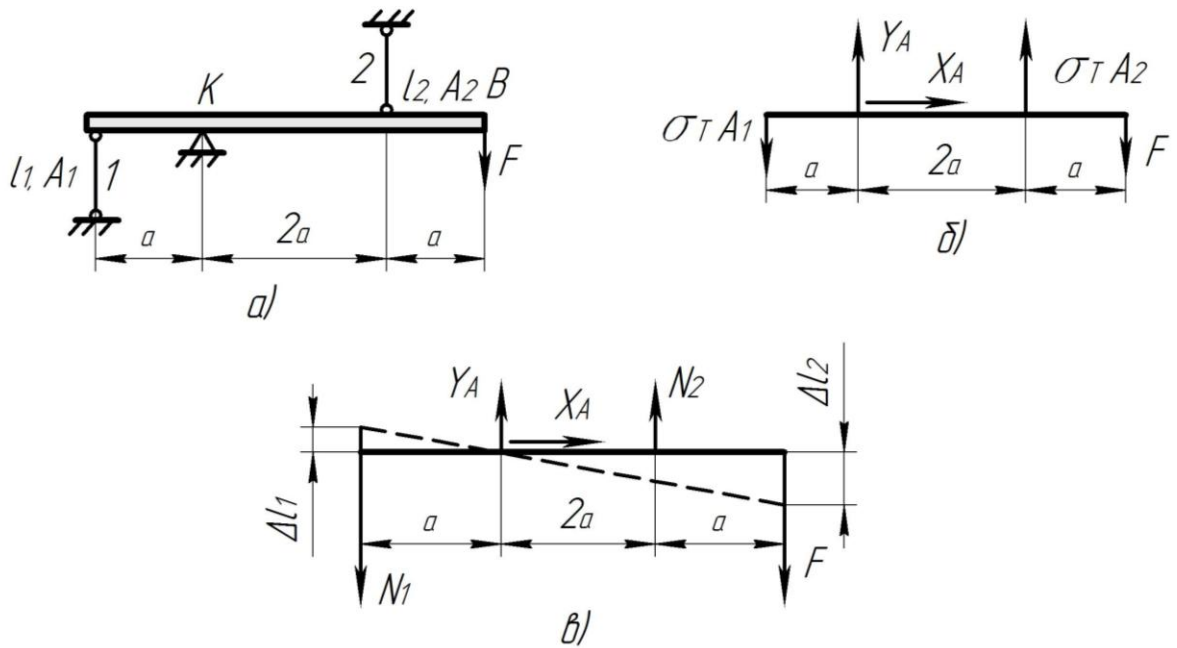


Рисунок 9.2. Розрахунок статично невизначуваної стержневої системи

Для того, щоб скласти рівняння рівноваги всіх зусиль, що діють на брус, уявно відкинемо всі в'язі бруса і замінимо їх невідомими реакціями X_K , Y_K , N_1 , N_2 (рис. 9.2б). Складемо для такої плоскої системи три рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum X = 0: & \quad X_A = 0; \\ \sum Y = 0: & \quad Y_A - N_1 + N_2 - F = 0; \\ \sum (M_A) = 0: & \quad N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a - F \cdot 3a = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Аналіз системи рівнянь (9.2) показує, що останні два рівняння містять три невідомих зусилля. Тобто, *система є один раз статично невизначуваною*. Для її розкриття необхідно скласти ще одне додаткове рівняння, яке називають *рівнянням переміщень (або рівняння сумісності деформацій)*. Таке рівняння легко скласти, якщо виходити із схеми деформування стержневої системи (рис. 9.2в), на основі геометричної залежності між переміщеннями стержнів Δl_1 і Δl_2 :

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a}, \quad (9.3)$$

звідки

$$2\Delta l_1 = \Delta l_2.$$

Згідно із законом Гука, при розтягу (стиску) отримаємо

$$2 \frac{N_1}{C_1} = \frac{N_2}{C_2}, \quad (9.4)$$

де C_i – жорсткості стержнів, $C_i = E_i \cdot A_i / l_i$.

У випадку, коли жорсткості обох стержнів однакові, зусилля в другому стержні вдвічі більше від зусилля у першому, тобто $N_2 = 2N_1$.

Підставивши залежність (9.4) у систему рівнянь (9.2), отримаємо шукані вирази невідомих реакцій через зусилля F :

$$N_1 = \frac{3F}{1 + 4C_2/C_1}, \quad N_2 = \frac{6F}{4C_1/C_2}; \quad (9.5)$$

$$Y_A = F + N_1 - N_2.$$

Якщо $C_1 = C_2$, то $N_1 = 0,6F$, а $N_2 = 1,2F$.

Напруження в стержнях 1 і 2, з однаковою площею поперечного перерізу, $A_1 = A_2 = A$, будуть:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = 0,6 \frac{F}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = 1,2 \frac{F}{A}. \quad (9.6)$$

З умови міцності $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ знаходимо величину допустимого навантаження для даної стержневої системи:

$$\sigma_2 = 1,2 \frac{F}{A} = [\sigma],$$

звідки

$$[F] = \frac{5}{6} [\sigma] \cdot A. \quad (9.7)$$

Підставивши величину допустимого навантаження $[F]$ у вираз для нормального напруження у першому стержні, отримаємо $\sigma_1 = 0,5 [\sigma]$, тобто перший стержень системи навантажений тільки наполовину, а система в цілому залишається недовантаженою, що є **недоліком власне методу розрахунку за граничними напруженнями**.

9.2.2. Розрахунок за методом граничних навантажень

При розрахунку за методом допустимих напружень вимагалось, що хоча б в одному зі стержнів (у даному випадку у другому, див. рис. 9.2) нормальне напруження досягало **границі текучості** – σ_T . У першому стержні нормальне напруження досягає тільки половини границі текучості, тобто утримувальна здатність системи ще себе не вичерпала.

За умови, що матеріал стержнів веде себе як ідеально пластичний, вважатимемо, що зусилля у другому стержні залишається постійним ($N_2 = \sigma_T \cdot A_2$) при подальшому збільшенні сили F . У цей же час зусилля N_1 у першому стержні зростатиме доти, поки в ньому також не виникне текучість матеріалу і воно дорівнюватиме $N_1 = \sigma_T \cdot A_1$. Після цього можна вважати, що утримувальна здатність системи себе вичерпала і подальше збільшення навантаження неможливе.

Для визначення величини граничної сили F_T скористаємось третім рівнянням рівноваги (9.2), підставивши у нього значення зусиль N_1 і N_2 :

$$\sigma_T \cdot A_1 \cdot a + \sigma_T \cdot A_2 \cdot 2a - F_T \cdot 3a = 0,$$

звідки

$$F_T = \frac{1}{3} \sigma_T (A_1 + 2A_2). \quad (9.8)$$

При $A_1 = A_2 = A$ будемо мати

$$F_T = \sigma_T \cdot A. \quad (9.9)$$

Поділивши праву і ліву частину рівності (9.9) на коефіцієнт запасу n_T , отримаємо

$$[F_T] = [\sigma] \cdot A, \quad (9.10)$$

де $[F_T]$ – допустиме навантаження за методом граничних навантажень,

$$[F_T] = F_T / n_T.$$

Умова перевірки міцності за цим методом набуває вигляду

$$F_{\max} \leq [F_T] \quad (9.11)$$

Порівнявши результати розрахунку даної системи за методом допустимих напружень (формула (9.7)) та методом граничних навантажень (формула (9.10)), отримаємо співвідношення для граничної сили:

$$\frac{[F_T]}{[F]} = \frac{6}{5}. \quad (9.12)$$

Тобто, за таких співвідношень геометричних характеристик стержнів системи **метод граничних навантажень** дозволяє підвищити величину навантаження F ще на 20% порівняно з **методом граничних напружень**. Необхідно зауважити, що за інших співвідношень C_i/C_j жорсткостей стержнів різниця між допустимими навантаженнями буде іншою, але завжди **розрахунок за руйнівними навантаженнями сприяє ефективнішому використанню міцності матеріалу стержнів**. Однак цей метод не можна використовувати за повторно-змінних напруженнях, бо пластичні деформації сприяють швидкому втомному руйнуванню конструкції.

9.3. Утримувальна здатність вала за деформації кручення

При розрахунку вала на кручення методом допустимих напружень припускали, що граничний напружений стан у валі настає за крутного моменту M_{KP}^* , коли максимальне дотичне напруження досягає границі текучості τ_T . Але, на відміну від деформацій розтягу-стиску, **при деформації кручення вала область граничних значень напружень проходитьиме тільки через поверхневі точки перерізу вала** (рис. 9.3а).

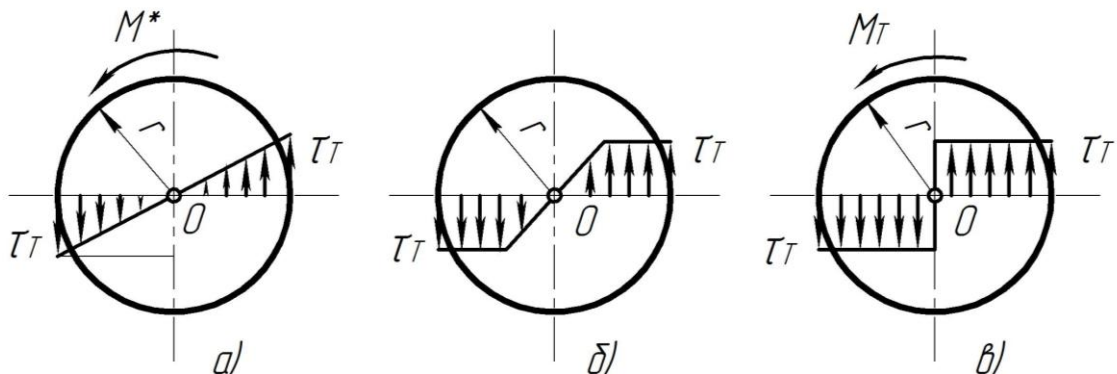


Рисунок 9.3. Зміна дотичних напружень у перерізі вала з ідеального пружно-пластичного матеріалу при збільшенні крутного моменту

Точки, що знаходяться ближче до осі вала, будуть залишатися менш навантаженими. Тому крутний момент, що передається на вал, можна збільшувати, доки текучість матеріалу не пошириться на всю площину поперечного перерізу вала. Тільки у цьому випадку утримувальна здатність вала буде повністю вичерпана. Якщо матеріал вала ідеально пластичний, то епюру дотичних напружень зображають двома прямокутниками з висотою τ_T (рис. 9.3в). Вираз для граничного моменту M_T буде мати вигляд:

$$M_{KP.T} = \tau_T \cdot \int_A \rho dA, \quad (9.13)$$

де величина dA у полярних координатах дорівнює $dA = \rho d\rho \cdot d\varphi$. Підставивши її в інтеграл (9.12), отримаємо

$$M_{KP.T} = \tau_T \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \tau_T. \quad (9.14)$$

Розділивши праву та ліву частину рівності (9.14) на коефіцієнт запасу n_T , отримаємо величину допустимого граничного моменту $[M_T]$ за руйнівними навантаженнями

$$[M_{KP.T}] = \frac{M_T}{n_T} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 \cdot [\tau] \quad (9.15)$$

Допустимий крутний момент для статично визначеного вала розраховують за формулою

$$[M_{KP}] = W_p \cdot [\tau]. \quad (9.16)$$

Отже, допустимий крутний момент за **методом допустимих напружень**

$$[M_{KP}] = \frac{M_{KP}^*}{n_T} = W_p \cdot [\tau] = \frac{1}{2} \pi \cdot r^3 \cdot [\tau] \quad (9.17)$$

Порівнюючи формули (9.15) і (9.17), бачимо, що **відношення допустимого крутного моменту за руйнівними навантаженнями до**

допустимого крутного моменту за методом допустимих напружень, дорівнює

$$\frac{[M_T]}{[M_{KP}]} = \frac{4}{3}. \quad (9.18)$$

Із співвідношення (9.18) видно, що *після появи на поверхні вала пластичних деформацій його граничний стан за руйнівними навантаженнями досягається додатковим збільшенням крутного моменту ще на одну третину*. Застосовують цей метод тільки для статичних навантажень так як і при розрахунках на розтяг і стиск.

9.4. Пластичний розрахунок статично визначуваної балки

Розглянемо чистий згин балки з ідеального пружно-пластичного матеріалу та *визначимо утримувальну здатність методом граничних навантажень*. До балки прикладений згинальний момент, максимальне напруження від якого не перевищує границі текучості σ_T , а балка знаходиться у стані звичайного пружного згину з лінійним законом розподілу напружень по товщині, тобто висоті (рис. 9.4б). За умови певного зростання згинального моменту до величини $M_{3Г}^*$, максимальне напруження в ній досягає границі текучості матеріалу σ_T . Тоді допустимий згинальний момент за методом допустимих напружень дорівнюватиме

$$[M_{3Г}] = \frac{M_{3Г}^*}{n_T} = W_0 \cdot [\sigma]. \quad (9.19)$$

Для балки прямокутного поперечного перерізу висотою h і шириною b осьовий момент опору $W_0 = \frac{1}{6} b \cdot h^2$. У цьому випадку

$$[M_{3Г}] = \frac{1}{6} b \cdot h^2 \cdot [\sigma]. \quad (9.20)$$

При подальшому зростанні згинального моменту текучість матеріалу з крайніх волокон поперечного перерізу балки почне поширюватися на нижчі шари волокон у напрямку до нейтрального шару (рис. 9.4в). Такий процес продовжуватиметься доти, поки в усьому поперечному перерізі

балки не виникнуть напруження, що дорівнюватимуть границі текучості матеріалу σ_T (рис. 9.4з). У цьому випадку поперечний переріз балки повністю перейде у пластичну зону, в якій виникає необмежена пластична текучість. Балка у цьому перерізі послаблюється надзвичайно великими поворотами, тоді як обидві половини балки залишаються відносно жорсткими. Таким чином, **балка поводитья як два жорсткі стержні, з'єднані пластичним шарніром, який дозволяє цим стержням повертатися один відносно одного під дією граничного згинального моменту $M_{3Г.Т}$** :

$$M_{3Г.Т} = 2 \int_{A/2} \sigma_T \cdot y dA = 2\sigma_T \cdot S_{\max}, \quad (9.21)$$

де S_{\max} – максимальний статичний момент половини прямокутного або круглого перерізів відносно осі OX , $S_{\max} = \left\{ \frac{b \cdot h^2}{8}; \frac{2}{3} r^3 \right\}$.

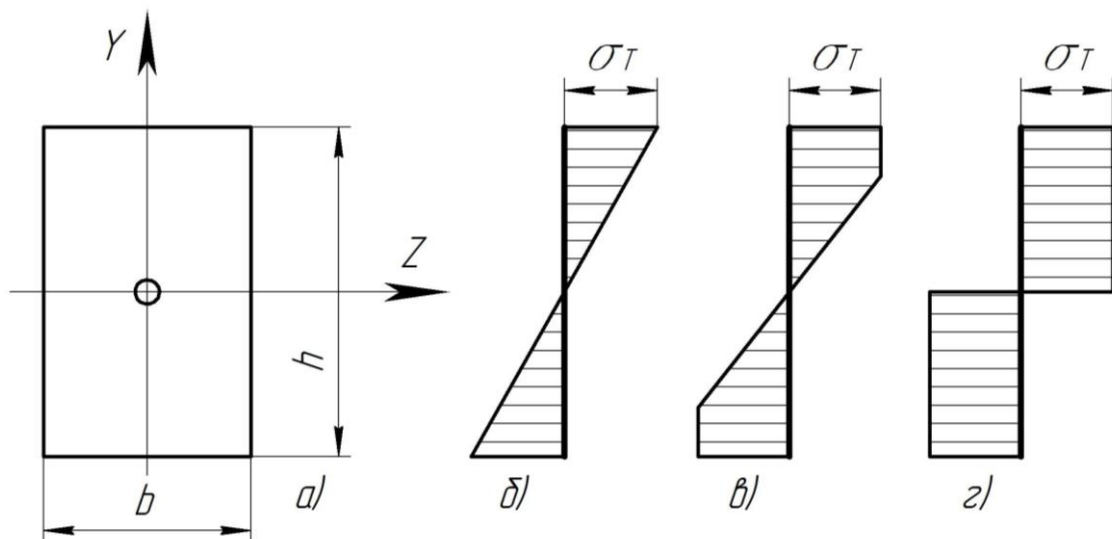


Рисунок 9.4. Зміна нормальних напружень у балці ідеального пружно-пластичного матеріалу при збільшенні згинального моменту

Допустимий згинальний момент $[M_{3Г.Т}]$ при коефіцієнті запасу n_T , буде дорівнювати

$$[M_{3Г.Т}] = \frac{M_{3Г.Т}}{n_T} = 2[\sigma] \cdot S_{\max}. \quad (9.22)$$

Формулу (9.22) можна записати у прийнятнішому вигляді

$$[M_{зг.Т}] = n_T \cdot [\sigma] \cdot W_0, \quad (9.23)$$

де $n_T = 2S_{\max}/W_0$. Для прямокутного перерізу параметр $n_T = 1,5$; для круглого $n_T = 1,7$; для стандартних двотаврових балок у середньому $n_T = 1,16$. Але у випадку тонкостінних перерізів (типу двотавра, швелера, кутника) *балку необхідно додатково перевіряти на втрату стійкості плоскої форми згину.*

Перевірка міцності балки за методом граничних навантажень полягає у порівнянні максимального згинального моменту $M_{зг\max}$ із допустимим моментом $[M_{зг.Т}]$

$$M_{зг\max} \leq [M_{зг.Т}] = n_T \cdot [\sigma] \cdot W_0. \quad (9.24)$$

Отже, **розрахунок балки за методом руйнівних навантажень рівнозначний збільшенню допустимого напруження $[\sigma]$ або осьового моменту опору W_0 в n_T разів порівняно з методом допустимих напружень.**

Отримані формули та висновки для чистого згину балки справедливі й для поперечного згину. Тільки в цьому випадку вони стосуються перерізів з найбільшим згинальним моментом. А у випадку перевірки балки на міцність у ліву сторону нерівності (9.24) підставляємо значення максимального згинального моменту, вираженого через відповідне зовнішнє навантаження.

9.5. Розрахунок нерозрізних балок методом граничних навантажень

Для того, щоб дослідити поведінку статично невизначуваних балок, розглянемо, наприклад, консольну балку з додатковою опорою на кінці, що навантажена посередині зосередженою силою F (рис. 9.5а). Спочатку визначимо розрахунковий момент за методом допустимих напружень.

Для розкриття статичної невизначеності та побудови епюри згинальних моментів скористаємось рівнянням трьох моментів для опори «0»:

$$2M_0 \cdot l + M_1 \cdot l = -6E \cdot I \cdot \theta_0''. \quad (9.25)$$

У даному випадку опорний момент $M_1 = 0$. Опорний кут повороту θ_0'' визначимо за формулою

$$E \cdot I \cdot \theta_0'' = \frac{F \cdot l^2}{16}. \quad (9.26)$$

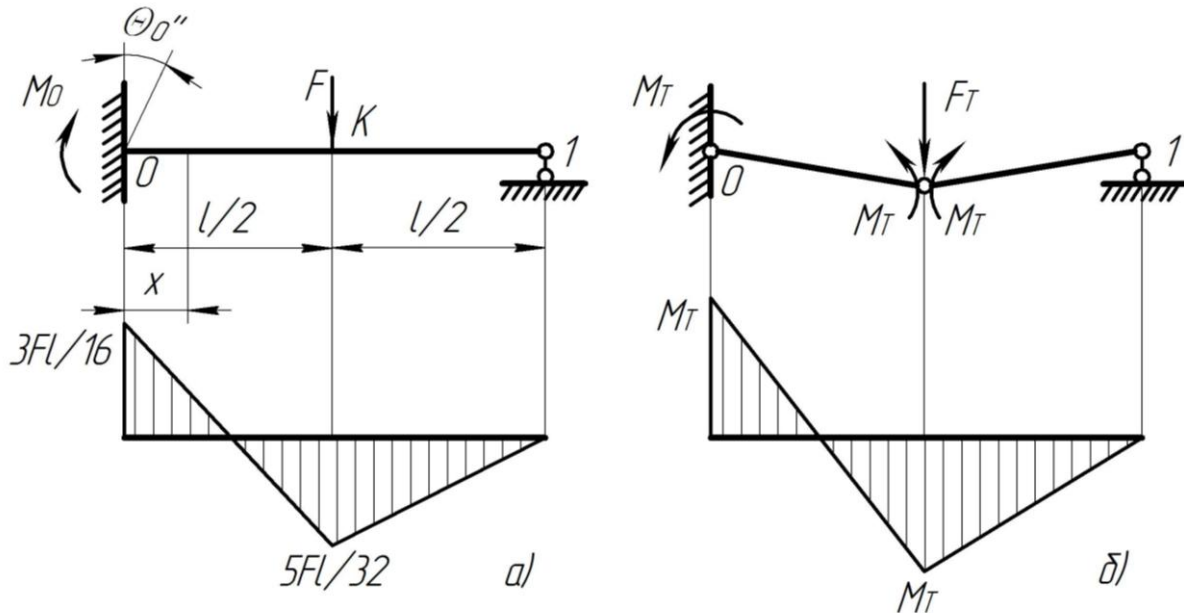


Рисунок 9.5. Розрахунок статично невизначуваної балки навантаженої зосередженою силою

Підставивши знайдені величини у рівняння (9.25), отримаємо

$$M_0 = -\frac{3}{16} F \cdot l. \quad (9.27)$$

Крім опорного моменту, в лівій опорі статично невизначуваної балки діє реакція

$$R_0 = \frac{F}{2} - \frac{M_0}{l} = \frac{11}{16} F. \quad (9.28)$$

Отже, найбільший прогінний момент посередині з врахуванням залежностей (9.27) і (9.28) балки дорівнює

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = R_0 \cdot \frac{l}{2} + M_0 = \frac{5}{32} F \cdot l. \quad (9.29)$$

Максимальний прогінний момент менший від опорного, а тому, згідно з методом допустимих напружень, *за небезпечний переріз вибираємо опорний.*

Отже, умова міцності для визначення допустимого навантаження $[F]$:

$$|M_{3Г\max}| = \frac{3}{16} F \cdot l \leq [\sigma] \cdot W_0, \quad (9.30)$$

звідки

$$[F] = \frac{16}{3} [\sigma] \cdot W_0 / l. \quad (9.31)$$

При збільшенні навантаження до величини F_T опорний та прогінний моменти зростуть до величини M_T , при якій *в обох перерізах утворюються пластичні шарніри.* Після цього *балка перетвориться на геометрично змінну систему, що не може опиратися подальшому збільшенню навантаження.* Епюра граничних згинальних моментів, що відповідає утворенню у прольоті двох пластичних шарнірів, зображена на рис. 9.5б.

Величину граничного моменту $M_{3Г.T}$ визначають з рівняння (9.29) для прогінного моменту $M(l/2)$ посередині балки, якщо $M_0 = -M_T$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = R_0 \frac{l}{2} - M_{3Г.T} = M_{3Г.T}, \quad (9.32)$$

де

$$R_0 = \frac{F}{2} + \frac{M_{3Г.T}}{l}.$$

Тоді

$$M_{3Г.T} = F_T \cdot l / 6. \quad (9.33)$$

Величину допустимого граничного навантаження знайдемо з умови перевірки міцності за граничним навантаженням (9.24):

$$\frac{1}{6} [F_T] \cdot l = n \cdot [\sigma] \cdot W_0,$$

звідки

$$[F_T] = 6n \cdot [\sigma] \cdot W_0 / l. \quad (9.34)$$

Використавши вирази (9.31) і (9.34), можна знайти **відношення допустимого граничного навантаження до допустимого навантаження**, визначеного за методом допустимих напружень:

$$\frac{[F_T]}{F} = \frac{9}{8}n. \quad (9.35)$$

Як видно з рівності (9.35), величина відношення допустимих навантажень, визначених різними методами, для статично невизначуваних систем дещо більша, ніж для статично визначуваних. Отриманий результат пояснюється тим, що в **статично невизначуваних системах має місце деякий перерозподіл моментів. Після утворення у певному перерізі пластичного шарніра величина згинального моменту у ньому залишається сталою.** Тоді, як в усіх інших перерізах, по довжині балки моменти будуть зростати доти, доки максимальний згинальний момент в одному з них не досягне величини граничного моменту $M_{зг.т}$, за якого з'явиться пластичний шарнір і балка перетвориться на геометрично змінний механізм.

Тенденція перерозподілу моментів завжди збільшує утримувальну здатність статично невизначуваної конструкції, оскільки коли вичерпується міцність однієї ділянки, додаткове навантаження починають приймати на себе інші ділянки конструкції. Статично визначувані системи такої здатності не мають.

У випадку навантаження балки зосередженою силою або зосередженим моментом місце появи пластичного шарніра було передбачуване.

У випадку дії розподіленого навантаження небезпечний переріз необхідно шукати методом знаходження екстремуму функції, якою описується пролітний згинальний момент. Для прикладу розглянемо випадок, коли попередня нерозрізна балка навантажена розподіленим навантаженням q (рис. 9.6а). У цьому випадку рівняння трьох моментів матиме вигляд (9.25). Вираз для опорного кута повороту θ_0'' знайдемо за формулою

$$E \cdot I \cdot \theta_0'' = \frac{q \cdot l}{24}. \quad (9.36)$$

Підставивши отримане значення у рівняння трьох моментів (поклавши також $M_1 = 0$), знайдемо вираз для опорного моменту

$$M_0 = -q \cdot l^2 / 8. \quad (9.37)$$

На відстані x від лівої опори вираз для прогінного згинального моменту

$$M(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{M_0}{l} \cdot x + M_0. \quad (9.38)$$

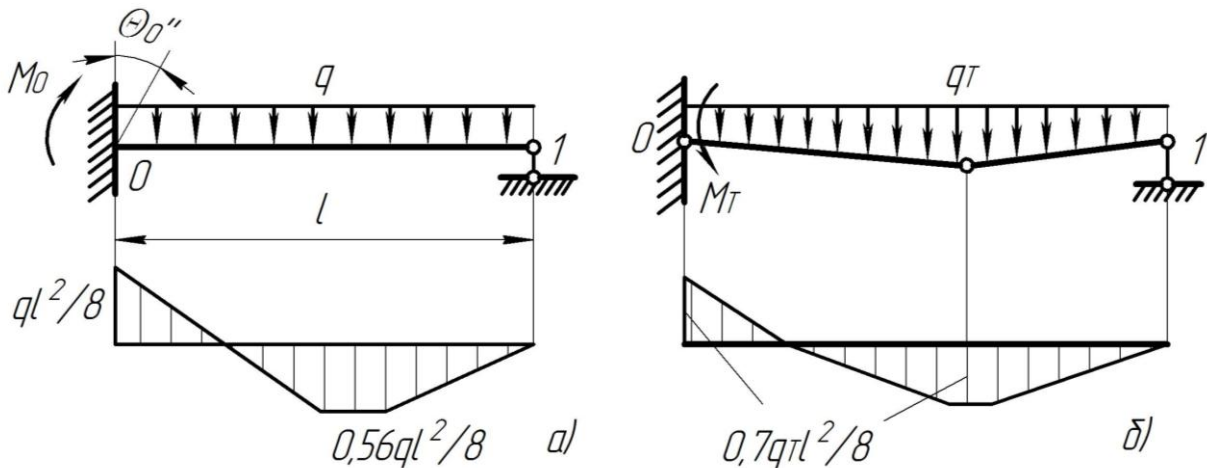


Рисунок 9.6. Розрахунок статично невизначуваної балки від дії розподіленого навантаження

Абсциса x_0 перерізу з максимальним прогінним моментом визначають з умови $dM/dx = 0$. Отримаємо рівняння

$$\frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x_0 - \frac{M_0}{l} = 0, \quad (9.39)$$

з якого знаходимо

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{M_0}{q \cdot l} = \frac{5}{8}l. \quad (9.40)$$

Підставивши значення у рівняння (9.38), отримаємо значення максимального моменту

$$M_{3Г \max} = 0,56 \frac{q \cdot l^2}{8}. \quad (9.41)$$

Отже, чисельно найбільше значення згинального моменту буде в області защемлення, тому прирівняємо його до величини граничного моменту $M_{3Г}^*$:

$$\frac{q^* \cdot l^2}{8} = M_{3Г}^* . \quad (9.42)$$

Звідси, поділивши праву і ліву частини рівності на коефіцієнт запасу n_T , отримаємо

$$[q] = 8[M_{3Г}] / l^2 = 8[\sigma] \cdot W_0 / l^2 . \quad (9.43)$$

Збільшуючи значення розподіленого навантаження q , доведемо значення згинального моменту в опорі до величини $M_{3Г.T}$, при якій в опорі утвориться пластичний шарнір. При подальшому збільшенні розподіленого навантаження до величини q_T , у перерізі з найбільшим прогінним моментом утвориться ще один пластичний шарнір, і балка втратить свою утримувальну здатність.

Для знаходження величини невідомого граничного моменту $M_{3Г.T}$ скористаємось рівнянням (9.38), підставивши в нього, замість величини M_0 , величину невідомого граничного моменту $M_{3Г.T}$ та прирівнявши прольотний момент в точці $x_0 = (l/2) + (M_{3Г.T} / q_T \cdot l)$ до величини $M_{3Г.T}$:

$$M(x_0) = \frac{q_T \cdot l}{2} \cdot x_0 - \frac{q_T \cdot x_0^2}{2} + \frac{M_{3Г.T}}{l} \cdot x_0 - M_{3Г.T} = M_{3Г.T} . \quad (9.44)$$

Розв'язавши це квадратне рівняння відносно $M_{3Г.T}$, отримаємо

$$M_{3Г.T} = (12 - 8\sqrt{2}) q_T \cdot l^2 . \quad (9.45)$$

Поділивши отриману рівність на коефіцієнт запасу n_T та підставивши у рівність (9.24), отримаємо

$$[q]_T = 11,66 \cdot n_T \cdot [\sigma] \cdot W_0 / l^2 . \quad (9.46)$$

На основі виразів (9.43) та (9.46) робимо висновок, що

$$\frac{[q]_T}{[q]} = 1,46 n_T . \quad (9.47)$$

Отриманий результат значно перевищує величину (9.35), коли замість розподіленого навантаження діє зосереджена сила, а також для випадку статично визначуваної балки.

У даному випадку, так само як і для статично визначуваних балок, **метод граничних навантажень не можна застосовувати за дії повторно-змінних навантажень.**

Тема 10

ТЕОРІЇ МІЦНОСТІ ДЛЯ КРИХКИХ ТА ПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

- 10.1. Завдання теорій міцності.
Крихке та пластичне руйнування**
- 10.2. Класичні теорії міцності для крихкого руйнування**
- 10.3. Класичні теорії міцності для пластичного руйнування**
- 10.4. Узагальнені теорії міцності**

10.1. Завдання теорій міцності. Крихке та пластичне руйнування

Міцність та надійність будь-якої конструкції та її елементів однаково чиним залежать від того, з якого матеріалу виготовлена ця конструкція і якого виду навантаження вона повинна витримувати. Міцність матеріалу – це здатність матеріалу протидіяти руйнуванню. Для цього використовують кількісну оцінку, що виникає на основі визначення напружено-деформованого стану в елементах конструкції. Недостатня міцність матеріалу конструкції веде до втрати цим матеріалом здатності чинити опір навантаженням – аж до руйнування. Якщо елемент конструкції працює у стані простого розтягу або стиску, то визначення граничного стану цього елемента є нескладним. Максимальне напруження, яке буде відповідати за виникнення цього небезпечного стану, має дорівнювати:

- **границі текучості** (σ_T) – при досягненні стану текучості в пластичному матеріалі;
- **границі міцності** ($\sigma_{мц}$), що відповідає за руйнування крихкого матеріалу;
- **границі втоми** ($\sigma_в$) – при повторно-змінних навантаженнях.

Експериментальне визначення цих механічних характеристик можливе на основі безпосередніх випробувань зразків матеріалу на спеціальному випробувальному обладнанні. Експериментальне визначення небезпечних (граничних) станів при складних напружених станах, коли виникає декілька видів деформацій, практично неможливе. Тому в цих випадках доводиться користуватись низкою гіпотез про поведінку матеріалу в граничному напруженому стані, які в сукупності називають тією чи іншою «теорією міцності».

Отже, завданням теорії міцності є вираження умов виникнення в елементах конструкцій граничних напружених станів при будь-якому складному напруженому стані, коли відомі механічні характеристики матеріалу, отримані при його випробуванні в умовах лінійного напруженого стану.

У математичному вираженні умова досягнення матеріалом граничного стану

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = F_{зр}, \quad (10.1)$$

де F – певна функція від головних напружень;

$F_{зр}$ – граничне значення цієї функції при певному одновісному напруженому стані.

Тоді умова міцності, з деяким коефіцієнтом запасу ($n > 1$), матиме вигляд:

$$F \leq F_{зр} / n = [F]. \quad (10.2)$$

Тут n – коефіцієнт запасу; $[F]$ – допустиме значення вибраної функції.

У багатьох випадках для конкретизації функцію $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ називають **еквівалентним напруженням** ($\sigma_{екв}$), що відповідає напруженню у розтягнутому (стиснутому) зразку та рівнонебезпечно заданому об'ємному напруженому стану. **За допустиме значення функції $[F]$ беруть допустиме напруження $[\sigma]$ при одновісному напруженому стані.** Тобто, умову міцності записують у вигляді:

$$\sigma_{екв.i} \leq [\sigma], \quad (10.3)$$

де i – індекс, яким позначають умовний номер теорії міцності.

Введення величини еквівалентного напруження полегшує (формалізує) визначення коефіцієнта запасу міцності n елемента конструкції за формулою

$$n = \sigma_{гр} / \sigma_{екв.i}. \quad (10.4)$$

Результати експериментальних та теоретичних досліджень показують, що *успішне застосування тієї чи іншої теорії міцності залежить від того, міцність яких матеріалів розглядають – крихких чи пластичних*, а звідси – яке руйнування може відбутись – крихке чи пластичне. *Основним критерієм таких досліджень обирають величину залишкової деформації при руйнуванні.*

Крихким називають таке руйнування твердих тіл, за якого пластичні деформації після руйнування не перевищують пружних, а *граничний опір матеріалу пов'язаний із досягненням границі міцності*. Руйнування у цьому випадку відбувається відривом однієї частини тіла від іншої.

Пластичним вважають руйнування, пов'язане з великими пластичними деформаціями, що в десятки разів перевищують пружні деформації. При такому руйнуванні *граничний стан пов'язує з границею текучості* (порогом пластичності), а саме руйнування відбувається шляхом зсуву (зрізу). Тому граничним дотичним напруженням треба вважати напруження τ_T , що відповідає границі текучості матеріалу.

При таких дослідженнях необхідно також враховувати *режим випробувань: швидкість навантаження, температуру середовища, саме середовище, вид напруженого стану*. Наприклад, для пластичного матеріалу характерні великі стискувальні напруження.

Водночас у деяких випадках реальне руйнування тіла може мати ознаки крихкого і пластичного руйнувань. Тоді таке руйнування називають **квазікрихким** або **квазіпластичним**.

10.2. Класичні теорії міцності для крихкого руйнування

Одними з найдавніших і найпростіших теорій міцності є теорії, які з певним наближенням можна застосувати при крихкому руйнуванні. **Першою теорією міцності, або теорією міцності найбільших нормальних напружень** є критерій, який ґрунтується на гіпотезі: *граничний стан матеріалу навколо розглядуваної точки настає тоді, коли найбільше нормальне напруження σ_{\max} досягає свого граничного значення σ_{zp}* . Цю теорію пов'язують з іменами класиків науки Галілео Галілеєм та Г. Лейбніцом.

Згідно з цією теорією, якщо відомі головні напруження $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, що діють у даній точці, то критерій граничного стану та умова міцності відповідно мають вигляд:

$$\sigma_{екв.I} = \sigma_1 = \sigma_{zp.p}, \quad \sigma_1 \leq [\sigma_p], \quad (10.4)$$

або

$$\sigma_{екв.I} = \sigma_3 = \sigma_{zp.c}, \quad \sigma_3 \leq [\sigma_c],$$

Тут $[\sigma_p]$, $[\sigma_c]$ – допустимі напруження при розтягу та стиску відповідно,

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{zp.p}}{n_p}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{zp.c}}{n_c}.$$

Причиною руйнування крихких матеріалів (скло, гіпс, кераміка) є виникнення і поширення тріщин, де головну роль відіграють найбільші розтягувальні напруження. Однак, формули (10.4) *не враховують впливу інших головних напружень на міцність матеріалу, що є її основним недоліком*. Ця теорія не зовсім відповідає даним випробувань більшості реальних матеріалів (крім названих вище). Вона не пояснює і надзвичайно велику міцність матеріалів при високому гідростатичному тиску.

Друга теорія міцності, або теорія найбільших лінійних деформацій, ґрунтується на гіпотезі, що *граничний стан матеріалу навколо розглядуваної точки настає тоді, коли в ній найбільша відносна лінійна деформація ε_{\max} досягне граничного значення ε_{zp}* .

Тобто, якщо відомі головні деформації $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, де $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\max}$, то критерієм граничного стану буде:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{zp}, \quad (10.5)$$

а умову міцності записують у вигляді:

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_p / n = [\varepsilon]. \quad (10.6)$$

Вважаючи, що на ліву і праву частини нерівності (10.6)

поширюється закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad [\varepsilon] = [\sigma]/E,$$

умову міцності, за другою теорією міцності, можна записати у вигляді:

$$\sigma_{екв.II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma], \quad (10.7)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження при осьовому розтягу (стиску).

Основним недоліком другої теорії міцності, яка була запропонована ще Е. Маріоттом (1662), **є те, що вона не враховує взаємодії трьох головних деформацій**. Для таких крихких матеріалів, як фосфор, друга теорія міцності підтверджується також експериментально. У випадку ж пластичних матеріалів цю теорію не використовують, бо теоретичні результати не підтверджуються дослідними даними.

10.3. Класичні теорії міцності для пластичного руйнування

Пластичне руйнування матеріалів відбувається у результаті необмеженої зміни форми тіла (зсуву частин тіла між собою), тобто принципово інших механізмів, ніж при крихкому руйнуванні. У зв'язку з цим теоретичні розрахунки за першою і другою теорією міцності не підтверджуються експериментальними даними. Тому Ш. Кулоном (1773), а пізніше А. Треска (1868) була викладена і обґрунтована **третья теорія міцності, яка отримала назву теорії міцності найбільших дотичних напружень**. Ця теорія ґрунтується на гіпотезі, що граничний стан у певній точці тіла наступить тоді, коли найбільше дотичне напруження τ_{\max} досягне граничного значення τ_T :

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (10.8)$$

Для об'ємного напруженого стану $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, а у випадку лінійного стану – розтягу (стиску) – $\tau_T = 0,5\tau_T$.

Відповідно до цих виразів, умова (10.8) має вигляд:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T, \quad (10.9)$$

а умова міцності

$$\sigma_{екв.III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (10.10)$$

Умову (10.9) розглядають ще й як умову початку виникнення пластичних деформацій у матеріалі. Б. Сен-Венан у 1881 р. запропонував

вважати її умовою пластичності. Згідно з нею, пластична деформація у даній точці тіла виникає тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає певної (характерної для даного матеріалу) величини, що дорівнює границі текучості при чистому зсуві.

Недоліком третьої теорії міцності є те, що вона не враховує проміжного головного напруження σ_2 , яке також впливає на міцність матеріалу. Тому розходження між результатами теоретичних розрахунків та дослідних даних іноді досягає 10...15%. Якщо матеріал має різні граничні значення напружень при розтягу і стиску, то Ш. Кулон вивів умову, яка ідентична умові, отриманій пізніше О. Мором, *припустивши, що гранична крива, яка огинає кола напружень, є прямою.*

У випадку рівномірного тривісного розтягу, що супроводжується крихким руйнуванням, цю теорію міцності застосовувати не можна.

Ще однією теорією міцності для пластичних матеріалів, яка задовільно описує процеси руйнування, є так звана **енергетична теорія міцності, або четверта теорія міцності**. Вперше цю теорію у 1904 р. запропонував професор Львівської політехніки М. Губер. Ним була уточнена гіпотеза італійського математика Е. Бельтрамі (1885), який помилково стверджував, що *руйнування будь-якого матеріалу відбувається тоді, коли повна питома потенціальна енергія деформації \mathcal{Q} в розглядуваній точці досягне свого критичного значення $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{zp}$, де $\mathcal{Q}_{zp} = \sigma_{zp}^2 / 2E$ – для випадку лінійного розтягу.* Помилковість полягала в тому, що з цього твердження випливала можливість руйнування матеріалу за всестороннього рівномірного стиску

$p_{zp} = \frac{\sigma_{zp}}{\sqrt{3(1-2\mu)}}$, що абсолютно не відповідало результатам експериментальних досліджень. Тому М. Губер *запропонував відкинути у критерії Бельтрамі енергію, яка витрачалась на зміну об'єму, залишивши енергію формозміни*

$$U_{\phi} = U_{\phi.zp}. \quad (10.11)$$

Тут $U_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3)$,

а $U_{\phi.zp} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{zp}^2 = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{пл}^2$.

Підставивши ці вирази в умову (10.11), **критерій Губера** можна записати у вигляді:

$$\sigma_{екв.IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3} = \sigma_T. \quad (10.12)$$

Звідси умову міцності записують так:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3} \leq [\sigma] \quad (10.13)$$

Умову (10.13) можна представити в іншому вигляді, зручнішому для практичних розрахунків:

$$\sqrt{0,5 [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma]. \quad (10.14)$$

Необхідно зауважити, що ліві сторони нерівностей (10.13), (10.14) є не що інше, як інтенсивність напружень σ_i . Тобто, **еквівалентне напруження четвертої теорії міцності тотожне інтенсивності напружень** – $\sigma_{екв.IV} = \sigma_i$. Четверта теорія міцності краще узгоджується з експериментами для пластичних матеріалів, ніж третя. Але *вона не враховує випадку, коли матеріали мають різні характеристики опору при розтягу та стиску*.

10.4. Узагальнені теорії міцності

Розглянуті класичні теорії не є універсальними, бо одні можна застосовувати тільки для крихких матеріалів, а інші добре відображають пластичне руйнування. Крім того, необхідно враховувати неоднаковість опору розтягу та стиску, а також анізотропію матеріалу у різних напрямках.

Однією із таких узагальнених теорій міцності є **теорія міцності Мора**, що ґрунтується на дещо інших припущеннях, ніж класичні. О. Мор у 1900 р. висловив ідею, що **руйнування матеріалу залежить від певної взаємодії нормальних і дотичних напружень: руйнування матеріалу від дотичних напружень відбувається швидше там, де переважає розтяг, і навпаки, – матеріал має більший опір у зоні стискувальних напружень**. Ця ідея дуже легко ілюструється за допомогою системи кругів Мора, отриманих за різних комбінацій значень головних напружень у розглядуваній точці тіла.

Нехай із ряду простих дослідів (на стиск, розтяг, зсув) отримані граничні значення головних напружень, при яких матеріал переходить у пластичний стан або руйнується. Коли на цих граничних напруженнях побудувати круги Мора (рис. 10.1), то виявиться, що обвідна до них є граничною кривою, усередині якої значення нормальних і дотичних напружень (координат площини σ, τ на рис. 10.1) будуть безпечними для певного матеріалу.

Для спрощення обвідну цих кругів із достатньою точністю можна замінити прямими MN та $M'N'$ (рис. 10.2), що є дотичними до двох

кругів: для осьового розтягу з граничним напруженням $\sigma_{гр.р}$ (центр O_1) і для осьового стиску з граничним напруженням $\sigma_{гр.с}$ (центр O_2). Рівняння прямої $MN - \tau = a \cdot \sigma + b$ легко побудувати, виразивши напруження σ, τ через головні напруження σ_1, σ_3 , а сталі a, b – через граничні напруження $\sigma_{гр.р}, \sigma_{гр.с}$.

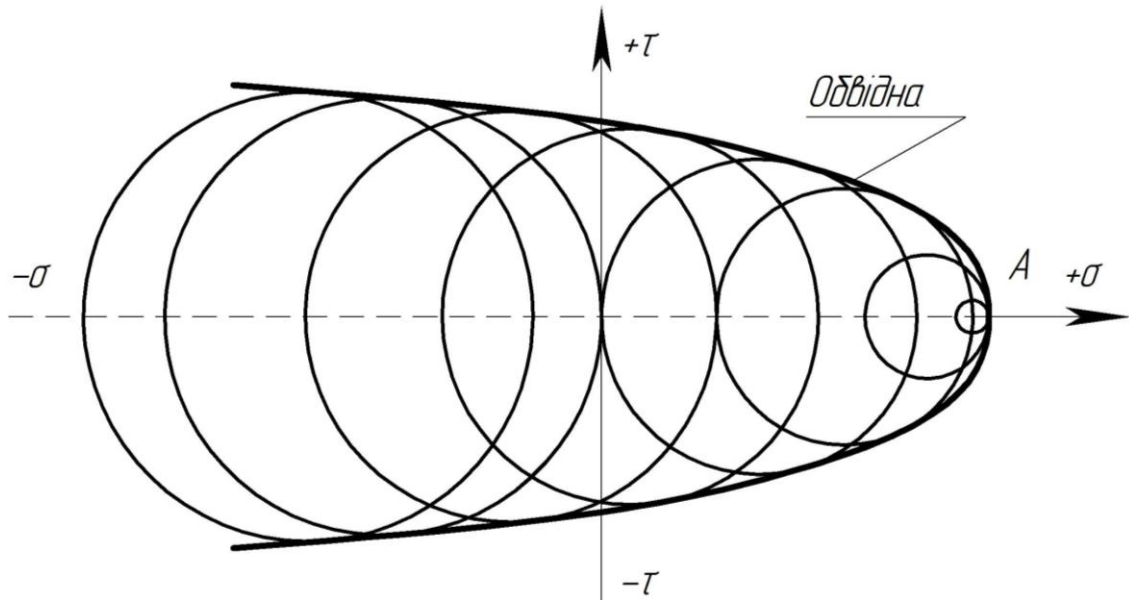


Рисунок 10.1. Побудова обвідної для граничних кругів Мора

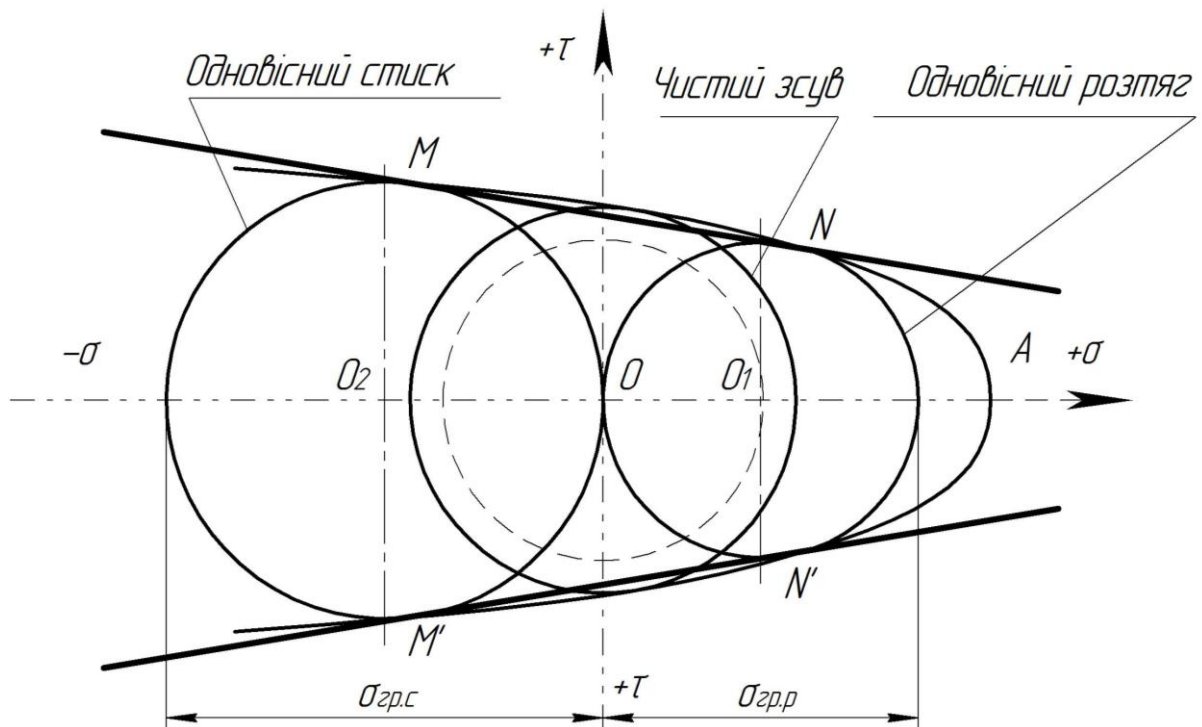


Рисунок 10.2. Графічний спосіб визначення критерію міцності Мора

У даному випадку

$$\sigma_1 - \psi \sigma_3 = \sigma_{gr.p}, \quad (10.15)$$

де $\psi = \sigma_{gr.p} / \sigma_{gr.c}$.

Середні значення ψ наведені в табл. 10.1 за даними довідника.

Критерій міцності Мора буде мати вигляд:

$$\sigma_{екв.М} = \sigma_1 - \psi \sigma_3 \leq [\sigma_p]. \quad (10.15)$$

Для того, щоб з'ясувати, чи задовольняється умова міцності в деякій точці тіла при виникненні у ній головних напружень σ_1 і σ_3 , необхідно побудувати на цих напруженнях відповідний круг Мора (штрихова крива на рис. 10.2). Якщо круг буде розміщений між прямими MN і $M'N'$, то матеріал в околі розглядуваної точки має певний запас міцності, а у випадку їх перетину міцність матеріалу є недостатньою. Дотик круга Мора до прямих MN і $M'N'$ свідчить, що напружений стан є граничним або допустимим.

Таблиця 10.1. Значення параметра ψ для деяких матеріалів

Матеріал	ψ
Сірі чавуни	0,2...0,4
Ковкі чавуни	0,7...0,95
Високоміцні чавуни	0,2...0,3
Скло, ситали	0,07...0,2
Вуглеграфітові композиції, графіти	0,2...0,6
Металокерамічні композиції на основі карбїду вольфраму, карбїду кремнію	0,1...0,4
Вуглецеві сталі	0,9...1,0
Терморективні пластмаси	0,2...0,5

Теорія міцності Мора набула поширення в інженерній практиці, особливо в розрахунках гірничих порід. *До недоліків теорії відносять відсутність теоретичного обґрунтування заміни огинаючої кругів Мора прямою та неврахування середнього головного напруження.*

Якщо теорія міцності Мора об'єднує першу і третю теорії міцності, то узагальнена теорія Писаренка-Лебедева (1967) об'єднала першу та четверту теорії міцності. Згідно з цією теорією міцності, **настання граничного стану зумовлене здатністю матеріалу чинити опір як дотичним, так і нормальним напруженням.** Вплив дотичних напружень у цій теорії визначається граничним значенням питомої потенціальної

енергії деформації (величиною інтенсивності напружень σ_i).

У найпростішому вигляді **критерій граничного стану за теорією Писаренка-Лебедєва** можна записати так:

$$\psi \sigma_i + (1 - \psi) \sigma_1 = \sigma_{zp.p}, \quad (10.17)$$

де $\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3}$; $0 < \psi \leq 1$.

За цією теорією умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{екв.П-Л} = \psi \sigma_i + (1 - \psi) \sigma_1 \leq [\sigma]_p. \quad (10.18)$$

Цю теорію вважають універсальною, бо її можна застосувати як для ідеально пластичних ($\psi = 1$), так і для ідеально крихких ($\psi = 0$) матеріалів, а також для матеріалів із проміжними властивостями. Залежно від значення параметра $\psi = \sigma_{zp.p} / \sigma_{zp.c}$ умова (10.18) може трансформуватися у першу та четверту теорії міцності. Водночас **експериментально вона досить добре підтверджується** для багатьох матеріалів.

Ще однією із поширених узагальнених теорій вважають **теорію міцності Бужинського-Ягна**. У 1929 р. В. Бужинський припустив, що **граничний стан матеріалу настає, коли енергія формозміни, яку записують у вигляді квадратичної функції кульового тензора, досягає критичного значення:**

$$\sigma_i^2 = A + B \sigma_0 + C \sigma_0^2, \quad (10.19)$$

де коефіцієнти A, B, C визначають із дослідів на розтяг, стиск та кручення.

Задовольнивши умову (10.19) заданим граничним станам на розтяг, стиск та кручення та виразивши її через головні напруження, **умова міцності**, відповідно до В. Бужинського, матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \left(\frac{\sigma_p \cdot \sigma_c}{2\tau_k^2} - 1 \right) \cdot (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + \\ & + (\sigma_c - \sigma_p) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_p \sigma_c. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Залежно від форми представлення дотичного граничного напруження $\tau_k = f(\sigma_p, \sigma_c)$ через відповідні граничні напруження σ_p, σ_c , гранична поверхня може перетворюватись на поверхні обертання другого

порядку, які раніше були запропоновані іншими енергетичними теоріями.

Виходячи з дещо інших міркувань, Ю. І. Ягн у 1931 р. запропонував шукати рівняння поверхні, що інтерпретує теорію міцності, у вигляді **симетричного рівняння другого порядку стосовно головних напружень**

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + a(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad (10.21)$$

яке при певних значеннях сталих a , b , c легко зводиться до рівняння (10.20). **Ця теорія дає змогу врахувати як неоднаковий опір матеріалу на розтяг і стиск, так і опір матеріалу зсуву.**

Крім згаданих, існує ще ціла низка інших теорій міцності, що об'єднують класичні та узагальнені теорії міцності як для ізотропних, так і для анізотропних матеріалів. Наприклад, **узагальнений критерій Давиденкова-Фрідмана, який дозволяє досліджувати міцність ізотропних матеріалів залежно від типу напруженого стану, або умова граничного напруженого стану Мізеса-Хілла для анізотропного матеріалу, яку можна вважати умовою текучості.** Але у зв'язку із їх більшою складністю та можливістю для практичного використання їх можна застосовувати для наукових досліджень.

Приклад. Визначити еквівалентні напруження за першою – четвертою теоріями міцності, а також за узагальненими теоріями Мора та Писаренка-Лебедева, коли в околі точки тіла діють головні напруження: $\sigma_1 = 16$ МПа; $\sigma_2 = -12$ МПа; $\sigma_3 = -72$ МПа.

Матеріал тіла – сірий чавун, для якого $[\sigma]_p = 26$ МПа, $[\sigma]_c = 140$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$; $\psi = 0,2$.

Розв'язання. Згідно з першою теорією міцності – теорією найбільших нормальних напружень, маємо:

$$\sigma_{екв.I}^p = \sigma_I = 16 \text{ МПа}; \quad \sigma_{екв.I}^c = |\sigma_3| = 72 \text{ МПа}.$$

За теорією найбільших лінійних деформацій – другою теорією міцності:

$$\sigma_{екв.II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 16 - 0,25(-12 - 72) = 37 \text{ МПа}.$$

Відповідно до третьої теорії міцності – теорії найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{екв.III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 16 - (-72) = 88 \text{ МПа}.$$

Еквівалентні напруження за енергетичною теорією – четвертою теорією міцності визначають за формулою:

$$\begin{aligned}\sigma_{екв.IV} = \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(16+12)^2 + (-12+72)^2 + (-72-16)^2} = 77,9 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Відповідно до теорії Мора:

$$\sigma_{екв.M} = \sigma_1 - \psi\sigma_3,$$

$$\sigma_{екв.M} = 16 - 0,2 \cdot (-72) = 30,4 \text{ МПа.}$$

За теорією Писаренка-Лебедева:

$$\sigma_{екв.П-Л} = \psi \sigma_i + (1 - \psi)\sigma_1 =$$

$$= 0,2 \cdot 77,9 + (1 - 0,2)16 = 15,6 + 12,8 = 28,4 \text{ МПа.}$$

Проаналізувавши величини еквівалентних напружень за різними теоріями міцності, помічаємо їхні істотні розходження:

$$\text{від } \sigma_{екв.I}^c = 72 \text{ МПа до } \sigma_{екв.П-Л} = 28,4 \text{ МПа.}$$

Враховуючи, що сірий чавун – крихкий матеріал, **виключимо застосування третьої та четвертої теорії міцності, що придатні для пластичних матеріалів, а також другої теорії, що не рекомендується до застосування як малоїмовірної.**

Застосуємо першу теорію:

$$\sigma_{екв.I}^p = 16 \text{ МПа} < [\sigma_P] = 26 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв.I}^c = 72 \text{ МПа} < [\sigma_C] = 140 \text{ МПа.}$$

За узагальненими теоріями:

$$\sigma_{екв.M} = 30,4 \text{ МПа} > [\sigma_P] = 26 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв.П-Л} = 28,4 \text{ МПа} > [\sigma_C] = 26 \text{ МПа.}$$

Застосування першої теорії призводить до неправильного висновку про забезпечення міцності

$$\left(\sigma_{екв.I}^p, \sigma_{екв.I}^c < [\sigma_P], [\sigma_C] \right),$$

оскільки ця теорія не враховує різницю в опорі матеріалу при розтягу та стиску. Цю різницю враховують узагальнені теорії, які підтверджують, що міцність матеріалу в околі розглядуваної точки тіла не забезпечена.

Тема 11

РОЗРАХУНКИ МІЦНОСТІ ТА ДОВГОВІЧНОСТІ ПРИ ДІЇ ЗМІННИХ НАПРУЖЕНЬ

- 11.1. Втомна міцність матеріалів. Крива втомленості і границя витривалості матеріалу. Зведені амплітуди циклу**
- 11.2. Розрахунки на втомну міцність та довговічність**

11.1. Втомна міцність матеріалів. Крива втомленості і границя витривалості матеріалу. Зведені амплітуди циклу

Багато деталей машин під час роботи піддаються дії змінних, у тому числі циклічно змінних за часом напружень.

Наприклад, вал пасової передачі зі шківом, на який діє постійне зусилля натягу паса, піддається дії циклічно змінних напружень з амплітудою σ_α і періодом T (рис. 11.1а). Відбувається це в результаті того, що при обертанні вала його частки опиняються поперемінно то в розтягнутій, то в стиснутій зонах.

Сукупність усіх значень напружень за один період називають циклом напружень.

Закон зміни напружень в балці наведено на рис. 11.1а, де показані характеристики циклу – *максимальні* σ_{\max} , *мінімальні* σ_{\min} , *середні* σ_m та *амплітудні* σ_α *значення напружень*. Цикл напружень, у якого $\sigma_m \neq 0$; $\sigma_\alpha \neq 0$ називають *асиметричним*. Подвійну величину амплітуди коливань напружень називають *розмахом циклу*.

Наведений на рис. 11.1б цикл має назву *симетричного*, на рис. 11.1в – пульсуючого.

Змінні напруження виникають також тоді, коли на стержень діють змінні за часом сили. Так, балка на двох опорах, на якій встановлено електричний двигун, що має незбалансований ротор, піддається дії циклічно змінних напружень через те, що виникає змінна за величиною вертикальна складова відцентрової сили. Постійна сила ваги двигуна спричинює в балці постійне, не змінне за часом напруження σ_m , від змінної сили виникають циклічно змінні напруження з амплітудою σ_α .

Якщо середні σ_m та амплітудні σ_α значення напружень циклу не змінюють своєї величини за часом (рис. 11.1а,б,в), то такий усталений режим змінних напружень називають **стаціонарним навантаженням**.

У той же час багато елементів машин піддаються дії випадкових змінних напружень. Такий більш загальний випадок неусталеного режиму змінних напружень, коли середні й амплітудні значення напружень змінюються за часом (наприклад, виділені цикли на рис. 11.1г), називають **нестационарним навантаженням**.

Опір матеріалів дії змінних напружень суттєво відрізняється від опору матеріалів дії статичних навантажень. Досвід показує, що при дії змінних напружень після деякої кількості їх циклів може настати руйнування деталі, в той же час при такому ж за величиною, як найбільше напруження циклу σ_{\max} , але незмінному напруженні, руйнування не настає.

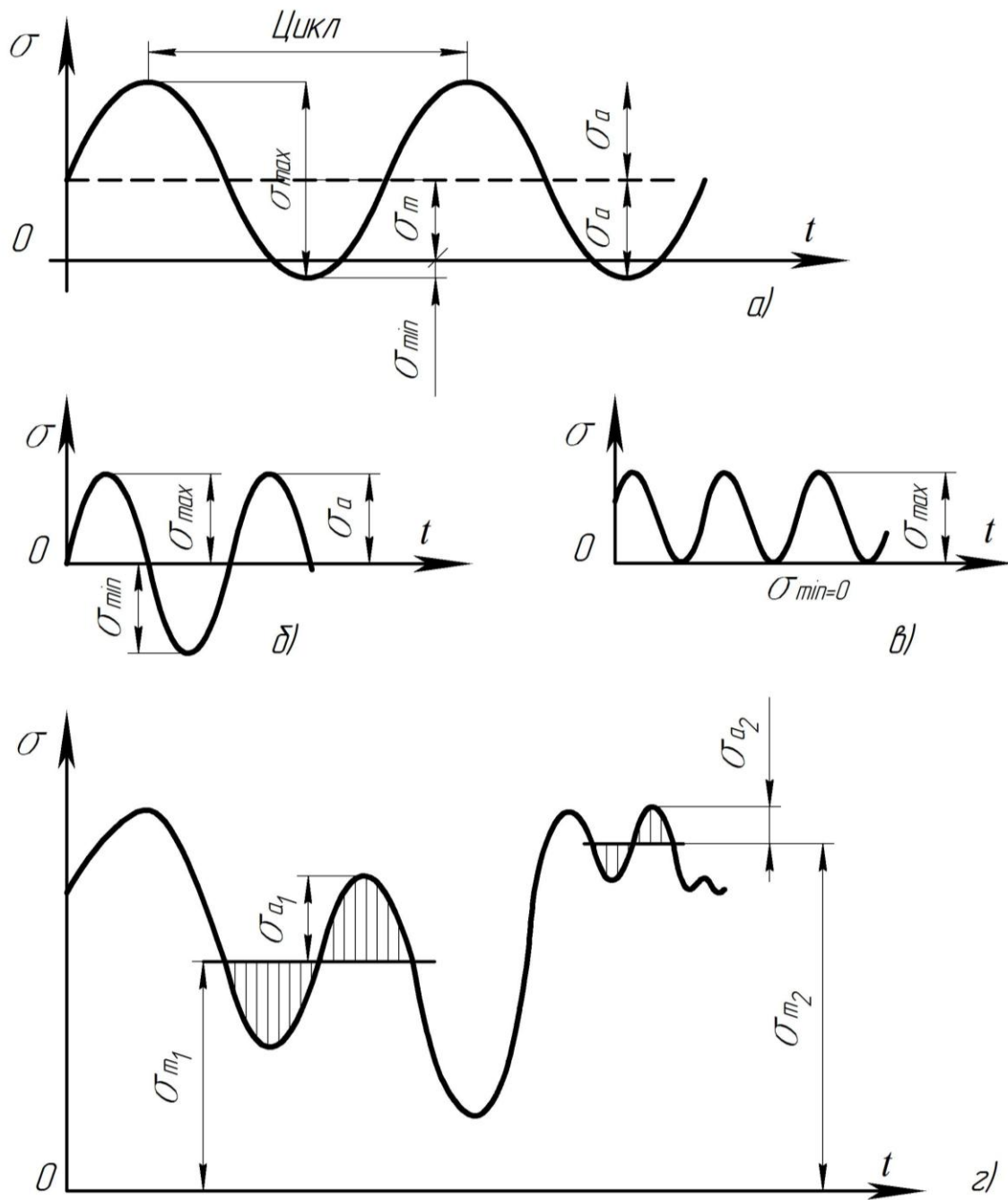


Рисунок 11.1

Кількість циклів до моменту руйнування деталі, що працює, наприклад, в умовах симетричного циклу навантаження, залежить від амплітуд напружень σ_a і змінюється в досить широких межах; при цьому **чим більша амплітуда напружень, тим потрібна менша кількість циклів до руйнування**. Наприклад, циклічні напруження, які виникають при багаторазових, досить великих перегибах дроту, призводять до його руйнування через 5...10 циклів. У той же час при менших напруженнях він витримує тисячі й мільйони циклів, а при досить малих – здатний чинити опір без руйнування дії необмеженої кількості циклів напружень.

Руйнування матеріалів під дією змінних напружень називають руйнуванням від втомленості, а явище – втомленістю матеріалів. Здатність матеріалів чинити опір руйнуванню при дії змінних напружень називають витривалістю, або втомною міцністю.

Характерною ознакою є те, що *руйнування від втомленості може виникнути при напруженнях, нижчих від границі текучості*; при цьому не виникає помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли матеріал є високо пластичним. Установлено, що *початок руйнування від втомленості має чисто місцевий характер. У зоні підвищених змінних напружень, що зумовлені конструктивними, технологічними та іншими чинниками, може утворюватися мікротріщина, яка при дії багаторазових змін напружень збільшується і поширюється в глибину тіла.* У результаті переріз деталі послаблюється, і на останньому етапі виникає раптове руйнування.

Процес утворення тріщин від втомленості при дії змінних напружень пов'язаний з накопиченням пошкоджень, зумовлених пластичною деформацією матеріалу. Тому вважають, що міцність при втомленості визначається тільки найбільшими σ_{\max} та найменшими σ_{\min} напруженнями циклу (або однозначно пов'язаними з ними σ_m та σ_α) і не залежить від закону зміни напружень у середині циклу (від форми циклу).

Для оцінки характеристик матеріалу при втомленості *проводять спеціальні випробування, найбільш розповсюдженими з яких є випробування в умовах симетричного циклу навантаження при чистому згині зразка, що обертається.* Шляхом багаторазових випробувань досить великої кількості зразків *можна визначити кількість циклів N , що витримує кожний зразок до руйнування залежно від найбільших напружень σ_{\max} циклу.*

Після обробки експериментальних даних отримують залежність, графік якої має вигляд гіперболи (рис. 11.2). Цей графік має назву **кривої втомленості (витривалості) матеріалу**. Використовують його для визначення границі витривалості.

Найбільше значення максимального напруження циклу, при якому матеріал не руйнується практично при будь-якій кількості циклів навантаження, називають **границею витривалості матеріалу** і позначають як σ_{-1} . Величину σ_{-1} визначають при випробуваннях зразків на згин в умовах симетричного циклу навантаження.

Практично *границю витривалості визначають як найбільше напруження циклу, при якому зразок не руйнується протягом такої кількості циклів, що дорівнює базі випробувань N_0 .*

Для чорних металів за базу випробувань беруть 10 млн. циклів, для кольорових металів – у 5...10 разів більше. Вважають, що після кількості циклів $N = N_0$ крива втомленості чорних металів переходить до прямої, паралельної осі абсцис.

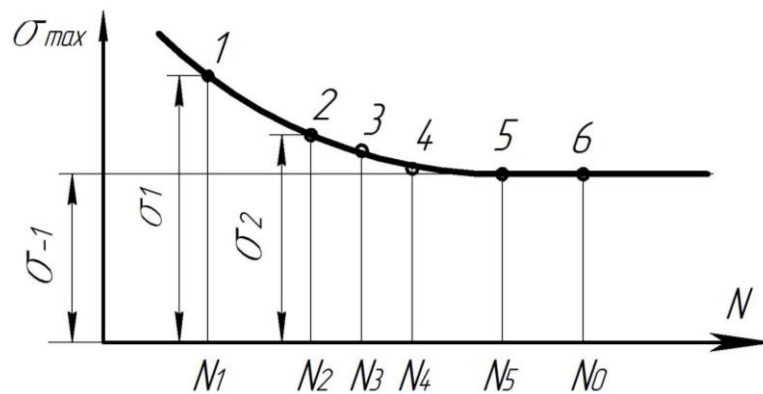


Рисунок 11.2

Для випробувань на втомленість характерним є те, що результати мають великий розкид, і для вірогідного визначення границі витривалості потрібні випробування великої кількості зразків, що разом із подальшою обробкою результатів є досить трудомісткою роботою. Тому **знайдено певні співвідношення між границями витривалості матеріалів та їх границею міцності:**

- для сталей загального призначення $\sigma_{-1} \approx (0,4...0,5) \sigma_{\sigma}$;
- для високоміцних сталей $\sigma_{-1} \approx 400 + \frac{1}{6} \sigma_{\sigma}$;
- для кольорових металів $\sigma_{-1} \approx (0,25...0,5) \sigma_{\sigma}$.

Подібно до випробування на чистий згин можна провадити випробування на кручення та розтяг (стиск). Згідно з численними експериментальними даними для деяких матеріалів можна помітити приблизні співвідношення між границями витривалості при згині σ_{-1} , крученні τ_{-1} та розтягу σ_{-1}^0 :

- для сталі $\sigma_{-1}^0 = 0,7 \sigma_{-1}$;
- для чавуну $\sigma_{-1}^0 = 0,65 \sigma_{-1}$;
- для сталей та легких сплавів $\tau_{-1} = 0,55 \sigma_{-1}$;
- для чавуну $\tau_{-1} = 0,8 \sigma_{-1}$.

Границі витривалості деталей відрізняються від границі витривалості зразка; на них впливає ціла низка факторів, таких як форма зразка, стан його поверхні, температура випробувань, попередня внутрішня напруженість матеріалу, режим силового впливу, зокрема асиметрія циклу тощо.

Найважливішим фактором, який слід враховувати при розрахунках на міцність при втомленості, є концентрація напружень. Концентрація напружень – це явище місцевого збільшення напружень порівняно з номінальними поблизу різких змін форми і розмірів пружного тіла, а також в зоні контакту деталей. Концентраторами напружень на практиці є шпонкові канавки, отвори в деталі, нарізки на поверхні, місця різкої зміни розмірів перерізу, тощо.

Концентрація напружень знижує втомну міцність деталі, і щоб оцінити вплив цього фактора на положення кривої втомленості, вводять поняття ефективного коефіцієнта концентрації напружень K_σ як відношення границі витривалості σ_{-1} , гладенького зразка без концентратора напружень до границі витривалості σ_{-1K} такого ж зразка, який має певний концентратор напружень: $K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}$ для

нормальних і $K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}}$ відповідно для дотичних напружень. Як правило,

коефіцієнт концентрації напружень є величина, більша за одиницю.

При розрахунках коефіцієнт концентрації вводять як множник до амплітуд діючих напружень. Так, якщо розрахункові номінальні амплітуди напружень складають σ_α , то з урахуванням концентрації вони збільшуються і дорівнюють $\sigma_\alpha K_\sigma$.

При дії змінних напружень руйнування починається, як правило, з виникнення місцевої тріщини на поверхні деталі, тому погана якість поверхні призводить до зниження витривалості деталі, і навпаки, в разі чистої і тонко обробленої поверхні границя витривалості зростає. Вплив стану поверхні на витривалість оцінюють коефіцієнтом якості поверхні β , що є відношенням границі витривалості σ_{-1n} зразка, який має певну обробку поверхні, до границі витривалості σ_{-1} шліфованого

зразка: $\beta = \frac{\sigma_{-1n}}{\sigma_{-1}}$.

Коефіцієнт якості поверхні β звичайно менший від одиниці і враховують його при розрахунках коректуванням величини амплітуди. Так, якщо номінальна амплітуда циклу дорівнює σ_α , то з урахуванням поправки на стан поверхні вона приймає значення $\frac{\sigma_\alpha}{\beta}$, а з урахуванням

ще й концентрації напружень – $\frac{\sigma_\alpha \cdot K_\sigma}{\beta}$.

При оцінюванні втомної міцності слід враховувати також абсолютні розміри перерізів деталей.

Досліди із зразками різних розмірів поперечних перерізів показують, що із збільшенням розмірів перерізів границя витривалості зменшується. Відношення границь витривалості σ_{-1d} деталі розміром d і границі витривалості σ_{-1} лабораторного зразка стандартного розміру ($d = 8 \dots 12$ мм) називають **коефіцієнтом масштабного фактора** (коефіцієнтом масштабу), або **коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перерізу**: $\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}$. Звичайно $\varepsilon_\sigma < 1$.

При розрахунках на витривалість коефіцієнт ε_σ вносять до амплітуди номінальних напружень. Замість номінального значення амплітуди циклу σ_α беруть значення $\frac{\sigma_\alpha}{\varepsilon_\sigma}$, а з урахуванням концентрації напружень та стану поверхні – $\frac{\sigma_\alpha \cdot K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta}$.

Значення коефіцієнтів K_σ, β та ε_σ отриманих на підставі результатів лабораторних випробувань залежно від рівня перелічених факторів, наведено в довідниках.

Суттєво менший вплив, ніж амплітуда σ_α на втомну міцність та границю витривалості деталі справляє середнє напруження циклу σ_m (рис. 11.1б). В розрахунках цей вплив ураховують додаванням до амплітуди частки середнього напруження $\sigma_m = \psi_\sigma \cdot \sigma_\tau$.

$$\sigma_{\alpha з в.} = \sigma_\alpha \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta} + \psi_\sigma \cdot \sigma_m, \quad (11.1)$$

де ψ_σ – коефіцієнт чутливості матеріалу до асиметрії циклу, $\psi_\sigma \leq 1$.

Отримані таким чином розрахункові напруження $\sigma_{\alpha з в.}$ називають **зведеними амплітудними напруженнями**, а цикл таких напружень – **зведеним до симетричного**.

Зведені амплітуди напружень враховують в подальших розрахунках на втомну міцність і довговічність деталей машин та елементів конструкцій.

11.2. Розрахунки на втомну міцність та довговічність

*Основний принцип розрахунку на втомну міцність припускає, що найбільші розрахункові амплітуди напружень в жодній точці елемента конструкції не повинні перевищувати небезпечні для заданого матеріалу значення (границі витривалості). У цьому разі елемент має необмежений ресурс, тобто забезпечується його працездатність протягом необмеженого часу роботи. У той же час ряд деталей машин не потребують такої жорсткої регламентації у відношенні ресурсу – з економічної або інших точок зору їх недоцільно експлуатувати довше визначеного часу. При цьому виникає **проблема розрахунку на обмежений ресурс**, забезпечення якого може бути досягнуто при дії більших напружень в деталі, тобто при зменшеній вазі, а отже і вартості.*

При цьому умовно вважають, що ділянка обмеженого ресурсу вміщує кількість циклів навантаження деталі від нуля до бази випробувань N_0 (див. рис. 11.2).

Розрахунки на втомну міцність при стаціонарному навантаженні ґрунтуються на порівнянні розрахункових зведених амплітуд напружень $\sigma_{a.зв}$ (11.1) та границі витривалості матеріалу σ_{-1} (див. рис. 11.2); вважають, що деталь має необмежений ресурс у тому разі, коли виконується умова:

$$\sigma_{a.зв} < \sigma_{-1}. \quad (11.2)$$

З цього випливає, що коефіцієнт запасу n_σ має бути більшим за одиницю:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_\alpha \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \beta} + \varphi_\sigma \cdot \sigma_m} > 1. \quad (11.3)$$

Наведену залежність застосовують у розрахунках втомної міцності при дії тільки нормальних напружень – для одновісного (лінійного) напруженого стану.

Подібну залежність для коефіцієнта запасу маємо у разі дії тільки дотичних напружень:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_\alpha \frac{K}{\varepsilon_\tau \beta} + \varphi_\tau \cdot \tau_m}. \quad (11.4)$$

У разі одночасної дії нормальних і дотичних напружень, що відповідає двовісному, або плоскому напруженому стану, коефіцієнт запасу визначають за формулою Гафа і Полларда:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (11.5)$$

Розрахунки довговічності (обмеженого ресурсу) при стаціонарному навантаженні проводять, якщо зведені напруження $\sigma_{a.зв} > \sigma_{-1}$. Приймають також, що крива втоми (рис. 11.3) може бути описана степеневим рівнянням

$$\sigma^m \cdot N = C = \sigma_{-1}^m \cdot N_0, \quad (11.6)$$

де m та C – параметри кривої.

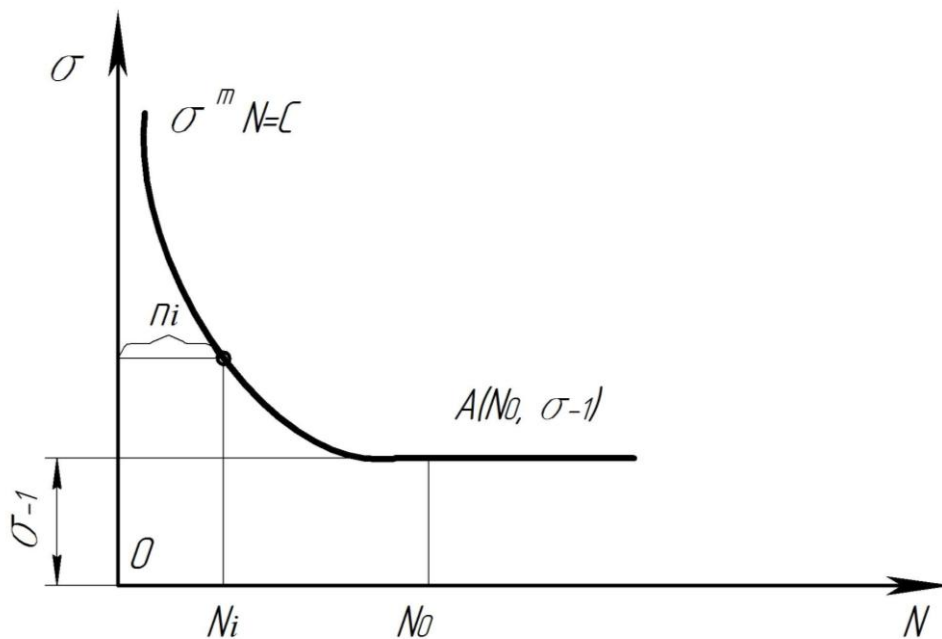


Рисунок 11.3

Якщо є графік кривої втоми (див. рис. 11.3), то ресурс деталі можна визначити графічно. Для цього потрібно, наприклад, на рівні $\sigma_{\alpha i} = (\sigma_{a.зв})_i$ провести пряму, паралельну осі абсцис, до перетину з кривою втомленості, і, опустивши перпендикуляр до перетину з віссю N , визначити кількість циклів N_i до руйнування деталі, тобто її обмежений ресурс.

При аналітичному підході обмежений ресурс N_i визначають залежністю:

$$N_i = \frac{\sigma_{-1}^m \cdot N_0}{\sigma_{\alpha i}^m}. \quad (11.7)$$

Розрахунок на довговічність при нестационарному навантаженні. Циклічний процес зміни напружень у часі з постійними значеннями середнього σ_m та амплітуди σ_a в деталях машин трапляється надто рідко. **Реальні процеси навантаження елементів машин часто – це випадкові процеси** (рис. 11.1в), **що характеризуються змінними середніми та амплітудами циклів напружень (нестационарне навантаження).**

Щоб провадити розрахунки на витривалість, випадкові процеси навантаження, які мають місце в умовах експлуатації, замінюють певними схематизованими процесами.

Відома велика кількість методів схематизації реальних процесів навантаження елементів машин. Найбільшого поширення набув **метод повних циклів**, який дає найкращу відповідність відносно дії, що пошкоджує, між схематизованим і реальним випадковими процесами навантаження.

При розрахунках на обмежену довговічність цикли з малими зведеними амплітудами напружень $\sigma_{\alpha i} < 0,7\sigma_{-1}$, не враховуються. Тому що їхній вплив на ресурс деталі, як показують досліди, незначний.

Вводять поняття **міри пошкодження** (рис. 11.3)

$$D_i = \frac{n_i}{N_i}. \quad (11.8)$$

де n_i – кількість циклів діючих напружень з i -ою зведеною пошкоджуючою амплітудою $\sigma_{\alpha i}$;

N_i – кількість циклів до руйнування при дії i -их зведених амплітуд напружень, (визначають за формулою 11.7).

Тоді на підставі гіпотези лінійного підсумовування пошкоджень з урахуванням того, що $0 \leq D_i \leq 1$; а $\sum D_i = 1$ відповідає руйнуванню деталі, середній циклічний ресурс N_c визначають за залежністю

$$N_c = \frac{\sigma_{-1}^m \cdot N_0}{\sum_{i=1}^k \sigma_{\alpha i}^m \cdot \alpha_i}, \quad (11.9)$$

де α_i – відносна кількість (частка) циклів з амплітудою $\sigma_{\alpha i}$ у процесі навантаження, $\alpha_i = n_i / N_c$.

Бібліографічний покажчик

Б

Бельтрамі Будженіо – (італ. Eugenio Beltrami, 16 листопада 1835 р., м. Кремона – 18 лютого 1900 р., м. Рим) – італійський математик, відомий своїми роботами з диференціальної геометрії і математичної фізики. Відіграв значну роль у визнанні неевклідової геометрії.

Науковий внесок

Показав, що геометрія Лобачевського на площині локально реалізується на деякій поверхні в тривимірному просторі, названій псевдосферою або поверхнею Бельтрамі.

Першим побудував проєктивну модель і конформно-евклідову модель геометрії Лобачевського. Проєктивна модель площини Лобачевського була побудована ним у «Дослідах інтерпретації неевклідової геометрії», опублікованої в 1868 р. Проєктивна і конформно-евклідова модель простору Лобачевського довільної розмірності була побудована ним в «Основи теорії просторів постійної кривизни», 1868–1869 рр.

Показав, що будь-яку лінійну поверхню можна єдиним чином зігнути так, що довільна лінія на ній стане асимптотичною (це твердження відоме як теорема Бельтрамі).

Г

Гальоркін Борис Григорович – (20 лютого (4 березня) 1871 р., м. Полоцьк – 12 липень 1945 р., м. Ленінград) – російський і радянський механік і математик (найбільше відомий своїми результатами в області теорії пружності); академік АН СРСР (1935 р.; член-кореспондент з 1928 р.).

Борис Гальоркін розробив методи розв'язання диференціальних рівнянь теорії пружності: його ім'ям названо метод кінцевих елементів математичного аналізу, що застосовується для чисельного і аналітичного рішення диференціальних рівнянь у часткових похідних. Один з творців теорії згину пластинок.

Методи Гальоркіна включають:

- власне метод Гальоркіна, або метод Бубнова-Гальоркіна,
- метод Петрова-Гальоркіна.

Губер Максиміліан Титус – (4 січня 1872 р., с. Кросценко над Дунайцем, Новотарський повіт – 9 грудня 1950 р., м. Краків, Польща) – визначний польський вчений у галузі теоретичної та прикладної механіки, фундатор польської школи механіки.

Життєвий шлях та науково-викладацька діяльність

1894 р. після завершення навчання М.Т. Губер розпочинає свою викладацьку діяльність на посаді асистента кафедри будівництва шляхів та залізниць Львівської політехнічної школи, яка була перервана річною військовою службою. 1896 року отримує стипендію на двосеместрове стажування в Берлінському університеті, де поглиблює свої знання з математики. Після завершення стажування проходить ще річну інженерну практику на посаді інженера-асистента в Крайовому бюро меліорації і в 1898 році повертається на посаду асистента кафедри математики Львівської політехнічної школи. Та вже через рік переїжджає до Кракова, де у Вищій промисловій школі викладає теоретичну і будівельну механіку.

1904 року за роботу «Внесок до теорії стискання пружних тіл», опубліковану в *Annalen der Physik*, отримує у Львівській політехнічній школі ступінь доктора технічних наук. У цьому ж році публікує одну з своїх найвагоміших праць, у якій формулює гіпотезу, за якою критерієм переходу матеріалу в граничний стан можна вважати питому

потенціальну енергію зміни форми деформованого тіла. На основі цієї гіпотези пізніше у працях Річарда фон Мізеса (1913 р.) і Гайнріха Генкі (1924 р.) був сформульований критерій питомої потенціальної енергії формозміни (четверта теорія міцності): граничний стан – текучість матеріалу наступає незалежно від виду напруженого стану, коли потенціальна енергія формозміни деформованого тіла досягає своєї граничної величини.

М. Губер звертається до С. Тимошенка з пропозицією перекласти польською мовою його підручник «Курс опору матеріалів». Отримавши згоду автора, здійснює перший переклад цього унікального підручника, який пізніше був перекладений багатьма іншими мовами і неодноразово перевидавався протягом півстоліття.

Науковий доробок

Наукові здобутки професора М.Т. Губера загальноновизнані у світовій механіці. Він отримав фундаментальні результати у галузі теорії пружності, теорії пластичності, впровадив в механіку передові концепції міцності металів, сформулював енергетичний критерій переходу матеріалу в граничний стан, започаткував і розвинув теорію ортотропних плит. У своїх роботах він торкнувся практично всіх галузей механіки деформівного твердого тіла, багатьох інженерних аспектів механіки у сфері будівництва залізниць (досліджував небезпеку деформації залізничної колії внаслідок зміни температури), мостів, конструювання машин, літаків, військової техніки (опрацював теоретичний метод визначення деформацій жерла гармати під час вистрілу).

Гук Роберт – (англ. *Robert Hooke*; 18 липня 1635 р., острів Вайт – 3 березня 1703 р., Лондон) – англійський натураліст, учений-енциклопедист, який відіграв важливу роль у науковій революції XVII століття.

Роберт Гук став відомим завдяки винайденому ним закону пружності (закон Гука). Також його часто згадують як «батька мікроскопії» – саме Гук увів термін клітина для визначення найменшої частини живого. Гук разом із Робертом Бойлем створив вакуумний насос, що використовувався в експериментах Бойля з газами. Він також був відомим архітектором свого часу та головним землеміром Лондона після Великої пожежі. Він збудував один із перших григоріанських телескопів, спостерігав за обертаннями Марса та Юпітера і, спираючись на свої дослідження викопних решток, був прихильником теорії біологічної еволюції. На основі досліджень заломлення світла, розробив хвильову теорію світла. Він був першим, хто припустив, що тіла розширюються при нагріванні і що повітря складається із дрібних частинок, які розділені порівняно великими відстанями.

Відкриття:

- відкриття пропорційності між деформаціями і напруженнями, що їх спричиняють (закон Гука). В наш час цей закон Гука в узагальненому вигляді є основою математичної теорії пружності.

- правильне формулювання закону всесвітнього тяжіння (пріоритет Гука оспорювався Ньютоном, але, мабуть, не в частині формулювання; крім того, Ньютон стверджував про незалежне і раніше відкриття цієї формули, яку, проте, до відкриття Гуком нікому не повідомляв);

- відкриття кольорів тонких пластинок (тобто інтерференції світла);

- ідея про хвилеподібне розповсюдження світла (більш-менш одночасно з Гюйгенсом), експериментальне обґрунтування її відкритою Гуком інтерференцією світла, хвильова теорія кольору;

- гіпотеза про поперечний характер світлових хвиль;

- відкриття в акустиці, наприклад, демонстрація того, що висота звуку визначається частотою коливань;

- теоретичне положення про сутність тепла як рухів частинок тіла;
- відкриття постійності температури танення льоду і кипіння води;
- закон Бойля (особистий внесок Гука, Бойля і його учня Річарда Таунлі (Richard Townley) не з'ясовані);
- жива клітина (за допомогою вдосконаленого ним мікроскопа; Гуку ж належить сам термін «клітина» – англ. *cell*);
- безпосередній доказ обертання Землі навколо Сонця.

Винаходи

Спіральна пружина для регулювання ходу годинника; спиртовий рівень; удосконалення в конструкції телескопів; удосконалення в системі оптичного телеграфу.

Різні механізми, зокрема для побудови різних геометричних кривих (еліпсів, парабол). Запропонував прототип теплових машин. Термометр-мініма, вдосконалений барометр, гігрометр, анеометр, ареометр для визначення міри прісності річкової води; гвинтові зубчасті колеса (тепер Вайтові колеса). Встановив постійність температур замерзання і кипіння води, і запропонував ці точки як реперні для шкали термометра.

Інші досягнення

Гук був головним помічником Крістофера Рена при відновленні Лондона після великої пожежі 1666 р.; як архітектор побудував багато споруд, зокрема, Грінвіцьку обсерваторію, церкву Вілленської парафії в Мілтон Кисні, Лондонського Собору св. Павла, (купол якого побудований з використанням методу, придуманого Гуком). Гук вніс значний вклад у містобудування, запропонувавши нову схему планування вулиць при відновленні Лондона.

Е

Ейлер Леонард – (нім. Leonhard Euler МФА; нар. 15 квітня 1707 р., м. Базель, Швейцарія – пом. 7 (18) вересня 1783 р., м. Санкт-Петербург, Росія) – швейцарський математик та фізик, який провів більшу частину свого життя в Росії та Німеччині. Традиційне написання «Ейлер» походить від рос. Леонард Эйлер.

Ейлер здійснив важливі відкриття в таких різних галузях математики, як математичний аналіз та теорія графів. Він також ввів велику частину сучасної математичної термінології і позначень, зокрема у математичному аналізі, як, наприклад, поняття математичної функції. Ейлер відомий також завдяки своїми роботами в механіці, динаміці рідин, оптиці та астрономії, інших прикладних науках.

Ейлера вважають найвидатнішим математиком 18-го століття, а, можливо, навіть усіх часів. Він також є одним із найплідніших – збірка всіх його творів зайняла б 60...80 томів. Вплив Ейлера на математику описує висловлювання «Читайте Ейлера, читайте Ейлера, він є метром усіх нас», яке приписують Лапласові (фр. Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous).

Ейлер увічнений в шостій серії швейцарських 10 франків і на численних швейцарських, німецьких та російських поштових марках. На його честь названо астероїд 2002 Ейлер. Він також відзначений лютеранською церквою у церковному календарі (24 травня) – Ейлер був побожним християнином, вірив в біблійну непогрішність, рішуче виступав проти видатних атеїстів свого часу.

Внесок у науку

Ейлер є автором 866 наукових публікацій, зокрема у галузях математичного аналізу, диференціальної геометрії, теорії чисел, теорії графів, наближених обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики, кораблебудуванні, теорії музики, що мали значний вплив на розвиток науки. Саме він ввів більшість математичних понять та символів у сучасну математику.

Математичні позначення

Ейлер ввів та спопуляризував у своїх популярних у той час підручниках декілька позначень. Зокрема, він представив концепцію функції і вперше написав $f(x)$, щоб позначити функцію f застосовану до аргументу x . Він також ввів сучасні позначення тригонометричних функцій, букву e як основу натурального логарифму (зараз відома також як число Ейлера), грецьку літеру Σ для суми і букву i , щоб позначати уявну одиницю. Використання грецької літери π , щоб позначити відношення довжини кола до його діаметру було також спопуляризоване Ейлером, хоча не було ним придумане.

Аналіз

У 18-му столітті відбувався значний прогрес аналізу нескінченно малих. Завдяки впливу Бернуллі (друзів сім'ї Ейлерів), дослідження у цьому напрямі стали основними в роботах Ейлера. Хоча деякі з доказів Ейлера не є прийнятними за сучасними стандартами математичної строгості, його ідеї призвели до значного прогресу.

Ейлер добре відомий в аналізі з частого використання і розвитку степеневих рядів, які виражають функцію у вигляді суми нескінченної кількості степеневих функцій. Саме Ейлер прямо довів розклад у ряд експоненти і арктангенса (непряме доведення через обернені степеневі ряди було дане Ньютоном і Лейбніцом між 1670 і 1680 роками). Використання ним степеневих рядів дозволило розв'язати в 1735 році знамениту Базельську проблему (строгіше доведення було ним здійснено в 1741 році).

Ейлер започаткував використання в аналітичних доведеннях експоненти і логарифмів. Йому вдалося розкласти в степеневий ряд логарифмічну функцію i , за допомогою цього розкладу, визначити логарифми для від'ємних і комплексних чисел. Він також розширив множину визначення експоненційної функції на комплексні числа, і виявив зв'язок експоненти з тригонометричними функціями.

Ейлер розробив теорію спеціальних трансцендентних функцій, увівши гамма-функцію й представив нові методи розв'язку рівняння четвертого степеня. Він також знайшов спосіб обчислення інтегралів з комплексними межами, що випереджувало розвиток сучасного комплексного аналізу, і започаткував варіаційне числення, в тому числі отримав його найвідоміший результат, рівняння Ейлера-Лагранжа.

Ейлер також був піонером у використанні аналітичних методів розв'язування задач теорії чисел. Таким чином, він об'єднав дві розрізнені області математики і впровадив нову галузь досліджень, аналітичну теорію чисел. Початком було створенням Ейлером теорії гіпергеометричних рядів, Q -Series, гіперболічних тригонометричних функцій та аналітичної теорії узагальнених дробів. Наприклад, він довів нескінченність простих чисел за допомогою розбіжності гармонічного ряду, використовував методи аналізу, щоб довідатися про розподіл простих чисел. Ейлерові роботи в цій галузі призвели до появи теореми про розподіл простих чисел.

Теорія чисел

Зацікавлення Ейлера теорією чисел можна пояснити впливом Християна Гольдбаха, друга з Санкт-Петербурзької Академії. Багато ранніх робіт Ейлера з теорії чисел базувалось на роботах П'єра Ферма. Ейлер опрацював деякі ідеї Ферма, і спростував деякі з його припущень. Ейлер пов'язав характер розподілу простих чисел з ідеями з аналізу. Він довів, що сума обернених до простих чисел розходиться. У цей спосіб він виявив зв'язок між дзета-функцією Рімана і простими числами, результат відомий як «тотожність Ейлера у теорії чисел».

Ейлер довів тотожності Ньютона, малу теорему Ферма, теорему Ферма про суми двох квадратів, зробив значний внесок в теорему Лагранжа про чотири квадрати. Він також винайшов функцію Ейлера $\phi(N)$, яка дорівнює кількості додатних чисел, що не перевищують натурального N і які є взаємно прості з N . Використовуючи властивості цієї функції, він узагальнив малу теорему Ферма до того, що зараз називають теоремою

Ейлера. Він зробив значний внесок у теорію досконалих чисел, якою математики були зачаровані з часів Евкліда. Ейлер також досяг прогресу в напрямку теореми про розподіл простих чисел і висунув гіпотезу квадратичної взаємності. Ці два поняття розглядають як основні теореми теорії чисел, а його ідеї підготували ґрунт для робіт Гауса.

Прикладна математика

Серед найбільших успіхів Ейлера були аналітичні розв'язки практичних задач, опис багаточисленних застосувань чисел Бернуллі, рядів Фур'є, діаграм Сен-Венна (відомі також як круги Ейлера), чисел Ейлера, констант e і π , ланцюгових дробів та інтегралів.

Він поєднав диференціальне числення Лейбніца з Ньютонівським методом флюксій, і створив інструменти, які зробили застосування аналізу до фізичних проблем простішим. Він добився великих успіхів у вдосконаленні чисельного наближення інтегралів, винайшов те, що в наш час вдоме як метод та формула Ейлера-Маклорена. Він також сприяв використанню диференціальних рівнянь, зокрема, вводючи сталу Ейлера-Маскероні.

Одним з найбільш незвичних інтересів Ейлера було застосування математичних ідей в музиці. У 1739 році він написав *Tentamen novae theoriae musicae*, сподіваючись врешті-решт долучити музичну теорію до математики. Ця частина його роботи, проте, не набула широкої уваги і була одного разу названа «занадто математичною для музикантів і дуже музичною для математиків».

Фізика

Леонард Ейлер зробив значний внесок у розвиток механіки, зокрема у розв'язок задачі про обертання абсолютно твердого тіла. Підхід Ейлера пов'язаний із поняттями Ейлерових кутів та кінематичних рівнянь Ейлера. В 1757 р. Ейлер опублікував мемуар «*Principes généraux du mouvement des fluides*» (Загальні принципи руху флюїдів), в якому записав рівняння руху нестисливої ідеальної рідини, що отримали назву рівнянь Ейлера. Результатом праці над задачею про деформацію бруса при навантаженні стали рівняння Ейлера-Бернуллі, які згодом знайшли застосування в інженерній науці, зокрема при проектуванні мостів.

Ейлер працював над загальними проблемами механіки, розвиваючи принцип Мопертюї. Основні рівняння лагранжевої механіки часто називають рівняннями Ейлера-Лагранжа.

Ейлер застосовував розроблені математичні методи для розв'язку проблем небесної механіки. Його праці в цій області отримали кілька нагород Паризької академії наук. Серед його досягнень визначення з великою точністю орбіт комет та інших небесних тіл, пояснення природи комет, розрахунок паралаксу Сонця. Розрахунки Ейлера стали значним внеском у розробку точних таблиць широт.

Важливе значення для свого часу мав внесок Ейлера в оптику. Він заперечував панівну тоді корпускулярну теорію світла Ньютона. Праці Ейлера впродовж 1740-х років допомогли утвердитися хвильовій теорії світла Християна Гюйгенса.

Ж

Жермен Софі – (фр. Marie-Sophie Germain, 1 квітня 1776 р. – 27 червень 1831 р.) – французький математик, філософ і механік. Внесла вагомий внесок у диференціальну геометрію, теорію чисел і механіку.

У 1808 році Софі Жермен написала мемуари про коливання тонких пластинок («*Mémoire sur les vibrations des lames élastiques*»), за який отримала премію Академії наук.

Софі стає першою жінкою, яка отримала право участі в засіданнях Паризької Академії наук. Займалася також теорією чисел. Довела, так званий «Перший випадок» Великої теореми Ферма для простих чисел Софі Жермен.

I

Іллюшин Олексій Антонович – (7 (20 січня) 1911 р., м. Казань – 31 травень 1998 р., м. Москва) – російський радянський вчений у галузі механіки суцільних середовищ. У цих роботах він вперше вніс у теорію рівняння поширення тепла і термодинаміку.

Створив наукову школу в галузі механіки деформованого твердого тіла. Під науковим керівництвом О.А. Іллюшина було захищено понад 150 дисертацій.

Наукова діяльність

О. А. Іллюшин розробив теорію обтікання тіл надзвуковим потоком газу, привів проблему до плоскої задачі (гіпотеза плоских перетинів) і отримав вираз тиску подачі газу на тіло (1947 р.). Поставив проблему панельного флаттера при надзвуковому обтіканні тонких плоских і криволінійних поверхонь. В цей же час ним була поставлена задача створення крилатих ракет (не реалізована через перехід Іллюшина на нову роботу).

Для в'язко пластичних течій твердих середовищ і пластичних рідин сформулював крайові задачі за допомогою принципу мінімуму потужності. Вивчив стійкість в'язко пластичної течії при великих швидкостях деформацій. Записав рівняння для припливу тепла при в'язко пластичному перебігу.

Спроектував і побудував пневматичний копер великої потужності.

О. А. Іллюшин побудував нову теорію проектування та нормування міцності осколково-фугасних снарядів при пострілі. Допустив при пострілі пластичні деформації снаряда, спростив технологію термообробки снаряда (гарт). Створив теорію пружно-пластичного розрахунку артилерійських снарядів (термофреттаж, термовтомність).

О. А. Іллюшин отримав кінцеве співвідношення між зусиллями, згинальними і крутними моментами для оболонок, які повністю перейшли в пластичний стан. Йому ж належать перші дослідження зі стійкості пластин і оболонок, матеріал яких навантажений за границею пружності.

У 1943 р. Іллюшин запропонував співвідношення, що описують малі пружно-пластичні деформації і застосовні до тіл, деформація яких за межею пружності порівняно невелика (близько декількох відсотків від початкового розміру), а швидкість деформації на напружений стан практично не впливає.

Він довів теорему про те, що просте навантаження завжди має місце, якщо в процесі навантаження прикладені до тіла масові поверхневі сили змінюються пропорційно одному і тому ж параметру, і показав, що при пропорційному навантаженні деформаційна теорія і теорія течії тотожні.

Спираючись на теорію малих пружних деформацій, вказав загальний метод наближеного рішення пружно-пластичних задач, названий ним методом пружних рішень. Цей метод знайшов застосування при вирішенні багатьох проблем пружно-пластичної поведінки середовищ.

У задачі про поступове обтіснення нескінченної труби прикладеним до зовнішнього кола будь-якого перетину розподіленим зусиллям Іллюшин у 1948 р. показав, що поблизу такого перетину утворюється область суцільної пластичної деформації кінцевої довжини; до цієї області з обох сторін примикають частини труби, де пластичний і пружний стан існують спільно, а далі труба знаходиться в чисто пружному стані.

У 1944–1948 рр. Іллюшин створив теорію стійкості пластин і оболонок за межею пружності.

О.А. Іллюшин розробив загальну теорію поведінки пластичних матеріалів при малих і кінцевих деформаціях (1954 р.). Він також запропонував модифікацію методу Рітца (1961 р.), а в 1968 р розвинув ефективний наближений метод розв'язання задач

лінійної термов'язкопружності, який можна застосовувати і при відсутності потужних комп'ютерів.

У 1964 році А. А. Іллюшин очолив роботи в області міцності зарядів твердого палива. У короткі терміни під його керівництвом були випущені норми міцності і керівництва для конструкторів. Для аналізу поведінки матеріалів при вибухах спроектував і побудував ряд механічних прискорювачів. Оцінив міцність в'язко пружних конструкцій з наповнених полімерних матеріалів. Для вирішення завдань теорії пластичності при довільному складному навантаженні О. А. Іллюшин запропонував принципово новий універсальний метод СН-ЕОМ, в якому алгоритм послідовних наближень включає обчислювальні операції на ЕОМ і випробування стандартних зразків на машині СН.

Вніс видатний внесок у вирішення складної проблеми забезпечення міцності колекторів парогенераторів атомних електростанцій. У 1992 р. був ініціатором постановки комплексної проблеми, вирішення якої вимагає використання технологій ракетно-космічної техніки в інтересах народного господарства.

К

Кірхгоф Густав Роберт (нім. *Gustav Robert Kirchhoff*) Народився 12 березня 1824 р. в Кенігсберзі. Помер у Берліні 17 жовтня 1887 р. Один з великих фізиків ХІХ століття. Разом з німецьким вченим Бунзеном заклав основи спектрального аналізу, відкрив цезій та рубідій. Встановив один з законів випромінювання (закон Кірхгофа) та правила для розрахунку електричних кіл (правила Кірхгофа).

Член Лондонського королівського товариства (1875 р.), іноземний член-кореспондент Санкт-Петербурзької академії наук (1862 р.).

Відкриття та дослідження

Відкрив закон теплового випромінювання, за яким відношення здатності тіла випромінювати електромагнітні хвилі до його здатності їх поглинати однакове для усіх тіл при одній і тій же температурі (закон Кірхгофа).

Він ввів поняття «абсолютно чорного тіла» й запропонував його модель – порожнина з невеликим отвором. Розробка проблеми випромінювання «абсолютно чорного тіла» врешті-решт призвела до створення квантової теорії випромінювання.

Йому належать роботи з дослідження розряду конденсатора та індукції струмів. В області механіки займався головним чином питаннями деформації, рівноваги та руху пружних тіл, руху рідин.

Спектральний аналіз

В основі методу лежить експериментально відкритий і теоретично обґрунтований Кірхгофом фундаментальний закон, що носить його ім'я: відношення монохроматичної випромінювальної і поглинальної здатностей у всіх тіл – одне і те ж, воно залежить тільки від температури і довжини хвилі.

Розробка Кірхгофом і Бунзеном методу спектрального аналізу, який став потужним засобом вивчення небесних тіл, знаменувала появу нової галузі астрономії – астрофізики. Кірхгоф виміряв положення кількох тисяч фраунгоферових ліній в спектрі Сонця і встановив їхній збіг з емісійними лініями десятка земних елементів, з чого зробив висновок, що ці хімічні елементи зустрічаються в атмосфері Сонця. Відкриття Кірхгофа дозволили йому по-новому підійти до проблеми фізичної природи Сонця. Показавши, що пануючі в той час уявлення про холодне темне сонячне ядро і розпечену зовнішню оболонку неправдиві. Він запропонував першу науково обґрунтовану модель Сонця як розпеченої кулі з дуже високою температурою, оточеної менш гарячою атмосферою, в якій всі елементи перебувають у газоподібному стані. Сонячні плями правильно вважав холоднішими областями в цій атмосфері.

Коші Огюстен Луї – (фр. *Augustin Louis Cauchy*; 21 серпня 1789 р., Париж 23 травня 1857 р.) французький математик, член Паризької академії наук (1816 р.), Петербурзької академії наук (1831 р.).

Наукова діяльність

Роботи Коші належать до різних областей математики. Були періоди, коли Коші щотижня представляв у Паризькій Академії наук нову працю. Усього ж він написав і опублікував понад 800 робіт з арифметики і теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної і небесної механіки, математичної фізики тощо. Його «Курс аналізу» (1821), «Резюме лекцій числення нескінченно малих» (1823), «Лекції з додатків аналізу до геометрії» (1826–1828), засновані на систематичному використанні поняття границі, стали зразком для більшості пізніших курсів. У них він дав означення поняття неперервності функції, чітко побудував теорії збіжних рядів, (зокрема, вперше установив точні умови збіжності рядів Тейлора до даної функції і провів виразну межу між збіжністю цього ряду взагалі і збіжністю до даної функції; ввів поняття радіуса збіжності, довів теорему про добуток двох абсолютно збіжних рядів тощо), дав означення інтеграла як границі сум, довів існування інтегралів від неперервної функції. Великою заслугою Коші є те, що він розвив основи теорії аналітичних функцій комплексної змінної закладені ще в 18 столітті Л. Ейлером і Ж. д'Аламбером. Особливо велике значення мають такі результати, отримані Коші: геометричне представлення комплексної змінної як точки, яка переміщується в площині тим чи іншим шляхом інтегрування (цю думку ще раніше висловив К. Гаусі); вираження аналітичної функції у вигляді інтеграла (інтеграл Коші), та розклад функції в степеневий ряд; розробка теорії лишків і її застосування до різних питань аналізу.

В області теорії диференціальних рівнянь Коші належать: постановка однієї з найважливіших загальних задач теорії диференціальних рівнянь (задача Коші), основні теореми існування розв'язку для випадку дійсних і комплексних змінних (для останніх він розвинув метод мажорант) і метод інтегрування рівнянь з частинними похідними 1-го порядку (метод Коші метод характеристичних смуг).

У геометрії Коші узагальнив теорію багатогранників, дав новий спосіб дослідження поверхні 2-го порядку, досліджував дотичні, напрямні і квадратуру кривих, установив правила застосування аналізу до геометрії, а також рівняння площини і параметричне представлення прямої в просторі.

В алгебрі він інакше довів основну теорему теорії симетричних багаточленів, розвив теорію визначників, знайшовши всі головні їхні властивості, зокрема теорему множення (причому Коші виходив з поняття знакозмінної функції). Цю теорему він поширив на матриці. Коші належать терміни «модуль» комплексного числа, «сполучені» комплексні числа й ін. Коші поширив теорему Штурма на комплексні корені.

У теорії чисел Коші належать: доведення теореми Ферма про багатокутні числа, одне з доведень закону взаємності, а також дослідження з теорії цілих алгебраїчних чисел, у яких він отримав ряд результатів, пізніше в загальнішій формі встановлених німецьким математиком Г. Куммером. Він перший вивчив загальне невизначене тернарне кубічне рівняння і дав теореми про невизначені тернарні квадратні рівняння і порівняння з однаковим модулем і загальним розв'язком. Коші належать також дослідження з тригонометрії, механіки, теорії пружності, оптики, астрономії. Коші був членом Лондонського королівського Товариства, Геттінгенської академії наук і майже всіх академій наук. Повне зібрання творів Коші видане Паризькою АН.

Кулон Шарль Огюстен – (фр. *Charles-Augustin de Coulomb*; 14 червня 1736 р. – 23 серпня 1806 р.) – французький фізик, військовий інженер, винахідник основного закону електростатики – закону Кулона.

Наукова діяльність

Кулон сформулював закони кручення; скручування масштабів, які він сам застосував для вимірювання електричних й магнітних сил взаємодії. У 1781 р. він описав дослідження на тертя ковзання і сформулював закон сухого тертя. У тому ж році став членом академії наук Парижа. З 1785 р. по 1789 р. опублікував сім книг, у яких сформулював закон взаємодії електричних зарядів і магнітних тіл (Закон Кулона), а також регулярність розподілу електричних зарядів на поверхні диригент. Ввів поняття магнітний момент і поляризація.

Л

Лав Огастес Едвард Хаф – (також можливе написання Ляв, Август Едуард Хьюг; англ. Augustus Edward Hough Love), (17 квітня 1863 р. Weston-Super-Mare – 5 червня 1940 р. Оксфорд) – англійський математик, відомий своїми працями з математичної теорії пружності і теорії приливних хвиль. Розробив математичну модель поверхневих хвиль, відомих як хвилі Лава. Він зробив внесок у теорію припливів, ввівши нові параметри, відомі як числа Лава.

Лагранж Жозеф-Луї – (фр. *Joseph-Louis Lagrange*, італ. *Giuseppe Lodovico Lagrangia*; 25 січня 1736 р., м. Турин – 10 квітня 1813 р., м. Париж) – французький математик, фізик і астроном італійського походження. Член (1759 р.), президент (1766 – 1787 рр.) Берлінської АН, іноземний почесний член Петербурзької АН (1776 р.), член Бюро довгот в Парижі (1795 р.).

Внесок

Лагранж працював у багатьох областях математики, розвинув нову галузь – варіаційне числення, зробив великий вклад у теорію диференціальних рівнянь і методів апроксимації функцій.

Розроблений ним варіаційний метод знайшов застосування в механіці, яку Лагранж зумів сформулювати, виходячи із принципу найменшої дії.

Його заслугою в астрономії є завершення побудови разом з Лапласом стрункої системи класичної небесної механіки, розпочатої працями І. Ньютона. На відміну від Лапласа його більше цікавила математична сторона досліджуваних проблем і він не завжди доводив рішення до практичного результату. Лагранж розвинув і довів до досконалості запропонований Л. Ейлером метод варіації сталих, один з найважливіших в небесній механіці (застосовують при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь). У 1763 р. застосував цей метод до розв'язання задачі про взаємні збурення Юпітера і Сатурну і значно поліпшив ранні результати Ейлера. У 1776 р. узагальнив теорему Лапласа про стійкість Сонячної системи, довівши її справедливості і для ексцентриситетів і нахилів орбіт. У 1782 р. створив теорію вікових змін орбіт планет; показав, що ці зміни є в дійсності періодичними з дуже великими періодами. Першим дав рівняння руху чотирьох великих супутників Юпітера і спробував вирішити цю важку задачу небесної механіки – розрахував у 1766 р. велику кількість нерівностей, що залежать від ексцентриситетів і положення апоцентру, та основні нерівності в довготі.

У 1772 р. встановив, що існують, окрім трьох колінарних точок рівноваги, ще дві трикутні точки (точки Лагранжа), в яких тіло малої маси може перебувати в рівновазі по відношенню до двох інших небесних тіл. Це виявилось чудовим пророкуванням можливості існування відкритої на початку ХХ ст. троянської групи малих планет, що перебуває поблизу точок Лагранжа системи Сонце-Юпітер. У 1778 р. Лагранж отримав аналітичне рішення задачі про визначення елементів орбіти планети або комети за трьома спостереженнями. Багато займався вивченням вікового прискорення середнього

руху Місяця. Показав, що ні сплюснутість Землі, ні несферичність Місяця не можуть викликати це прискорення і що якщо вікові впливи планет й існують, то ними можна знехтувати. Лагранж пояснив, чому Місяць завжди повернутий до Землі однією стороною. Грунтуючись на результатах Лагранжа, Лаплас пояснив причину явища приливів тертям вод земних океанів. Серед інших астрономічних робіт Лагранжа можна виділити вивчення збуджень орбіт комет великими планетами, розрахунок ефемериди проходження Венери по диску Сонця 3 червня 1769 р., розрахунок затемнень, а також розробку гіпотези про походження комет в результаті вибуху або виверження на планеті.

Твори

Лагранжу належать понад 100 математичних праць, багато з них були трактатами, й усі публікації відзначалися найвищою якістю. Але найвизначнішим твором Лагранжа стала «Аналітична механіка», надрукована в 1787 р. В цій роботі вчений узагальнив свої дослідження з класичної механіки й надав цій науці елегантної й довершеної форми.

Ламе Габріель – (фр. *Gabriel Lamé*, 22 липня 1795 р., м. Тур – 1 травня 1870 р., м. Париж) – французький інженер, математик і механік. Вніс вагомий вклад у розвиток математичної фізики та теорії пружності.

Наукові здобутки

В рамках досліджень, присвячених теорії пружності разом з Б.П.Е. Клапейроном вивчав (1826 р.) стійкість арок, встановив положення перерізу руйнування для кругової арки сталого поперечного перерізу. Написав у співавторстві мемуар про внутрішню рівновагу твердих тіл з однорідних матеріалів (1833 р.). Автор «Лекцій з математичної теорії пружності твердих тіл» (1852 р.) – першого трактату з теорії пружності.

Отримав визнання завдяки своїй загальній теорії криволінійних координат та їх позначень і дослідження класів еліпсоподібних кривих, тепер відомих як «криві Ламе». Увів поняття еліпсоїда напружень Ламе, вивчивши значення потенціалу на його поверхні. Дослідив (1854 р.) теорію пружної рівноваги сферичних оболонок. Опублікував (1859 р.) роботу про криволінійні координати та їх застосування в механіці і теорії пружності, увів функції Ламе. Розробив (1859 р.) ідеї, що лягли в основу тензорного аналізу. Довів (1840 р.) відсутність розв'язку у цілих числах рівняння. Написав «Курс раціональної математичної фізики» (1865 р.).

На його честь названі параметри Ламе в теорії пружності. Його ім'я входить у список 72 імен на Ейфелевій вежі.

Лаплас П'єр-Сімон – (фр. *Pierre-Simon Laplace*; 23 березня 1749 р. – 5 березня 1827 р.) – французький математик і астроном; відомий своїми працями в галузі диференційних рівнянь, один із творців теорії ймовірностей.

У працях з математичної астрономії Лаплас вивчав рух планет і довів стійкість Сонячної системи. Досліджував стійкість Сонячної системи. Одночасно він публікував важливі роботи з теорії визначників, теорії ймовірностей, математичної фізики та ін.

У філософії Лаплас був прибічником детермінізму. Він був прихильником постулату про те, що якби якась розумна істота мала можливість дізнатися положення і швидкість усіх часток у світі в певний момент, вона б могла з абсолютною точністю передбачати перебіг еволюції Всесвіту. Така гіпотетична істота була пізніше названа демоном Лапласа.

У «Небесній механіці» (вів це поняття) Лаплас підвів підсумки як власним дослідженням в цій області, так і працям своїх попередників, починаючи з Ньютона. Він дав всесторонній аналіз відомих рухів тіл Сонячної системи на основі закону усвітнього тяжіння і довів її стійкість в сенсі практичної незмінності середніх відстаней планет від Сонця і незначності коливань останніх елементів їхніх орбіт.

Математика

При вирішенні прикладних задач Лаплас розробив методи математичної фізики, які широко використовуються і в наш час. Особливо важливі результати належать Лапласу в розробці теорії потенціалу та спеціальних функцій. Його ім'ям названо перетворення Лапласа та рівняння Лапласа.

Він далеко просунув лінійну алгебру. Зокрема, Лаплас дав розкладання визначника за мінорами.

Лаплас розширив та систематизував математичний фундамент теорії ймовірностей, запровадив похідні функції. Перша книга «Аналітичної теорії ймовірностей» присвячена математичним основам. Власне теорія ймовірностей починається у другій книзі, в застосуванні до дискретних випадкових величин. Там же подано доказ граничних теорем Муавра-Лапласа та додатки до математичної обробки спостережень, статистики народонаселення та «моральних наук». Лаплас розвинув також теорію помилок та наближень завдяки своєму методу найменших квадратів.

Астрономія

Лаплас довів стійкість сонячної системи, яка полягає в тому, що завдяки руху планет в одну сторону, малим ексцентриситетам та малим взаємним нахилам їхніх орбіт, повинна існувати незмінюваність середніх відстаней планет від Сонця, а коливання інших елементів орбіт повинні вкладатися у вельми тісні межі.

Лаплас запропонував першу математично обґрунтовану гіпотезу космогонії утворення всіх тіл Сонячної системи, названу його ім'ям: гіпотеза Лапласа. Він також перший висловив припущення, що деякі туманності, які можна спостерігати на зоряному небі, насправді є галактиками, подібними до нашого Чумацького шляху.

Він далеко просунув теорію збурень та переконливо показав: всі відхилення положення планет від передбачених законами Ньютона (точніше кажучи, передбачених рішенням задачі двох тіл) пояснюються взаємовпливом планет, який можна вирахувати за допомогою тих же законів Ньютона. В небесній механіці немає інших сил, окрім ньютонівських, і аргументовано обґрунтував цю тезу.

Лаплас відкрив, що прискорення в русі Місяця, яке тоді дивувало всіх астрономів (вікова нерівність), теж є періодичною зміною ексцентриситету місячної орбіти, і виникає під впливом тяжіння великих планет. Розрахований Лапласом зсув Місяця під впливом цих факторів добре відповідав спостереженнями.

За нерівномірністю в русі Місяця Лаплас уточнив стискування земного сфероїда. Загалом дослідження про рух нашого супутника, проведені Лапласом, дали можливість скласти точніші таблиці Місяця, що, у свою чергу, сприяло вирішенню навігаційної проблеми визначення довготи на морі.

Лаплас перший побудував точну теорію руху галілеєвих супутників Юпітера, орбіти яких через взаємовпливи постійно відхиляються від кеплерівських. Він також виявив зв'язок між параметрами їхніх орбіт, описаних двома законами, які отримали назву «законів Лапласа». Обчисливши умови рівноваги кільця Сатурна, Лаплас довів, що вони можливі лише при швидкому обертанні планети близько осі, що було доведено пізніше спостереженнями Вільяма Гершеля.

Лаплас розробив теорію припливів за допомогою двадцятирічних спостережень рівня океану в французькому місті Брест.

Фізика

Лапласу належить барометрична формула, що зв'язує густину повітря, висоту, вологість та прискорення вільного падіння. Він також займався геодезією та теорією рефракції, винайшов крижаний калориметр.

У 1779–1784 роках Лаплас встановив закон Лапласа для капілярного тиску. Він вивів формулу для швидкості поширення звуку в повітрі.

Лаплас обернув закон Біо-Савара в математичну форму елементарної взаємодії між елементом електричного струму та намагніченою точкою.

Важливими були також дослідження Лапласа в галузі гідродинаміки.

Фактично, він передбачив чорні діри.

Лебедев Сергій Олексійович (нар. 2 листопада 1902 р., Нижній Новгород – пом. 3 липня 1974 р., Москва) – вчений, академік, творець першого в континентальній Європі комп'ютера.

Основний доробок

Під керівництвом Лебедева в Україні був створений перший на континенті Європи комп'ютер – Мала електронна лічильна машина («МЭСМ»). Наукова школа Лебедева, що стала головною в колишньому СРСР, за своїми результатами успішно конкурувала з американською фірмою ІВМ. Під його керівництвом були створені і передані для серійного випуску 15 типів високопродуктивних, найскладніших ЕОМ, кожна – продуктивніша, надійніша і зручніша в експлуатації.

Лейбніц Готфрід Вільгельм – (іноді – Ляйбніц; нім. Gottfried Wilhelm Leibniz; 1 липня 1646 р., м. Лейпциг – 14 листопада 1716 р., м. Ганновер) – провідний німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець та дипломат.

Передбачив принципи сучасної комбінаторики. Зробив вагомий внесок у логіку і філософію. Через кодування намагався створити універсальну числову дескриптивну платформу для всіх наук – прообраз сучасних формальних систем. Створив першу механічну лічильну машину, здатну виконувати додавання, віднімання, множення й ділення. Незалежно від Ньютона створив диференціальне й інтегральне числення і заклав основи двійкової системи числення. У рукописах і листуванні, які було надруковано лише в середині ХІХ століття, розробив основи теорії детермінантів. Зробив вагомий внесок у логіку і філософію. Мав надзвичайно широке коло наукових кореспондентів, багато з ідей викладено в рукописах і листуванні, що ще й досі повністю не надруковано.

Винаходи

1673 року, після знайомства з Християном Гюйгенсом, Лейбніц створив механічний калькулятор (арифмометр), що виконує додавання, віднімання, множення і ділення чисел, а також добування коренів і піднесення до степеня. У машині Лейбніца використовувався принцип зв'язаних кілець підсумовуючої машини Паскаля, але Лейбніц ввів у неї рухомий елемент (прототип каретки настільного калькулятора), що дозволив прискорити повторення операції додавання, необхідне при перемножуванні чисел. Замість коліщат і приводів у машині Лейбніца використовувалися циліндри з нанесеними на них цифрами. Кожен циліндр мав дев'ять рядів виступів або зубців. При цьому перший ряд містив один виступ, другий ряд – два виступи і так аж до дев'ятого ряду, що містив відповідно дев'ять виступів. Циліндри з виступами були рухомими.

Спеціально для своєї машини Лейбніц застосував систему числення, що використовує дві цифри: 0 і 1. Принцип двійкової системи числення Лейбніц пояснював на прикладі коробочки з отворами: відкритий отвір означає 1, закритий – 0. Одиниця позначалася кулею, що випала, нуль – відсутністю кулі. Двійкова система числення Лейбніца знайшла згодом застосування в автоматичних обчислювальних пристроях. Машина була продемонстрована у Французькій академії наук і лондонському Королівському суспільстві.

Лейбніц підказав Дені Папену конструкцію парової машини (циліндр і поршень). Сам Готфрід Лейбніц зі змінним успіхом намагався створити паровий насос на рубежі ХVІІ і ХVІІІ століть поряд з Християном Гюйгенсом.

Лейбніц міг за тиждень запропонувати з півдня жини геніальних ідей: від підводного човна до абсолютно нової форми годинника, від новаторської моделі ліхтарика до воза, який міг рухатися з такою ж швидкістю, як і сучасні автомобілі (навіть у часи, коли дороги були просто колійні шляхи), однак жоден з цих винаходів так і не був завершений. Як інженер, Лейбніц працював над обчислювальними машинами, годинниками і навіть над обладнанням для гірничодобувної промисло-вості. Як бібліотекар, він в цілому винайшов сучасне уявлення про каталогізацію.

Попри те, що проект осушування копалень у горах Гарца у 1678–1684 р.р. зазнав невдачі, під час його виконання Лейбніц розробив чимало конструкцій вітряків, помп та інших механізмів. До того ж, завдяки накопиченим спостереженням Лейбніц перетворився на експерта з геології, сформулювавши гіпотезу, що Земля спочатку була розплавленою. Серед винаходів Лейбніца можна також відзначити:

- проектування оптичних приладів та гідравлічних машин;
- роботу над створенням «пневматичного двигуна».

У своїх метафізичних роботах, наприклад, «Монадологія» (1714 р.), доводив, що все складається з безлічі елементів, монад, що перебувають між собою в відношенні гармонії. Монади, будучи незалежними одна від одної, взаємодіють. Це означає, що *християнська віра і наукове знання не повинні бути в конфлікті, і що існуючий світ створений Богом як найкращий із усіх можливих світів.*

М

Маріотт Едм – (фр. Edme Mariotte; 1620 р., Діжон – 12 травня 1684 р., Париж) – абат, французький фізик XVII століття.

Найважливіші роботи Маріотта зібрані в його «Essais de physique» (4 випуски, 1676–1681 рр.); з них найбільш відомий другий випуск: «De la nature de l'air» (тисячі шістсот сімдесят дев'ять), що містить виклад відомої залежності між пружністю газу і його об'ємом; той же закон був знайдений на 17 років раніше Бойлем і зазвичай його називають «законом Бойля-Маріотта». Інші «Essais» стосуються питань природи і руху рідин, падіння тіл і т. д.; четвертий представляє цікаву монографію про кольори і барви з фізичної та фізіологічної сторони; серед безлічі цікавих спостережень Маріотта слід зазначити відкриття ним сліпої плями в оці.

Збірник «Recueil des ouvrages de MM. de l'Académie des Science» (П., 1693 р.) і перший том «Histoire et Mémoires de l'Académie» містять безліч статей Маріотта з гідродинаміки; виходячи з висновків Галілея і Торрічеллі, Маріотт приходив до великого числа важливих висновків про перебіг рідин, про труби, про тиск всередині труб, про рівновагу рідких тіл і т. д.

Ріхард фон Мізес – (19 квітня 1883 р., Львів 14 липня 1953 р., Бостон, США) – американський науковець та математик, професор Гарвардського та багатьох інших університету. Засновник і директор Інституту прикладної математики. З приходом до влади нацистів у Німеччині переїхав до США. 1950 року відмовився від звання почесного члена Східнонімецької академії наук.

Н

Нав'є Клод-Луї Марі-Анрі – (фр. Claude-Louis Marie-Henri Navier, народився 10 лютого 1785 р., м. Діжон; помер 21 серпня 1836р., м. Париж) французький інженер, учений, автор ряду праць з будівельної механіки, опору матеріалів, теорії пружності, гідравліки і гідродинаміки, автор курсу опору матеріалів.

II

Поліном – поліном; ч. (полі... і ...ном) – алгебрична сума скінченного числа одночленів.

1. Многочлен або поліном (від грец. «Полі» – багато і лат. «Номен» – ім'я) – клас елементарних функцій класичної алгебри та алгебраїчної геометрії. Це функція однієї змінної.

2. Многочлени застосовують у багатьох розділах, в тому числі розгляді нуля, негативних і комплексних чисел, теорії груп, кілець, вузлів, множин і т.д. Використання поліноміальних обчислень значно спрощує вираз властивостей різних об'єктів.

3. Основні визначення многочлена:

Кожну складову полінома називають одночленом.

Многочлен, що складається з двох одночленів, називають двочленним або Біном.

Коефіцієнти полінома – речові або комплексні числа.

Якщо старший коефіцієнт дорівнює 1, то многочлен називають унітарним (наведеним).

Степені змінної в кожному одночлені – цілі невід'ємні числа, максимальна степінь визначає степінь многочлена; повна степінь – це ціле число, яке дорівнює сумі всіх степенів.

Одночлен, відповідний нульовій степені, називають вільним членом.

Многочлен, всі одночлени якого мають однакову повну степінь, називають однорідним.

4. Деякі часто використовувані многочлени названі на прізвище вченого, який їх визначив, а також описав функції, які вони задають. Наприклад, Біном Ньютона – це формула для розкладання полінома двох змінних на окремі складові для обчислення степенів. Це відомі зі шкільної програми записи квадратів суми і різниці

5. Якщо допустити в записі многочлена негативні степені, то вийде многочлен або ряд Лорана; многочлен Чебишева використовують у теорії наближень; многочлен Ерміта – в теорії ймовірностей; Лагранжа – для чисельного інтегрування та інтерполяції; Тейлора – при апроксимації функції і т.д.

Прандтль Людвіг – (нар. 4 лютого 1875 р., м. Фрайзінг – пом. 15 серпня 1953 р., м. Геттінген) – німецький вчений у галузі механіки, один із засновників експериментальної аеродинаміки.

Основні напрями наукової діяльності – теорія пружності і пластичності, гідроаеромеханіка, газова динаміка і динамічна метеорологія. Прандтль – автор класичної праці «Про рух рідин при дуже малому терті» (1904 р.), в якій уперше складено диференціальні рівняння руху рідини в ламінарному пограничному шарі – рівняння Прандтля. Розвинув теорію аеродинаміки крила, теорію турбулентної течії, досліджував проблему теплопередачі в потоці газу, відкрив один з основних критеріїв подібності теплових процесів у рідинах і газах – число Прандтля. Засновник наукової школи прикладної гідроаеромеханіки.

Писаренко Георгій Степанович – (30 жовтня (12 листопада) 1910 р., с. Скрильники Кобеляцького повіту Полтавської губернії – 9 січня 2001 р., м. Київ) – український учений-механік, доктор технічних наук (з 1949 року), професор (з 1950 року), фундатор наукової школи з механічних коливань, міцності матеріалів та елементів конструкцій в екстремальних умовах експлуатації. Академік Національної академії наук України (з 1964 року).

Р

Рівняння Нав'є-Стокса – названі на честь Клода-Луї Нав'є та Габрієля Стокса, описують течію в'язкої рідини або газу. Ці рівняння виникають при застосуванні другого закону Ньютона до руху рідини.

Рітц Вальтер – (нім. *Walter Ritz*, нар. 22 лютого 1878 р., м. Сьйон (нім. *Zimmen*), Вале (кантон), Швейцарія – 7 липня 1909 р., м. Геттінген, Німеччина) – швейцарський фізик-теоретик, математик.

Наукові заслуги

Роботи у фізиці присвячені спектроскопії, теорії теплового випромінювання, електродинаміці. Розробив ідею обчислення частот безпосередньо з енергетичної умови, без розв'язування диференціальних рівнянь. В 1908 р. відкрив закон, згідно з яким хвильове число довільної спектральної лінії дорівнює різниці двох термів із множини термів, характерних даному елементу. Формулу, що описує довільну спектральну лінію елемента записав у 1890 р. Й. Р. Рідберг. Звідси і назва «комбінаційний принцип Рідберга-Рітца».

Другий напрям досліджень відноситься до вирішення варіаційних задач теоретичної фізики. За цим напрямом Рітц опублікував у 1908 р. велику працю «Про новий метод вирішення деяких варіаційних задач математичної фізики», а в 1909 р. вийшла в світ його публікація «Теорія поперечних коливань квадратної пластини з вільними границями», присвячена застосуванню методу. Рітц запропонував (1909 р.) новий «прямий» метод наближеного вирішення варіаційних задач (метод Рітца), що знайшов застосування у теорії коливань, теорії пружності, будівельній механіці. Метод Рітца є розвитком методу Релея (іноді його називають методом Релея-Рітца).

Третій напрям робіт пов'язаний зі спробою Рітца радикально реконструювати електродинаміку на базі альтернативного до максвелівського підходу, що бере початок ще у працях К. Гауса та Б. Рімана.

С

Сен-Венан Адемар Жан-Клод Барре – (фр. *Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant*, нар. 23 серпня 1797 р., Вільсан-Б'єр – пом.січень 1886 р., Сент-Уан) – французький механік і математик, член Французької АН (1868 р.), зробив великий внесок у розвиток теорії пружності (ввів так званий напівзворотний метод розв'язання задач в теорії пружності) і побудував загальну теорію кручення і згину призматичних стержнів (1855 р.), записав рівняння для нестационарного одновимірного руху рідини, відомі як рівняння Сен-Венана, одні з фундаментальних у сучасній гідравліці. Також його іменем названий принцип пом'якшення граничних умов – принцип Сен-Венана, теорема Сен-Венана і умова сумісності Сен-Венана. Його іменем назване число Сен-Венана-Іллюшина.

У вступі до свого курсу опору матеріалів він обговорює гіпотези, що стосуються молекулярної будови твердих тіл і сил міжмолекулярної взаємодії. Користуючись цією гіпотезою, він вводить поняття напруження. Він веде мову про дотичне напруження і деформацію зсуву і показує, що розтягування в одному напрямі у поєднанні з стиском який дорівнює перпендикулярному напрямі еквівалентній чистому зсуву. Звертаючись до згину балки, Сен-Венан зосереджує увагу на дотичних напруженнях; не маючи даних про те, як вони розподілені у поперечному перерізі, він приймає гіпотезу рівномірного їх розподілу. Поєднуючи це дотичне напруження з напруженням розтягу-стиску у поздовжніх волокнах балки, він визначає головне напруження. При виборі безпечних розмірів балок, він вважає, що критерієм для призначення допустимих напружень потрібно приймати найбільшу деформацію.

До теми пластичності його увага була привернута експериментальними дослідженнями Треска (Tresca) з пластичної течії металів під великим тиском. У той час це було абсолютно новим полем дослідження, і Сен-Венан перший сформулював основні рівняння теорії пластичності і користувався ними у розв'язанні деяких практичних завдань, заклавши цим основи теорії пластичності ідеально пластичного тіла.

Різноманітність його праць, можна оцінити хоч би вже по тому, що книзі Тодгента і Пірсона «Історія теорії пружності» («A history of the theory of elasticity»), що складається з двох томів (т. I, 1886 р., т. II, 1893 р.), короткий виклад робіт Сен-Венана займає понад 300 сторінок. Він також видав лекції Нав'є «Resume des Leçons» (1864 р.) зі своїми примітками і доповненнями, що займають значну частину цієї книги (850 стор.). Сен-Венан переклав (1883 р.) французькою мовою книгу Клебша (Clebsch) «Теорія пружності твердих тіл» («Theorie de l'elasticite des corps solides»), збагативши її своїми доповненнями, від чого вона у обсязі зросла втричі. Суттєвими і важливим є також його роботи з гідравліки та гідродинаміки (витікання газів з отворів і рух рідин у відкритих руслах), про поширення хвиль при зіткненні пружних стержнів, про тертя у рідинах та ін.

Т

Тимошенко Степан Прокопович – (11 (23) грудня 1878 р., с. Шпотівка, Сумщина, Російська імперія – 29 травня 1972 р., Вупперталь, ФРН) – всесвітньо відомий український, американський та німецький вчений у галузі механіки. Батько теоретичної механіки. Основоположник теорії міцності матеріалів, теорії пружності та коливань. Один із організаторів і перших академіків Української академії наук (УАН). Автор відомої теорії балок.

Науковий доробок

Степан Тимошенко відомий в інженерній справі за своїми фундаментальними працями з опору матеріалів, теорій пружності та коливань. Основоположник школи прикладної механіки в США.

Основні напрями наукової роботи – фундаментальні розробки і подальший розвиток актуальних проблем механіки твердого тіла: міцності, стійкості й коливання механічних систем, будівельної механіки і теорії споруд. Його наукові праці стали основою розвитку багатьох напрямів механіки. Особливо великий внесок ним зроблений у розвиток прикладної теорії пружності, теорії стійкості пружних, оболонкових і пластинчатих систем, у тому числі підкріплених ребрами жорсткості. Важливими є дослідження щодо згину, кручення, коливання та удару сучасних інженерних конструкцій. Він розв'язав задачу щодо концентрації напружень поблизу отворів, міцності залізних рейок. З урахуванням новітніх досягнень науки і техніки виконав фундаментальні розробки з опору матеріалів, прикладної теорії пружності і теорії коливань, які випереджали свій час і знайшли повне практичне використання у створенні сучасної авіаційно-космічної техніки, інженерних споруд та кораблебудуванні. Поряд з точним розв'язанням актуальних задач з теорії стійкості тонкостінних пружних систем використовував розроблений ним загальний метод, широко відомий як енергетичний, або як метод Тимошенка.

Міжнародне визнання та вшанування пам'яті

Наукові досягнення Тимошенка було визнано у всьому світі. Його обрано членом академії наук і наукових товариств багатьох країн: Української (1918 р.), СРСР (1928 р.), Польської (1935 р.), Французької (1939 р.), Американської (1940 р.), Італійської (1948 р.) академії наук; почесним членом Лондонського королівського товариства (1944 р.), Товариства українських інженерів Америки (1953 р.); членом Наукового товариства ім. Шевченка (1923 р.), Української вільної академії наук (1947 р.), Спілки швейцарських

інженерів. Почесні звання доктора *honoris causa* йому присвоїли Лехайський університет (США, 1938 р.), Мічиганський університет (1938 р.), Цюрихський вищий технічний університет (1947 р.), Болонський університет (1954 р.), Загребська політехніка (1956 р.), Туринська політехніка (1960 р.).

Заслуги С. Тимошенка були відзначені різноманітними преміями та нагородами: премією ім. Д. І. Журавського (1911 р.), премією ім. Салова від Міністерства шляхів сполучення Росії (1915 р.), медаллю ім. Ворчестера Ріда Вагнера (1935 р.) та медаллю ім. С. Тимошенка (1957 р.) від Американського товариства інженерів-механіків (ASME), медаллю ім. Ламме (1939 р.) від Американського товариства інженерної освіти (ASEE), медалями ім. Леві (1944 р.) та ім. Крессона (1958 р.) від Інституту ім. Франкліна, міжнародною медаллю ім. Дж. Ватта (1948 р.) від Британського інституту інженерів-механіків, Великою медаллю (1948 р.) від спілки інженерів-докторів Франції, медаллю ім. Трасентера від спілки інженерів Льєзького політехнікума, медаллю ім. Дж. Евінга від Товариства англійських цивільних інженерів (1963 р.).

1951 року адміністрація Стенфордського університету назвала іменем Тимошенка Лабораторію інженерної механіки. У 1957 році Відділом прикладної механіки Американського товариства інженерів-механіків (ASME) «на честь Степана П. Тимошенка, всесвітньовідомого авторитета в галузі прикладної механіки, і пошанування його внеску як автора і вчителя» була заснована медаль Тимошенка (англ. *Timoshenko Medal*). Нею щорічно нагороджують науковців за визначні досягнення в галузі прикладної механіки. Першим її отримав у рік заснування Степан Тимошенко з таким обґрунтуванням: «За безцінний внесок і особистий приклад як лідера нової ери у прикладній механіці».

Його іменем названий Інститут механіки Національної Академії України. У Києві на будинку, де він мешкав (вул. Гоголівська, 23), встановлено меморіальну дошку з його портретом, а на території Київської політехніки – пам'ятник. 1998 року в Україні випущено поштову марку, присвячену пам'яті Тимошенка. Одну з вулиць Львова названо вулицею Братів Тимошенків.

Треска Анрі Едуард – (фр. Henri Édouard Tresca, 12 жовтня 1814 р., Дюнкерк – 21 червня 1885 р., Париж) – французький інженер-механік. Вніс вагомий вклад в розвиток теорії пластичності.

Наукові здобутки

А. Треска започаткував основи теорії пластичності, провівши великий обсяг експериментальних досліджень пресуванням і пробиванням металевих зразків. Він експериментально встановив, що пластичні деформації у загальному випадку складного напруженого стану виникають тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає половини границі текучості при одновісному розтягу. Цей критерій появи пластичних деформацій має назву критерій пластичності Треска або третя (III) теорія міцності. Критерій Треска є одним з двох основних критеріїв пластичності, який використовують в наш час. Інший важливий критерій належить фон Мізесу (IV теорія міцності).

А. Треска мав безпосереднє відношення до виготовлення нового еталона метра. Метрична конвенція 1875 року затвердила метр як міжнародну одиницю, внівши зміну в еталон. Метр тепер визначався як віддаль між двома штрихами на платиновій лінійці, а не довжиною лінійки. Ця зміна запобігала зміні еталону в результаті зношування. В 1889 році було виготовлено точніший міжнародний еталон метра із сплаву 90% платини і 10% іридію з Х-подібним перерізом, запропонованим А. Треска. Копії еталону було передано на зберігання в країни, де метр було визнано стандартною одиницею довжини. Цей еталон ще зберігається у Міжнародне бюро мір і ваг, хоча зараз уже не використовується.

За визначні заслуги ім'я А. Треска внесено у список 72 імен на Ейфелевій вежі.

Ф

Фур'є Жан Батист Жозеф – (фр. *Jean Baptiste Joseph Fourier*; 21 березня 1768 р. – 16 травня 1830 р.) – французький математик і фізик, відомий тим, що започаткував використання рядів Фур'є для розв'язування задач математичної фізики. На честь Фур'є названі перетворення Фур'є та основне рівняння теплопровідності – закон Фур'є. Фур'є вважають першовідкривачем парникового ефекту.

У 1798 році Фур'є разом з Гаспаром Монжем, Клодом Бертолле і Етьєном Жоффруа Сент-Ілером взяв участь в Єгипетській експедиції Наполеона і намагався виробити рекомендації з удосконалення землеробства та іригаційної техніки Єгипту. Його дипломатичний дар і вміння встановлювати дружні стосунки з арабами допомогли у ряді випадків уникнути кровопролиття. Фур'є став секретарем Єгипетського інституту, заснованого Наполеоном під час кампанії.

Внесок у науку

Науковій діяльності Фур'є були властиві працьовитість і методичність. Розв'язуючи задачу про розповсюдження тепла він виходив із закону охолодження тіл Ньютона, за якою потік тепла між тілами при теплообміні пропорційний різниці їхніх температур. Це закон Фур'є.

Фур'є отримав диференціальне рівняння теплопровідності і взявся шукати його розв'язок методом розділення змінних, задаючи різні граничні умови. Він став представляти математичні функції тригонометричними рядами, які згодом стали називати рядами Фур'є.

Жан Фур'є не був першовідкривачем ідеї заміни функції тригонометричним рядом. Тригонометричні ряди вперше ввів Леонард Ейлер – в 1748 році. Формули для обчислення коефіцієнтів ряду були відомі Леонарду Ейлеру з 1777 р. Ейлер вивів їх шляхом почленного інтегрування, а опублікував у 1798 році. Ще раніше, до Леонарда Ейлера, на їх існування вказав Клеро (1757 рік). Але той та інші використовували їх спорадично, від випадку до випадку, а неухильно націлений Фур'є зробив їх вживання системою. Він першим дав приклади розкладу в тригонометричний ряд функцій, які на різних ділянках задані різними аналітичними виразами. «Великою математичною поемою» назвав працю Фур'є лорд Кельвін.

Фур'є вважав, що будь-яку функцію можна представити тригонометричним рядом. Загалом це твердження неточне, і Фур'є критикували за відсутність строгості. Питання про збіжність рядів Фур'є залишалося значною проблемою в математиці впродовж 19 ст. Перше строге доведення збіжності рядів, наклавши умови на функцію, дав Діріхле у 1829 р.

Іншим важливим внеском Фур'є в фізичну науку був аналіз розмірностей. Фур'є зазначив, що рівняння, яке описує фізичний закон, повинно мати однакову розмірність у правій та лівій частині, і цей факт можна використати для отримання якісних результатів.

Фур'є вважають першовідкривачем парникового ефекту. За його підрахунками кількість сонячного тепла, яке отримує Земля, недостатня для пояснення температури її поверхні. Він проаналізував можливі джерела додаткового тепла, опублікувавши свої результати в 1824 р. та 1827 роках.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ І РЕКОМЕНДОВАНИХ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кухтов В.Г, Гринченко О.С, Карабін В.В, Литвиненко В.Л, Клименко М.П. «Опір матеріалів» програма дисципліни, лекційний курс, завдання до контрольних робіт з прикладами виконання. Для самостійної роботи студентів технічних спеціальностей факультетів заочного навчання вищих закладів освіти аграрного профілю при підготовці бакалавра і магістра. – Харків, 2008.
2. Кушнар'ова Г.О, Корнєєва І.Б, Петраш С.В, Столевич І.А. Методичний посібник та вихідні дані для робіт по курсу «Опір матеріалів (спеціальний курс)» для студентів будівельних спеціальностей. – Одеса, 2007.
3. Методичні вказівки і завдання до самостійної роботи з виконання розрахунково-графічного завдання із спецкурсу опору матеріалів «Основи теорії пружності» «Метод скінченних різниць у плоскій задачі теорії пружності». – Харків: ХНАМГ, 2007. – 24 с.
4. Рекач В.Г. Руководство к решению задач теории упругости. – М.: Высш. школа, 1977. – 216 с.
5. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.
6. Шваб'юк В.І. Опір матеріалів: Навчальний посібник. – К.: Знання, 2009 – 380 с.
7. Шутенко Л.Н., Засядько Н.А., Чупрынин А.А. Основы теории упругости и пластичности. Учебное пособие для студентов строительных специальностей. – Харьков: ХНАГХ, 2007. – 135 с.
8. Шутенко Л.М, Пустовойтов В.П, Засядько М.А. Механіка споруд. – Харків, ХДАМГ, 2001. – 234 с.

**Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя**

Кафедра технічної механіки і сільськогосподарських машин

Хомик Надія Ігорівна

Довбуш Тарас Анатолійович

Рубінець Наталія Андріївна

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ (*спецкурс*) І
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ І
ПЛАСТИЧНОСТІ**

Курс лекцій

для студентів напряму підготовки «Будівництво»

Комп'ютерний набір: Рубінець Наталія

Графічне оформлення: Цебенко Богдан, Фіялківський Павло

Наклад 50 прим.