**УДК 539.3**

**Є.Б. Ярема, В.В. Рощот**
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

# НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛАСТИНИ З ЖОРСТКОЮ ЕЛІПТИЧНОЮ ШАЙБОЮ ТА НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ

**Y.B. Yarema, V.V. Roshchot**

# STRESS STATE OF THE PLATE WITH RIGID ELLIPTICAL WASHER AND STRAIGHT-THROUGH CRACK

У роботі досліджено напружений стан ізотропної пластини з абсолютно жорсткою еліптичною шайбою та прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxy$ з початком у центрі тріщини, направивши вісь $Ox$ вздовж неї (див. рис. 1). Пластина знаходиться під дією рівномірно розподілених взаємно перпендикулярних зусиль $p_1$ і $p_2$ на безмежності, причому $p_1$ утворює кут $\alpha$ з віссю $Ox$. Жорстка шайба може повертатися як жорстке ціле на кут $\varepsilon$. Відрізок дійсної осі $\left[-l\ ;\ +l\right]$ позначимо через $L$, контур жорсткої шайби – через $L_1$, а граничне значення відповідної величини при $y \to \pm 0$ на тріщині будемо позначати значками «□» і «□». З жорсткою шайбою зв'язуємо локальну систему декартових координат $O'x'y'$, причому нехай вісь $O'x'$ утворює кут $\beta$ з віссю $Ox$, а точка $O'$ має координати *c* і *d* в системі координат $Oxy$.

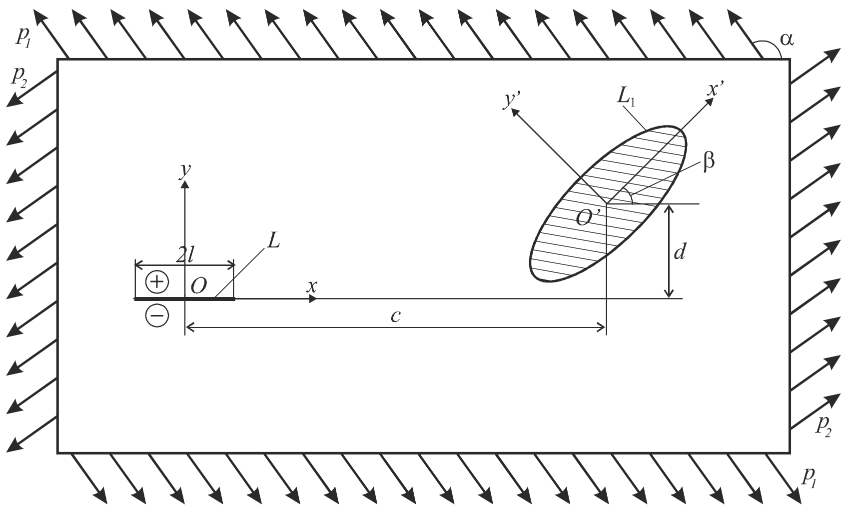


Рис. 1. Схема розміщення жорсткої шайби і тріщини

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{\pm} - i\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \qquad x \in L,$$

$$\tilde{u} + i\tilde{v} = i\varepsilon z, \qquad x \in L_1,$$

де $\sigma_{yy}$, $\sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень, $\tilde{u}$ і $\tilde{v}$ – компоненти вектора переміщення у локальній системі координат $O'x'y'$, $z = z'e^{i\beta}$, $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$.

У більшості наукових праць розв'язок задач такого типу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь на включенні та тріщині або тільки на тріщині. У цій роботі було апробовано новий підхід до розв'язування сформульованої задачі. Використавши методи теорії функції комплексної змінної та комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі [1] та їх подання [2], розв'язок задачі зведено до двох задач лінійного спряження на тріщині, розв'язавши які на межі жорсткої еліптичної шайби отриманли сингулярне інтегральне рівняння:

$$\int_{L_1} \left[ g_1(u) K(u,t)\, du + \overline{g_1(u)} M(u,t)\, d\bar{u} \right] = \rho(t), \qquad t \in L_1,$$

розв'язок якого побудовано числово з використанням методу механічних квадратур [3], де $g_1(u)$ – шукана функція, ядра $K(u,t)$, $M(u,t)$ та функція $\rho(t)$ – відомі.

Зауважимо, що крайові умови на берегах прямолінійної тріщини вдалося задовольнити аналітично.

Коефіцієнти інтенсивності напружень обчислювали за формулою [2]

$$k_1^{\pm} - ik_2^{\pm} = 2 \lim_{x \to \pm l} \left[ \sqrt{2\pi |x \mp l|}\, \Phi_2(x) \right].$$

де

$$\Phi_2(x) = -\left( \Gamma + \frac{1}{2} \overline{\Gamma}' \right)\left( 1 - \frac{x}{X(x)} \right) + \frac{1}{4\pi i X(x)} \int_{L_1} \left\{ -q(u) \left[ \frac{X(x) - X(u)}{u - x} - 1 + \kappa^* + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\kappa^* \left( X(x) - X(\bar{u}) \right)}{\bar{u} - x} \right] du + \overline{q(u)} \left[ \frac{(\bar{u} - u)\left( X(x) - X(\bar{u}) \right)}{(\bar{u} - x)^2} + \frac{\bar{u}(\bar{u} - u)}{(\bar{u} - x) X(\bar{u})} \right] d\bar{u} \right\}.$$

Після відповідних перетворень отримали остаточний вигляд формули для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень

$$k_1^{\pm} - ik_2^{\pm} = 2\sqrt{\pi l} \left\langle \left( \Gamma + \frac{\overline{\Gamma}'}{2} \right) \pm \frac{1}{4\pi i l} \int_{L_1} \left\{ q(u) \left[ \frac{X(u)}{u \mp l} - \kappa^* + 1 + \frac{\kappa^* \overline{X(u)}}{\bar{u} \mp l} \right] du + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \overline{q(u)} \left[ \frac{\bar{u} - u}{\bar{u} \mp l} \left( \frac{\bar{u}}{\overline{X(u)}} - \frac{\overline{X(u)}}{\bar{u} \mp l} \right) \right] d\bar{u} \right\} \right\rangle,$$

де $X(u) = \sqrt{(u^2 - l^2)}$, $\Gamma = \frac{1}{4}(p_1 + p_2)$, $\Gamma' = -\frac{1}{2}(p_1 - p_2)e^{-2i\alpha}$, $\kappa^* = -\frac{3 - \nu}{1 + \nu}$, $\nu$ – коефіцієнт Пуассона.

Також в роботі проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень при різних параметрах задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

**Література**

9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

10. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.

11. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976.– 444с.