

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Громик Андрій Петрович

УДК 519.876.5(043.3)

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ
ТЕПЛОПЕРЕНОСУ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Тернопіль-2012

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України.

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор
Конет Іван Михайлович,
 Кам'янець-Подільський національний університет
 імені Івана Огієнка,
 завідувач кафедри алгебри і математичного аналізу.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Бомба Андрій Ярославович,
 Рівненський державний гуманітарний університет,
 професор кафедри інформатики та прикладної
 математики;

кандидат технічних наук, доцент
Петрик Михайло Романович,
 Тернопільський національний технічний
 університет імені Івана Пулюя,
 професор кафедри програмної інженерії.

Захист відбудеться “30” листопада 2012 р. о “14” год. “00” хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради **К 58.052.01** у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя (46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56, аудиторія 79).

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя (46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56).

Автореферат розісланий “___” жовтня 2012 р.

Учений секретар
 спеціалізованої вченої ради



Б.Г. Шелестовський

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Перенесення тепла є одним з найбільш поширених і складних технологічних процесів сучасної технічної науки, що, крім атомної енергетики й космічної техніки, має велике значення у станційній та промисловій енергетиці, радіотехніці, електроніці, зварювальному виробництві, при розрахунку конструктивних елементів машин, нагрівальних пристроїв, інженерних споруд, у технологічних процесах будівельної, легкої та інших галузей промисловості. Саме цими обставинами пояснюється виняткова увага до задач теорії теплопереносу на сучасному етапі розвитку науково-технічного прогресу.

Дослідженню загальних питань теорії теплопереносу присвячено багато наукових праць. Меншою мірою можна вважати закінченими і систематизованими результати досліджень термопружного стану тонких пластин, які широко застосовуються в сучасній техніці. При цьому, як правило розглядалися одно- та рідше двовимірні часткові випадки для пластин при їх нагріванні чи охолодженні, пластини з підкріпленням краєм, теплоізовані пластини, пластини з включеннями та інші. Але в усіх цих працях вивчався вплив на термопружний стан тонкої пластини одного з факторів (дія зосередженого чи рухомого теплового джерела, теплообмін через бічну поверхню, тепловий режим на межі тощо) або ж виводилися термомеханічні рівняння і крайові умови для ізотропних та анізотропних пластин з урахуванням залежності фізико-механічних характеристик матеріалу від температури. При цьому виникає проблема створення математичних моделей для розв'язання задач теплопереносу залежно від фізико-технічних характеристик, а також значно підвищуються вимоги до точності визначення температур і теплових потоків та їх надійності.

Аналітична теорія теплопереносу знаходить найширше застосування в розв'язанні різних технічних проблем, у зв'язку з чим і зростає вага точних аналітичних методів розв'язання крайових задач для рівняння (систем рівнянь) теплопровідності, що, як правило, дозволяють зобразити загальний розв'язок у вигляді, зручному для оцінки температурного режиму твердого тіла та домінуючих факторів теплообміну. Особливо це стосується теплових задач загального вигляду, для яких застосування класичних аналітичних методів математичної фізики неможливе. Опис і дослідження згаданих процесів проводяться з використанням конкретних математичних моделей механічних процесів та процесів тепломасопереносу. При цьому вирізняють моделі теплопереносу в тонкостінних елементах конструкцій (стержні, пластини, оболонки).

Певною проблемою при цьому є врахування для тонких пластин несиметрії задач теплопереносу відносно серединної площини пластини та поведінки коефіцієнтів теплообміну з її бічних поверхонь, яка, по суті, не вивчалась.

Незважаючи на значну кількість наукових праць, присвячених математичному моделюванню процесів теплопереносу, згадані задачі для тонких ізотропних та циліндрично-ізотропних пластин є актуальними, а їх математичні моделі важливі як підґрунтя при проектуванні нагрівальної та теплообмінної апаратури промислових печей, рекуперативних теплообмінних апаратів у галузі харчової та переробної промисловості, виробництва будівельних матеріалів й енергозбереження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота пов'язана з науково-дослідними темами, які виконувалися в Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка в рамках держбюджетної теми № 01984003228

„Напружений стан тонких ізотропних пластинок” і теми № 0101U002155 „Аналітичні та якісні методи дослідження крайових задач для диференціальних та різницевих рівнянь”.

Дисертаційна робота спрямована на раціональне використання матеріальних й енергетичних ресурсів у теплоенергетичних технологіях, що відповідає Закону України «Про ресурсозбереження» та Постанові Кабінету Міністрів України №1040 від 07.07.2000 р. «Про невідкладні заходи щодо виконання Комплексної державної програми енергозбереження України».

Метою роботи є розробка нових математичних моделей стаціонарного та нестаціонарного процесів теплопередачі для ізотропних і циліндрично-ізотропних тонких пластин, націлених на інтенсифікацію внутрішньої кінетики теплопереносу з урахуванням впливу конструктивних і режимних параметрів та механізмів впливу теплових джерел.

Для досягнення поставленої мети у роботі потрібно вирішити такі завдання:

- поширити використання відомих математичних моделей процесів теплопереносу на випадки тонких ізотропних та циліндрично-ізотропних пластин й отримати розв’язки відповідних крайових і мішаних задач у випадках, коли температурне поле залежить від різних коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь пластини і задача теплопереносу несиметрична відносно серединної площини пластини;

- як наслідки отримати розв’язки відповідних моделей теплопереносу у випадках, коли температурне поле залежить від рівних коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь пластини й задача теплопереносу несиметрична або симетрична відносно серединної площини пластини;

- отримати розв’язки нових модельних задач теплопереносу для випадків задання на межі областей: температури на поверхні пластини в будь-який момент часу; густини теплового потоку; температури навколишнього середовища та закону теплообміну між поверхнею тіла й навколишнім середовищем, а також їх можливих комбінацій;

- на базі отриманих розв’язків розробити ефективні алгоритми для побудови температурних полів, що визначають загальний енергетичний стан установок і апаратів нагрівального типу різної конструкції (плоскі та циліндричні печі) й здійснити числовий аналіз і просторове графічне моделювання температурних профілів робочих поверхонь і робочих середовищ нагріву й визначити оптимальні технологічні параметри нагріву для печей різної конфігурації;

- на основі числового аналізу одержати уточнені параметри теплової кінетики для складних систем нагріву та візуальні картини температурних полів і їх градієнтів, на підставі яких провести оцінки й аналіз впливу різних характеристик нагріву на загальний перебіг процесу, що загалом дасть змогу здійснювати оптимальне керування режимами нагріву досліджуваних теплових систем з позиції енергозбереження та інших техніко-технологічних критеріїв.

Об’єкт дослідження. Технологічні процеси нагріву та теплопереносу в тонких нагрівальних елементах плоскої та циліндричної конструкції.

Предмет дослідження. Математичні моделі процесів нагріву й теплопереносу в тонких нагрівальних елементах плоскої та циліндричної конструкції з урахуванням несиметричності задачі теплопереносу відносно серединної площини пластини та різних коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь пластини.

Методи дослідження. При побудові математичних моделей процесів теплопереносу

в тонких пластинах використовувались методи теорії теплопровідності. При розв'язанні поставлених задач використано теорію крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, методи теорії інтегральних перетворень, методи операційного числення Гевісайда, методи комп'ютерного моделювання.

Наукова новизна одержаних результатів. Розроблено нові узагальнені математичні моделі, що описують конкретні технологічні процеси нагріву та теплопереносу в промислових нагрівальних апаратах з плоскими й циліндричними нагрівальними елементами.

Уперше методом інтегральних перетворень побудовано точні розв'язки моделей теплопереносу в ізотропних, циліндрично-ізотропних і клиновидних циліндрично-ізотропних тонких пластинах у випадку несиметрії задачі теплопереносу відносно середньої площини пластини та різних коефіцієнтів теплообміну з її бічних поверхонь.

Побудовано алгоритмічні схеми реалізації отриманих розв'язків, що описують температурні поля досліджуваних нагрівальних елементів.

Здійснено числове моделювання температурних профілів поверхонь нагрівальних елементів і середовищ нагріву з обґрунтуванням оптимальних режимно-технологічних параметрів з позиції рівномірності нагріву.

Практичне значення одержаних результатів полягає у розширенні можливостей математичного моделювання при розрахунку ефективних режимів роботи нагрівальних елементів та теплових систем, зменшенні об'ємів необхідних трудомістких і дорогих експериментів, а також у можливості їх наукового планування з позицій єдиного підходу до опису процесів теплопереносу в тонких пластинах. Одержані аналітичні розподіли температурних полів у розглянутих нагрівальних елементах впроваджено в практику проектування нагрівальних і теплообмінних апаратів та оптимізації режимних параметрів на підприємстві ПАТ Кам'янець-Подільський «Хлібокомбінат» при розрахунках теплових режимів нагрівальних печей для випікання тонких плоских тістових заготовок. Результати дослідження також можуть бути використані при розрахунку теплових режимів для різного технологічного обладнання, зокрема обладнання з виробництва будівельних матеріалів, а також можуть бути включені в різні посібники й довідники та використані в інженерній практиці при розрахунку термopужного стану тонкостінних елементів конструкцій і пластинчастих деталей машин чи механізмів.

Особистий внесок здобувача. Усі теоретичні та практичні результати, що складають зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно.

У дослідженнях, результати яких відображені в публікаціях, написаних у співавторстві з І. Конетом, здобувачеві належить розробка моделі теплопереносу та визначення структури нестационарного температурного поля для прямокутної пластини [6]; участь у постановці задачі та побудова аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру задач теплопереносу для тонких циліндрично-ізотропних кругових пластин з урахуванням несиметрії та різних коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь [8, 9]; проведення теоретичних досліджень, оформлення результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей, самостійному узагальненню окремих етапів досліджень.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи обговорювалися на: Всеукраїнській науковій конференції „Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения” (Чернівці, 1995 р.); Всеукраїнській школі-семінарі з математичного моделювання (Херсон, 1996 р.); VII Міжнародному симпозиумі „Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”

(Феодосія, 1997 р.); Міжнародних наукових конференціях „Розробка та застосування математичних методів у науково-технічних дослідженнях” (Львів, 1998 р.), „М.В. Остроградський – видатний математик, механік і педагог” (Полтава, 2001 р.); VIII і IX Міжнародних наукових конференціях імені академіка М.Кравчука (Київ, 2000 р., 2002 р.); Міжнародній науково-технічній конференції „Проблеми математичного моделювання сучасних технологій” /ПММ-2002/ (Хмельницький, 2002 р.); Міжнародній науковій конференції „Шості Боголюбовські читання” (Чернівці, 2003 р.); Всеукраїнській науково-методичній конференції „Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 2004 р.); IV Міжнародній науковій конференції „Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 2010 р.).

У повному обсязі результати дисертаційної роботи доповідалися на: науковому семінарі фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, науковому семінарі кафедри інформаційних систем Чернівецького факультету Харківського національного технічного університету «ХП», науковому семінарі з проблем математичного моделювання та обчислювальних методів Рівненського державного гуманітарного університету, науковому семінарі Інституту проблем моделювання в енергетиці імені Г.Є. Пухова НАН України, наукових семінарах «Прикладна математика і механіка» й «Математичне моделювання та обчислювальні методи» Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.

Публікації. За основними матеріалами роботи опубліковано 29 праць, у тому числі: 18 статей, з яких 9 – у фахових наукових виданнях з технічних наук, 11 публікацій у матеріалах конференцій, 26 праць опубліковано без співавторів.

Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел (151 найменування на 15 сторінках) та 2 додатків (на 2 сторінках). Загальний обсяг дисертаційної роботи – 165 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У Вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання, визначено об’єкт і предмет дослідження, з’ясовано наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, окреслено методи дослідження, подано інформацію про особистий внесок здобувача, апробацію результатів дисертації, публікації, а також структуру й обсяг роботи.

У першому розділі здійснено огляд праць за темою дисертації, зокрема висвітлено основні етапи розвитку математичного моделювання процесів теплопереносу, окреслено коло питань і проблем, які потребують дослідження та подальшого розвитку.

Основи сучасного математичного моделювання фізичних процесів різної природи й інженерних конструкцій було закладено в працях О. Самарського та Г. Марчука. Вони у загальних рисах визначили основні складові математичного моделювання, що включає формулювання фізичної моделі, формулювання на її основі відповідних задач математичної фізики, розробку методів їх розв’язання та програмних засобів числової реалізації, порівняння отриманих результатів з експериментальними і за необхідності уточнення вихідних припущень моделі, яка розглядається.

Теорія теплопереносу є одним з основних розділів сучасної науки, що має важливе значення для багатьох галузей промисловості, зокрема металургійної, енергетичної,

хімічної, а також при розрахунках теплових апаратів, які працюють при нестационарному режимі, загороджуючих конструкцій в умовах змінної теплової дії (теплоізоляція будинків, печей, трубопроводів), конструктивних елементів машин, інженерних споруд, нагрівальних пристроїв, температурних напружень у мостах, у технологічних процесах будівельної, легкої та інших галузей промисловості.

Дослідження зазначених і багатьох інших процесів пов'язано з розв'язанням задач теплопереносу, а саме їх математичним моделюванням. Крім того, значна кількість задач фізики, хімії, механіки й техніки формулюється мовою теорії теплопереносу і розв'язується її методами. Це проблеми механіки суцільного середовища, електродинаміки, теплофізики і термодинаміки, квантової теорії поля, космології та ін.

Саме цими обставинами пояснюється виняткова увага до задач теорії теплопереносу на сучасному етапі розвитку науково-технічного прогресу, а, зважаючи на те, що сьогодні значно підвищуються вимоги до точності визначення температурних полів та напружень, логічно, що метод математичного моделювання останнім часом набуває все більшого значення. Загальновідомим є широке застосування математичного моделювання до вивчення процесів тепломасопереносу як у теоретичних, так і в прикладних дослідженнях. Такі питання, зокрема, розглядали Ю. Бабенко, С. Блажевський, В. Дейнека, Г. Дульнев, Ю. Зарічняк, В. Зарубін, В. Омельченко, А. Коваленко, Ю. Коляно, А. Кулик, М. Ленюк, В. Марченко, Б. Могилевський, М. Петрик, І. Сергієнко, В. Скопєцький, А. Харламов та ін.

Зазначимо також, що дослідженням кінетики процесів сорбції, сушки, горіння й інших фізичних і хіміко-технологічних процесів, які тісно пов'язані з розв'язанням задач дифузії та масопереносу, аналогічних стаціонарним та нестационарним задачам теорії теплопровідності, присвячено роботи А. Бомби, В. Булавацького, Я. Бурака, В. Скопєцького, С. Барановського, І. Присяжнюка, Є. Чаплі, Т. Нагірного, Б. Галапаца, Б. Гнідця, В. Ісаченка, В. Осипова, А. Облівіна, А. Сукомела, М. Ленюка, М. Петрика, В. Петрова-Денисова, Л. Масленнікова, Ю. Семенова, О. Самарського, S. Leclerc, D. Canet, J. Fraissard, A. Rodriguez-Ferran та ін.

Дослідженням загальних питань теорії теплопереносу займалися багато науковців. Зокрема, варто згадати праці Б. Болі, Дж. Уейнера, Г. Карслоу, Д. Єгера, С. Кутателадзе, А. Ликова, Г. Мучника, І. Рубашова, Г. Паркуса, А. Тихонова, О. Самарського, L. Edvard та ін. Меншою мірою можна вважати закінченими і систематизованими результати досліджень термпружного стану тонких пластин, що проводились І. Мотовиловцем, А. Ликовим, А. Коваленком, В. Козловим, І. Конетом, С. Тимошенком, Г. Паркусом, М. Ленюком, Э. Меланом, та іншими вченими й широко застосовуються в сучасній техніці.

Важливим етапом у цих дослідженнях є монографія Я. Підстригача і Ю. Коляно «Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках» присвячена розвитку основ узагальненої динамічної теорії термомеханіки ізотропних і анізотропних тіл. Відомо, що для ізотропних тіл узагальнений закон теплопровідності як гіпотезу про скінченні швидкості розповсюдження тепла та маси для тепло- й вологопереносу в капілярно-пористих тілах вперше встановив А. Ликов. Враховуючи компоненти, які з'являються в рівнянні теплопровідності й крайових умовах теплообміну, одержаних на основі узагальненого закону, маємо узагальнену теорію теплопровідності. Задачі теплопровідності, які розв'язуються на основі цієї теорії, Я. Підстригач і Ю. Коляно називають узагальненими. Проаналізувавши узагальнену задачу теплопровідності для півпростору, граничне значення температури якого в

початковий момент часу змінюється несуттєво, а надалі залишається сталим, А. Ликов швидкість розповсюдження тепла інтерпретує як похідну за часом від глибини проникнення тепла.

Але в усіх цих працях вивчається вплив на термopужний стан тонкої пластини одного з факторів (дія зосередженого чи рухомого теплового джерела, теплообмін через бічну поверхню, тепловий режим на межі тощо), а в роботах Я. Підстригача та Ю. Коляно на перший план поставлено виведення термомеханічних рівнянь і крайових умов для ізотропних й анізотропних пластин з урахуванням залежності фізико-механічних характеристик матеріалу від температури. Надалі в роботі розглядаються моделі, розроблені на основі наближеної системи рівнянь теплопровідності для ізотропних пластин, запропонованої Я. Підстригачем і Ю. Коляно.

Отже, проведений аналіз праць як вітчизняних, так і зарубіжних науковців свідчить про наявність складної структури взаємовпливів та взаємозалежностей різних чинників і факторів, які визначають процеси теплопереносу в тонких пластинах і є суттєвими лімітуючими чинниками, неврахованими у “традиційних” (класичних) та пропонованих моделях таких систем.

Урахування таких специфічних особливостей переносу в тонких пластинах, як несиметричність задачі відносно серединної площини пластини, різні коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь і низка інших фізичних чинників, при формуванні математичних моделей та виборі методів моделювання дозволяє глибше поринути у внутрішню природу процесів, виявити систему функціональних зв'язків і взаємодій, що визначають кінетику переносу. Останнє потребує розробки нових математичних моделей і використання ефективних методів моделювання, що ґрунтуються на сучасній теорії крайових і початково-крайових задач для рівнянь і систем диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Другий розділ присвячено розробці узагальнених моделей та побудові точних розв'язків стаціонарного й нестаціонарного процесів теплопереносу в тонких пластинах різної геометрії товщиною 2δ (пластини у вигляді прямокутного клина, смуги-пластини, напівсмуги-пластини, пластини у вигляді прямокутника) у декартовій системі координат у припущеннях, що: а) термopужні характеристики пластини не залежать від температури; б) пластини підігріваються неперервно розподіленими джерелами тепла; в) через бічні поверхні пластини $z = \pm\delta$ відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона; г) задача теплопереносу несиметрична відносно серединної площини пластини $z = 0$ і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь різні; д) через поверхні межі пластини відбувається теплообмін за законом Ньютона або ці поверхні підтримуються при заданому тепловому режимі чи піддаються дії теплового потоку.

У підрозділі 2.1 розглядається модель теплопереносу в тонкій ізотропній пластині у вигляді необмеженого прямокутного клина.

У пункті 2.1.1 в пластині, що розглядається, досліджується стаціонарний теплоперенос, який математично моделює скалярна величина

$$t(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{\delta} T_2(x, y), \quad z \in (-\delta; \delta); (x, y) \in D \subset R^2, \quad (1)$$

де $T_1(x, y) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t(x, y, z) dz$, $T_2(x, y) = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} t(x, y, z) z dz$ – інтегральні характеристики температури.

При цьому пара функцій $T_1(x, y)$, $T_2(x, y)$ є обмеженим в області $\Pi_1 = \{(x, y) : 0 < x, y < \infty\}$ розв'язком еліптичної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_1(x, y) - \frac{\alpha_+}{\Lambda} T_1(x, y) - \frac{\alpha_-}{\Lambda} T_2(x, y) = -f_1(x, y), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_2(x, y) - \frac{3}{\Lambda} \left(\alpha_+ + \frac{4}{r_z} \right) T_2(x, y) - \frac{3\alpha_-}{\Lambda} T_1(x, y) = -f_2(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

з крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 h_{1x} \right) T_j \Big|_{x=0} = h_{1x} t_{1j}^c(y) \equiv g_{1j}(y), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + \beta_3 h_{3y} \right) T_j \Big|_{y=0} = h_{3y} t_{3j}^c(x) \equiv g_{3j}(x), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Розв'язок крайової задачі (2)-(4), побудований методом інтегральних перетворень Фур'є на півосі щодо геометричних змінних x та y , має вигляд

$$T_j(x, y) = \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^\infty W_{1,jm}^x(x, y, \eta) g_{1m}(\eta) d\eta + \int_0^\infty W_{3,jm}^y(x, y, \xi) g_{3m}(\xi) d\xi + \int_0^\infty \int_0^\infty E_{jm}(x, y, \xi, \eta) f_m(\xi, \eta) d\eta d\xi \right\}, \quad j=1,2. \quad (5)$$

У формулах (5) беруть участь виписані в явному вигляді компоненти $E_{ij}(x, y, \xi, \eta)$ фундаментальної матриці розв'язків, компоненти $W_{1,jm}^x(x, y, \eta)$, $W_{3,jm}^y(x, y, \xi)$ лівої та нижньої матриць Гріна еліптичної крайової задачі (2)-(4).

У пункті 2.1.2 розглядається нестационарний теплоперенос, який математично моделює скалярна величина

$$t(\tau, x, y, z) = T_1(\tau, x, y) + \frac{z}{\delta} T_2(\tau, x, y), \quad \tau > 0; z \in (-\delta; \delta); (x, y) \in D \subset R^2.$$

При цьому пара функцій $T_1(\tau, x, y)$ і $T_2(\tau, x, y)$ є обмеженим в області $\bar{\Pi}_1 = \{(\tau, x, y) : 0 < \tau < \infty; (x, y) \in \Pi_1\}$ розв'язком параболическої системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{\alpha_+}{C} T_1(\tau, x, y) - a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_1(\tau, x, y) + \frac{\alpha_-}{C} T_2(\tau, x, y) = a f_1(\tau, x, y), \\ \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + \frac{3}{C} \left(\alpha_+ + \frac{4}{r_z} \right) T_2(\tau, x, y) - a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_2(\tau, x, y) + \frac{3\alpha_-}{C} T_1(\tau, x, y) = a f_2(\tau, x, y) \end{cases} \quad (6)$$

з початково-крайовими умовами

$$T_j(\tau, x, y) \Big|_{\tau=0} = g_j(x, y); \quad j=1,2; \quad (7)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \beta_1 h_{1x} \right) T_j \Big|_{x=0} = h_{1x} t_{1j}^c(\tau, y) \equiv \varphi_{1j}(\tau, y), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T_j}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + \beta_3 h_{3y} \right) T_j \Big|_{y=0} = h_{3y} t_{3j}^c(\tau, x) \equiv \varphi_{3j}(\tau, x), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial T_j}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Аналогічно до задачі (2)-(4) побудований методом інтегральних перетворень Фур'є щодо x та y розв'язок початково-крайової задачі (6)-(9) має вигляд

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_1(\tau, x, y) \\ T_2(\tau, x, y) \end{pmatrix} = & \int_0^\infty \int_0^\infty V(\tau, x, y, \xi, \eta) \begin{pmatrix} g_1(\xi, \eta) \\ g_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\xi d\eta + a \int_0^\tau \int_0^\infty \int_0^\infty V(\tau - \rho, x, y, \xi, \eta) \begin{pmatrix} f_1(\rho, \xi, \eta) \\ f_2(\rho, \xi, \eta) \end{pmatrix} d\xi d\eta d\rho + \\ & + a \int_0^\tau \int_0^\infty W_1^n(\tau - \rho, x, y, \eta) \begin{pmatrix} \varphi_{11}(\rho, \eta) \\ \varphi_{12}(\rho, \eta) \end{pmatrix} d\eta d\rho + a \int_0^\tau \int_0^\infty W_3^n(\tau - \rho, x, y, \xi) \begin{pmatrix} \varphi_{31}(\rho, \xi) \\ \varphi_{32}(\rho, \xi) \end{pmatrix} d\xi d\rho, \end{aligned} \quad (10)$$

де $V(\tau, x, y, \xi, \eta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(\mu^2 + \lambda^2)\tau} K_1(x, \mu) K_1(\xi, \mu) K_3(y, \lambda) K_3(\eta, \lambda) d\mu d\lambda$ – фундаментальна матриця розв'язків; $W_1^n(\tau, x, y, \eta) = V(\tau, x, y, 0, \eta)$, $W_3^n(\tau, x, y, \xi) = V(\tau, x, y, \xi, 0)$ – ліва та нижня матриці Гріна задачі (6)-(9).

З формул (5), (10) як наслідки вписано структури розв'язків задачі у випадках рівності коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь і симетрії задачі теплопереносу відносно серединної площини пластини, а також проведено аналіз випадків задання на ділянках межі пластини: розподілу температури на поверхні пластини в будь-який момент часу (крайова умова 1-го роду); густини теплового потоку (крайова умова 2-го роду); температури навколишнього середовища та закону теплообміну між поверхнею тіла й навколишнім середовищем (крайова умова 3-го роду), а також їх можливих комбінацій.

У п. 2.2-2.4 розроблено модельні задачі процесів стаціонарного та нестационарного теплопереносу в тонкій ізотропній смузі-пластині, напівсмузі-пластині, пластині у вигляді прямокутника. Точні розв'язки вказаних задач одержано методом інтегральних перетворень Фур'є (на осі, півосі та сегменті).

У п. 2.5-2.6 проведено аналітичне та комп'ютерне моделювання стаціонарного й нестационарного теплопереносу в процесах випікання тонких плоских тістових заготовок товщиною δ_1 в електричній печі, схематизація якого подана на рис. 1.

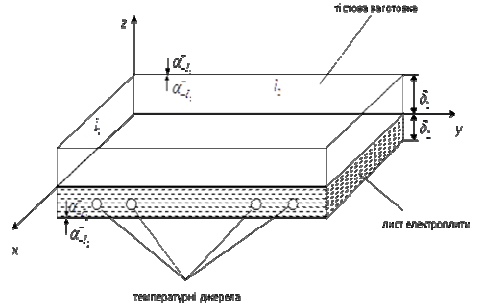


Рис. 1. – Схематизація робочої області теплопереносу при випіканні тонкої плоскої тістової заготовки в електропечі

Тістова заготовка знаходиться на електричній плиті товщиною δ_2 , яка рівномірно нагріває заготовку до встановленої температури T_0 через систему неперервно розподілених джерел тепла всередині листа електроплити. Припускається, що робоча область є добре ізольована (тобто відсутній теплообмін через бічні поверхні). Виходячи з прийнятої схематизації робочої області процесу, маємо, що T_1 – температурний розподіл у плоскій тістовій заготовці; T_2 – температурний розподіл у листі електроплити печі.

Температурний баланс процесу теплопереносу, що розглядається, описуємо за допомогою такої крайової задачі: побудувати в області $D = \{(x, y), 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$ обмежений розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \Lambda_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_1(x, y) = \alpha_- \cdot T_2(x, y), \\ \Lambda_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_2(x, y) - \frac{12}{r_z} T_2(x, y) + f_2(x, y) = 3\alpha_- \cdot T_1(x, y) \end{cases} \quad (11)$$

з крайовими умовами теплонепроникності на ділянках межі області

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_i}{\partial x} \right|_{x=l_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_{y=l_2} = 0; \quad i = \overline{1,2}, \quad (12)$$

де $\Lambda_i = \lambda_i (\delta_1 + \delta_2)$, $r_z = r_{-\delta_2} = (\delta_1 + \delta_2) / \lambda_2$; $\alpha_+ = \alpha_{+\delta_1}^+ + \alpha_{+\delta_1}^-$; $\alpha_- = \alpha_{-\delta_2}^+ + \alpha_{-\delta_2}^-$.

Виходячи з прийнятої схематизації робочої області процесу, справедливий також такі співвідношення: $\alpha_+ = 0$; $\alpha_- = \alpha_{-\delta_2}^+$; $(\alpha_{+\delta_1}^+ = \alpha_{+\delta_1}^- = \alpha_{-\delta_2}^- \equiv 0)$, а функція $f_2(x, y)$ описує просторово розподілені теплові (температурні) джерела неперервного типу в плиті.

Моделюючи процес теплопереносу, розглядаються такі практично важливі конструктивні схеми неперервно розподілених теплових джерел в електричній плиті:

1) косинусоїдальний (синусоїдальний) розподіл за геометричною координатою x :

$$f_2(x, y) = T_0 \cdot \cos v_1 x \quad (f_2(x, y) = T_0 \cdot \sin v_1 x),$$

2) двовимірний косинусоїдальний (синусоїдальний) розподіл за координатами x та y :

$$f_2(x, y) = T_0 \cdot \cos v_1 x \cdot \cos v_2 y \quad (f_2(x, y) = T_0 \cdot \sin v_1 x \cdot \sin v_2 y).$$

Тут v_1, v_2 – частотні (густинні) характеристики просторового розподілу температурних джерел відповідно вздовж координати x та y .

Єдиний обмежений розв'язок задачі (11)-(12) має вигляд:

$$T_1 = \frac{\theta_0 \Gamma_1}{l_1 l_2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{\Delta_{n,m}} \left[\frac{\sin(\beta_n - v_1) l_1}{v_1 - \beta_n} - \frac{\sin(\beta_n + v_1) l_1}{\beta_n + v_1} \right] \left[\frac{\sin(\beta_m + v_2) l_2}{\beta_m + v_2} + \frac{\sin(\beta_m - v_2) l_2}{\beta_m - v_2} \right] \cos \frac{n\pi}{l_1} x \cos \frac{m\pi}{l_2} y,$$

$$T_2 = \frac{\theta_0 \Gamma_1}{l_1 l_2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\beta_n^2 + \beta_m^2}{\Delta_{n,m}} \left[\frac{\sin(\beta_n + v_1) l_1}{v_1 + \beta_n} + \frac{\sin(\beta_n - v_1) l_1}{\beta_n - v_1} \right] \left[\frac{\sin(\beta_m + v_2) l_2}{\beta_m + v_2} + \frac{\sin(\beta_m - v_2) l_2}{\beta_m - v_2} \right] \cos \frac{n\pi}{l_1} x \cos \frac{m\pi}{l_2} y.$$

У ході **комп'ютерного моделювання** стаціонарного процесу з використанням спеціально розроблених **MAPLE**-програмних засобів на основі описаної моделі розв'язано такі важливі практичні технологічні задачі:

1) побудови й аналізу просторово розподілених температурних полів T_2 у нагріваючому середовищі (плита печі) з неперервно розподіленими тепловими джерелами та температурних полів T_1 у середовищі нагріву (плоскі тістові заготовки);

2) вибору характеристик інтенсивності теплових джерел $f_2(x, y)$ нагріваючого середовища для забезпечення заданих температурних розподілів на поверхнях технологічних середовищ, що забезпечують необхідний ступінь однорідності їх нагріву.

У процесі моделювання досліджено вплив конструктивних і частотних (густинних) характеристик теплових джерел плити нагріву для забезпечення рівномірного нагріву тістових заготовок різних розмірів та отримання просторово-розподілених температурних розподілів заготовок з рівномірною інтенсивністю розподілу температур на їх поверхні.

1. Для різних товщин шару тістової заготовки та листа плити (частотні характеристики плити для конструктивних схем, що розглядаються, $v_1 = 10, v_2 = 10$).

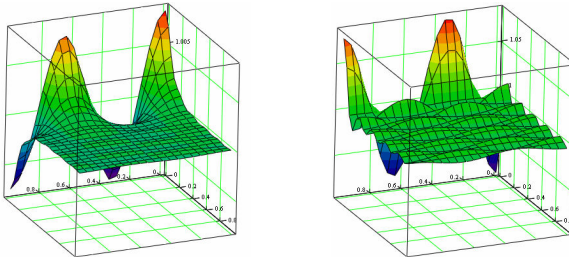


Рис. 2. – Температурні розподіли $T_1(x, y)$ і $T_2(x, y)$ [для $\delta_1 = 0,05, \delta_2 = 0,01$].

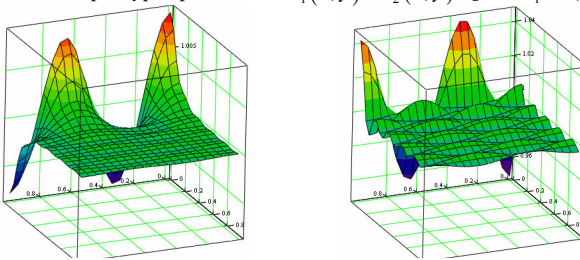


Рис. 3. – Температурні розподіли $T_1(x, y)$ і $T_2(x, y)$ [для $\delta_1 = 0,01, \delta_2 = 0,02$].

2. Для різних розмірів тістової заготовки (частотні характеристики плити для конструктивних схем, що розглядаються, $\nu_1 = 10, \nu_2 = 10$; $\delta_1 = 0,02, \delta_2 = 0,02$).

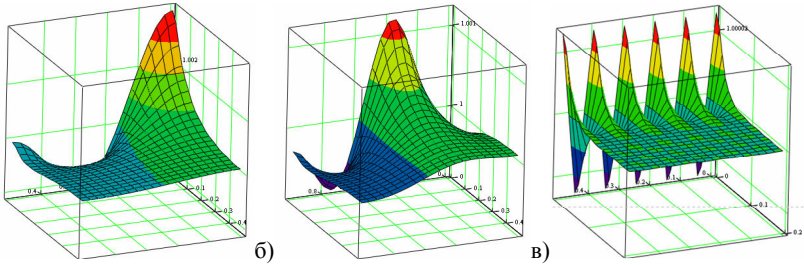


Рис. 4. – Температурні розподіли $T_1(x, y)$ при розмірах заготовки: а) $l_1 \times l_2 = 0,5 \times 0,5$; б) $l_1 \times l_2 = 1 \times 0,5$; в) $l_1 \times l_2 = 0,5 \times 0,2$.

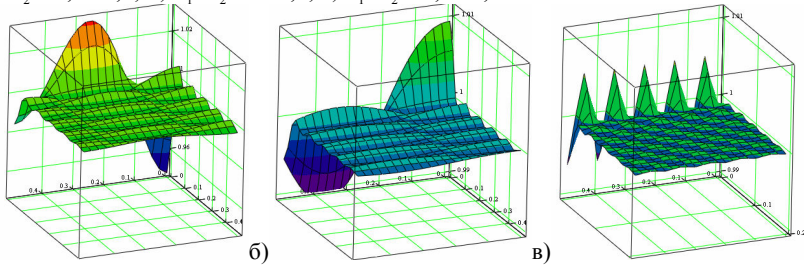


Рис. 5. – Температурні розподіли $T_2(x, y)$ при розмірах заготовки а) $l_1 \times l_2 = 0,5 \times 0,5$; б) $l_1 \times l_2 = 1 \times 0,5$; в) $l_1 \times l_2 = 0,5 \times 0,2$.

3. Для різних частотних характеристик теплових джерел плити (при розмірах тістової заготовки $l_1 \times l_2 = 1 \times 1$ і товщинами $\delta_1 = 0,02$, $\delta_2 = 0,02$).

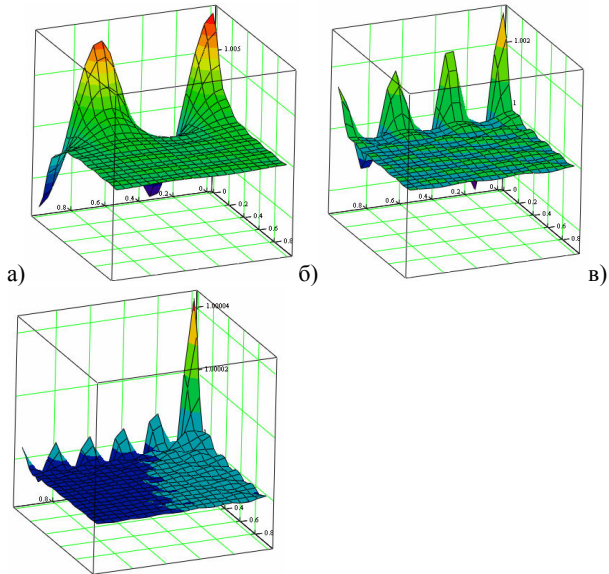


Рис. 6. – Температурні розподіли $T_1(x, y)$ при значенні частот а) $v_1 = 10, v_2 = 10$; б) $v_1 = 20, v_2 = 20$; в) $v_1 = 40, v_2 = 40$.

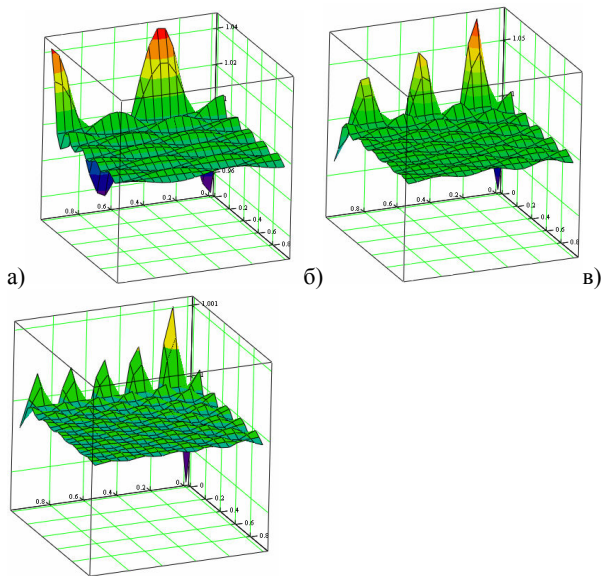


Рис. 7. – Температурні розподіли $T_2(x, y)$ при значенні частот а) $\nu_1 = 10, \nu_2 = 10$; б) $\nu_1 = 20, \nu_2 = 20$; в) $\nu_1 = 40, \nu_2 = 40$.

З наведених розподілів видно, що: при зміні товщини тістової заготовки суттєвих змін у температурному розподілі $T_1(x, y)$ не спостерігається, на відміну від температурного розподілу $T_2(x, y)$, де при збільшенні товщини плити до $\delta_2 = 0,02$ м значення максимального відхилення зменшилося і не перевищує 5 %; при зміні розмірів тістової заготовки чітко видно періодичність коливання температур T_1 і T_2 уздовж межі $y = 0$ та спостерігається зменшення амплітуди коливання температур T_1 і T_2 , а при наближенні у до одиниці T_1 і T_2 також прямують до одиниці; при збільшенні частот зменшуються періоди коливань значень температур вздовж осі x і суттєво зменшується відхилення температури $T_1(x, y)$. При частоті 10 відхилення складає 1-1,5%, при частоті 20 – 0,3 %, при частоті 40 – 0,005%.

Запропонований підхід до моделювання процесів теплопереносу у двовз'язних термічних (двокомпонентних, бітермічних) середовищах з різними теплофізичними характеристиками та наявністю просторово розподілених теплових джерел (стоків) і різними крайовими й інтерфейсними умовами теплопереносу (теплообмін, градієнтні умови теплопроникності, теплонепроникності тощо) з використанням сучасних ефективних методів математичної фізики й теорії крайових задач дозволяє здійснювати числовий аналіз і просторове графічне моделювання, аналізуючи двовимірні температурні розподіли та градієнти температурних розподілів взаємодіючих середовищ (нагрівального і теплоспоживального зокрема) через систему складних інтерфейсних взаємодій на теплообмінних межах, а також шляхом оптимального проектування конструктивних схем просторово розподілених теплових джерел (джерел теплопостачання, каналів або стоків тепловідведення) і вибору характеристик їх інтенсивності (амплітудних і частотних) забезпечувати задані технологічні температурні розподіли на необхідних поверхнях технологічних середовищ різної конструкції.

У **третьому розділі** розроблено узагальнені моделі й одержано точні розв'язки стаціонарних та нестаціонарних задач теплопереносу в тонких циліндрично-ізотропних і клиновидних циліндрично-ізотропних пластинах різної геометрії в циліндричній системі координат у припущеннях другого розділу.

Стаціонарні та нестаціонарні процеси теплопереносу в пластині, що розглядаються, математично описують скалярні величини

$$t(r, \varphi, z) = {}_1(r, \varphi) + \frac{z}{\delta} T_2(r, \varphi); z \in (-\delta; \delta), (r, \varphi) \in D \subset R^2, \quad (13)$$

$$t(\tau, r, \varphi, z) = T_1(\tau, r, \varphi) + \frac{z}{\delta} T_2(\tau, r, \varphi), \tau > 0, z \in (-\delta; \delta), (r, \varphi) \in D \subset R^2, \quad (14)$$

де пара функцій $T_1(\dots), T_2(\dots)$ є обмеженим у відповідній області 2π -періодичним щодо кутової змінної φ розв'язком еліптичної

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) T_1 - \frac{\alpha_+}{\Lambda} T_1 - \frac{\alpha_-}{\Lambda} T_2 = -f_1(r, \varphi), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) T_2 - \frac{3}{\Lambda} \left(\alpha_+ + \frac{4}{r_z} \right) T_2 - \frac{3\alpha_-}{\Lambda} T_1 = -f_2(r, \varphi) \end{cases}$$

чи параболічної системи диференціальних рівнянь відповідно

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) T_1 + \frac{\alpha_+}{C} T_1 + \frac{\alpha_-}{C} T_2 = af_1(\tau, r, \varphi), \\ \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) T_2 + \frac{3}{C} \left(\alpha_+ + \frac{4}{r_z} \right) T_2 + \frac{3\alpha_-}{C} T_1 = af_2(\tau, r, \varphi) \end{cases}$$

з крайовими чи початково-крайовими умовами залежно від геометрії пластини.

Методом інтегральних перетворень Фур'є за кутовою змінною та відповідних інтегральних перетворень за радіальною змінною одержано точні розв'язки модельних задач стаціонарного та нестаціонарного процесів теплопереносу для необмеженої тонкої циліндрично-ізотропної пластини з круговим отвором і клиновидної пластини з вирізом у вигляді кругового сектора; тонкої циліндрично-ізотропної кругової пластини й пластини у вигляді кругового сектора; тонкої циліндрично-ізотропної кільчастої пластини й кільчастої клиновидної пластини.

Як наслідки із загальних структур розв'язків одержано розв'язки відповідних математичних моделей процесів теплопереносу у випадках, коли коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь пластини рівні й задача теплопереносу несиметрична або симетрична відносно серединної площини пластини.

Проведено детальний аналіз важливих в інженерній практиці модельних задач для випадків задання на ділянках межі пластини: розподілу температури на поверхні пластини в будь-який момент часу; густини теплового потоку; температури навколишнього середовища та закону теплообміну між поверхнею тіла й навколишнім середовищем та їх можливих комбінацій.

У п. 3.4 проведено аналітичне та комп'ютерне моделювання стаціонарного теплопереносу в процесах випікання тонких плоских циліндричних тістових заготовок, у результаті якого отримано просторово-розподілені циліндричні температурні безрозмірні профілі: а) кругової поверхні нагрівальної плити T_1 з точково-розподіленими по радіальній координаті осесиметричними джерелами нагріву; б) двовимірний циліндричний температурний профіль циліндричної заготовки $T_2(\varphi, r)$.

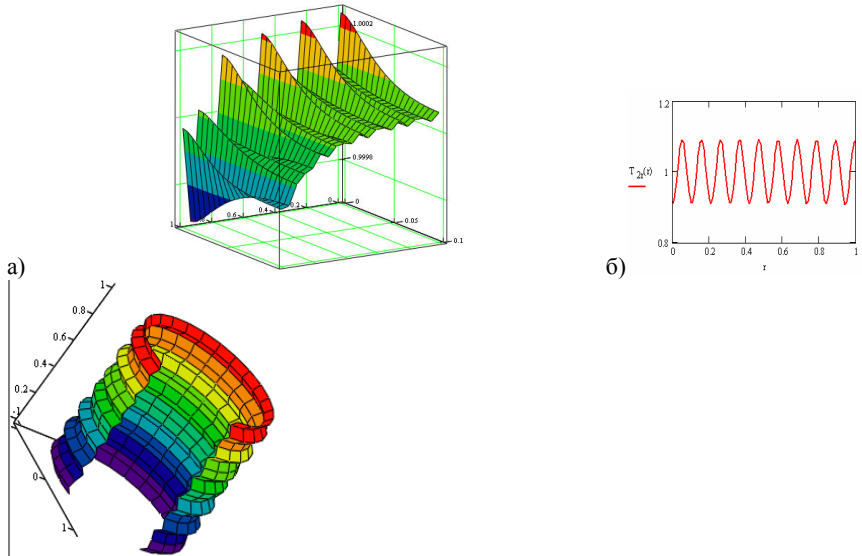


Рис. 8. – Температурні профілі при $\nu = 60$.

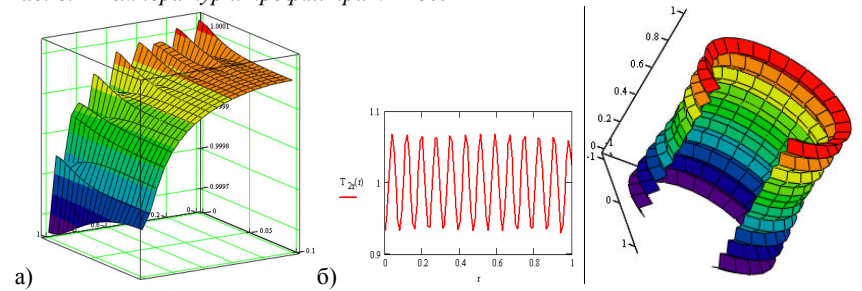


Рис. 9. – Температурні профілі при $\nu = 80$.

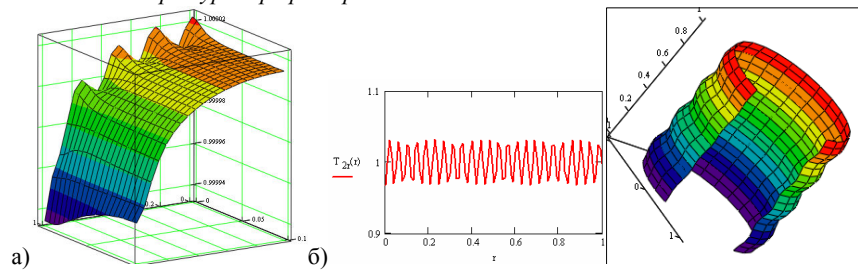


Рис. 10. – Температурні профілі при $\nu = 150$.

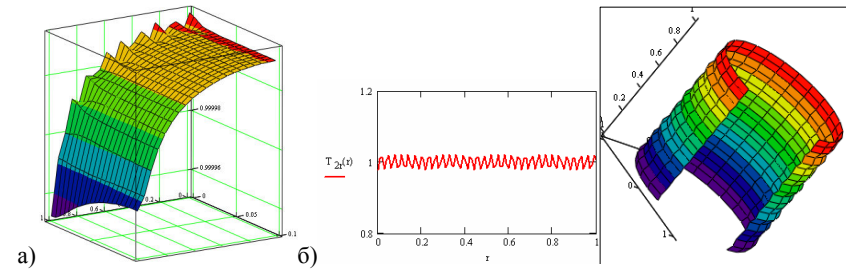


Рис. 11. – Температурні профілі при $\nu = 200$.

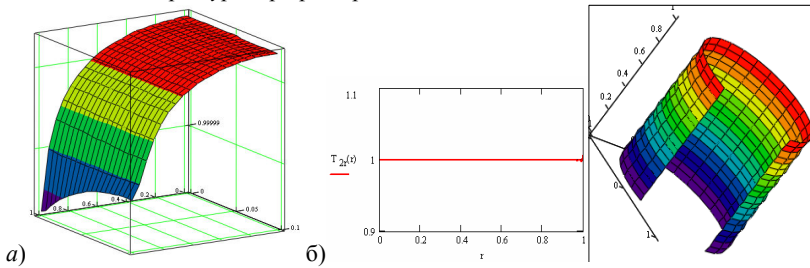


Рис. 12. – Температурні профілі при $\nu = 300$.

З наведених розподілів видно, що просторово розподілені безрозмірні температурні розподіли при зміні радіальної складової частотної теплової густини ν у діапазоні $60\text{--}300\text{ м}^{-1}$ значною мірою еволюціонують від суттєво коливних форм до рівномірних затухаючих, забезпечуючи у такий спосіб високий ступінь однорідності нагріву.

Проведений числовий аналіз дає можливість одержати уточнені параметри теплової кінетики для складних систем нагріву, отримати візуальні картини температурних полів і їх градієнтів, проводити оцінки й аналіз впливу різних характеристик нагріву на загальний перебіг процесу та загалом здійснювати оптимальне керування режимами нагріву досліджуваних теплових систем з позиції енергозбереження та інших техніко-технологічних критеріїв.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеним науковим дослідженням, в якому розв'язано наукові задачі моделювання процесів теплопереносу в тонких пластинах з урахуванням залежності температурного поля від різних коефіцієнтів теплообміну з бічних поверхонь пластини й несиметричності задачі теплопереносу відносно її серединної площини.

У роботі одержано такі наукові й практичні результати:

1. За найбільш загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності вперше розроблено математичні моделі стаціонарного й нестаціонарного процесів теплопереносу в тонких пластинах різної конструкції у випадку, коли задача теплопереносу несиметрична відносно серединної площини пластини та коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь пластини

різні, а також побудовано й досліджено моделі випікання тонких плоских тістових заготовок.

2. Методом інтегральних перетворень Фур'є одержано у замкнутому вигляді точні розв'язки модельних задач стаціонарного та нестаціонарного процесів теплопереносу для пластин різної конструкції (пластини у вигляді прямокутного клина, смуги-пластини, напівсмуги-пластини, пластини у вигляді прямокутника).
3. Методом інтегральних перетворень Фур'є за кутовою змінною та інтегральних перетворень за радіальною змінною, відповідно до геометрії пластини, одержано у замкнутому вигляді точні розв'язки задач математичного моделювання стаціонарного та нестаціонарного процесів теплопереносу для циліндрично-ізотропних і клиновидних циліндрично-ізотропних пластин.
4. Як наслідки із загальних структур одержано розв'язки відповідних математичних моделей у випадках, коли коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь пластини рівні й задача теплопереносу несиметрична або симетрична відносно серединної площини пластини. Проведено аналіз нових модельних задач для випадків задання на межі пластин: розподілу температури на поверхні пластини в будь-який момент часу; густини теплового потоку; температури навколишнього середовища та закону теплообміну між поверхнею тіла й навколишнім середовищем, а також їх можливих комбінацій.
5. Аналітично та чисельно змодельовано стаціонарний і нестаціонарний теплоперенос у процесах випікання тонких плоских тістових заготовок прямокутної та кругової форми.
6. На основі числових розрахунків встановлено:
 - пропонується підхід до математичного моделювання стаціонарних та нестаціонарних процесів теплопереносу у двозв'язних термічних середовищах з різними теплофізичними характеристиками та наявністю просторово розподілених температурних джерел (стоків) і різними крайовими й інтерфейсними умовами теплопереносу (теплообмін, градієнтні умови теплопроникності, теплонепроникності тощо) з використанням сучасних ефективних методів математичної фізики і теорії крайових задач (інтегральні перетворення Фур'є, фундаментальні функції, функції Коші та Гріна тощо) дозволяє здійснювати інтенсифікацію внутрішньої кінетики теплопереносу з урахуванням впливу конструктивних і режимних параметрів та механізмів впливу теплових джерел;
 - аналізуючи двовимірні температурні розподіли та градієнти температурних розподілів взаємодіючих середовищ (нагрівального і теплоспоживального зокрема) через систему складних інтерфейсних взаємодій на теплообмінних межах, можна здійснювати числовий аналіз та просторове графічне моделювання;
 - оптимальне проектування конструктивних схем просторово розподілених температурних джерел (джерел теплопостачання, каналів або стоків тепловідведення), вибір характеристик їх інтенсивності (амплітудних і частотних /густинних/) дозволяє забезпечувати задані технологічні температурні розподіли на необхідних поверхнях технологічних середовищ різної конструкції.

7. Проведений числовий аналіз уможливилює обґрунтування більш рівномірних режимів нагрівання та теплопередачі, що загалом суттєво впливає на енерго- та ресурсозберігаючі показники теплоенергетичних і теплонагрівальних установок.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Громик А.П. Стаціонарні температурні поля в ізотропній смузі-пластинці / А.П. Громик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць. – К. : Ін-т математики НАН України, 1994. – Вип. 7. – С. 64-73.
2. Громик А.П. Нестационарні температурні поля в ізотропній смузі-пластинці / А.П. Громик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць. – К. : Ін-т математики НАН України, 1995. – Вип. 8. – С. 62-67.
3. Громик А.П. Стаціонарна задача теплопровідності в ізотропній напівсмузі-пластинці / А.П. Громик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць. – К. : Ін-т математики НАН України, 1995. – Вип. 9. – С. 161-168.
4. Громик А.П. Стаціонарні температурні поля в ізотропній пластинці у вигляді прямокутного клина / А.П. Громик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць. – К. : Ін-т математики НАН України, 1996. – Вип. 11. – С. 91-98.
5. Громик А.П. Нестационарні температурні поля в ізотропній пластинці у вигляді прямокутного клина / А.П. Громик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць. – К. : Ін-т математики НАН України, 1996. – Вип. 12. – С. 53-61.
6. Громик А.П. Нестационарна задача теплопровідності в ізотропній прямокутній пластинці / А.П. Громик, І.М. Конет // Задачи со свободными границами и нелокальные задачи для нелинейных параболических уравнений : сб. науч. трудов. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 23-26.
7. Громик А.П. Стаціонарна крайова задача теорії теплопровідності тонких циліндрично-ізотропних кільчастих пластин / А.П. Громик // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. праць. – К. : Ін-т математики НАН України, 1999. – Вип. 4. – С. 51-58.
8. Громик А.П. Стаціонарна задача теплопровідності для тонких циліндрично-ізотропних кругових пластин / А.П. Громик, І.М. Конет // Доповіді НАН України. Математика, природознавство, технічні науки. – 1999. – № 9. – С. 50-54.
9. Громик А.П. Нестационарна крайова задача теорії теплопровідності тонких циліндрично-ізотропних кругових пластин / А.П. Громик, І.М. Конет // Доповіді НАН України. Математика, природознавство, технічні науки. – 1999. – № 10. – С. 16-20.
10. Громик А.П. Стаціонарні та нестационарні температурні поля у тонких необмежених циліндрично-ізотропних пластинках з круговим отвором / А.П. Громик // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2000. – Т. 5. – № 3. – С. 123-129.
11. Громик А.П. Нестационарна крайова задача теплопровідності тонких

- циліндрично-ізотропних кільчастих пластин / А.П. Громик // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. праць. – К. : Ін-т математики НАН України, 2000. – Вип. 5. – С. 91-97.
12. Громик А.П. Нестационарна крайова задача теплопроводности для тонкой цилиндрично-изотропной пластины в виде кругового сектора / А.П. Громик // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. праць. – Чернівці : Прут, 2001. – Вип. 6. – С. 13-22.
 13. Громик А.П. Математичне моделювання нестационарних температурних полів в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді необмеженого кільчастого сектора / А.П. Громик // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2005. – Т. 10. – № 2. – С. 164-174.
 14. Громик А.П. Математичне моделювання нестационарних процесів теплопроводности в тонкій необмеженій клиновидній циліндрично-ізотропній пластині / А.П. Громик // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон : ХНТУ, 2006. – Вип. 2 (25). – С. 174-178.
 15. Громик А.П. Математичне моделювання стаціонарного теплопереносу в процесах випікання тонких плоских тістових заготовок / А.П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання: Технічні науки : зб. наук. праць / Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – Кам'янець-Подільський : К-ПНУ ім. І. Огієнка, 2009. – Вип. 2. – С. 48-58.
 16. Громик А.П. Математичне моделювання нестационарного теплопереносу в процесах випікання тонких плоских тістових заготовок / А.П. Громик // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – Т. 14. – № 4. – С. 146-154.
 17. Громик А.П. Математичне моделювання нестационарного теплопереносу в тонкій пластині у вигляді кільчастого сектора / А.П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання: Технічні науки : зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – Кам'янець-Подільський : К-ПНУ ім. І. Огієнка, 2010. – Вип. 3. – С. 64-67.
 18. Громик А.П. Математичне моделювання стаціонарного теплопереносу в процесах випікання тонких плоских циліндричних тістових заготовок / А.П. Громик // Математичне та комп'ютерне моделювання: Технічні науки : зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. – Кам'янець-Подільський : К-ПНУ ім. І. Огієнка, 2010. – Вип. 4. – С. 84-95.
 19. Громик А.П. Стаціонарна задача теплопроводности в изотропной прямоугольной пластинке / А.П. Громик // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения : сб. науч. трудов. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 78-79.
 20. Громик А.П. Математичне моделювання нестационарних температурних полів в тонкій ізотропній напівмузі-пластинці / А.П. Громик // Математическое моделирование : сб. науч. трудов. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 1996. – С. 81-84.
 21. Громик А.П. Стаціонарні та нестационарні температурні поля в безкрайній

- тонкій ізотропній пластинці / А.П. Громик // Прикладная математика и математическое моделирование : труды VII Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Феодосия, 1997. – С. 58-61.
22. Громик А.П. Нестационарная задача теплопроводности для изотропной смуги-пластинки / А.П. Громик // Вісник Державного університету "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – № 337. – Т. 2. – С. 206-210.
 23. Громик А.П. Інтегральні зображення розв'язків стаціонарних задач теплопроводності для циліндрично-ізотропних пластин / А.П. Громик // Восьма Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука : матеріали конф. – К., 2000. – С. 66.
 24. Громик А.П. Стаціонарна крайова задача теорії теплопроводності в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді кругового сектора / А.П. Громик // М.В. Остроградський – видатний математик, механік і педагог : матеріали Міжнар. конф., присвяченої 200-річчю з дня народження М.В. Остроградського. – Полтава : ПДПУ, 2001. – С. 21-23.
 25. Громик А.П. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопроводності для тонких циліндрично-ізотропних пластин / А.П. Громик // Дев'ята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука : матеріали конф. – К. : НТУУ (КПІ), 2002. – С. 60.
 26. Громик А.П. Стаціонарна крайова задача теплопроводності в тонкій необмеженій клиновидній циліндрично-ізотропній пластині / А.П. Громик // Проблеми математичного моделювання сучасних технологій : тези доп. міжнар. конф. – Хмельницький: ТУП, 2002. – С. 39.
 27. Громик А.П. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теорії теплопроводності для тонких клиновидних циліндрично-ізотропних пластин / А.П. Громик // Шості Боголюбовські читання: тези доп. міжнар. наук. конф. – К. : Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 59.
 28. Громик А.П. Математичне моделювання стаціонарних температурних полів в тонкій циліндрично-ізотропній пластині у вигляді необмеженого кільчастого сектора / А.П. Громик // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-метод. конф. – Київ-Кам'янець-Подільський : К-ПДУ, 2004. – С. 188-194.
 29. Громик А.П. Математичне моделювання стаціонарного теплопереносу в тонкій пластині у вигляді кільчастого сектора / А.П. Громик // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : зб. наук. праць за матеріалами четвертої міжнар. наук. конф. – Кам'янець-Подільський : К-ПНУ ім. І. Огієнка, 2010. – С. 38-50.

АНОТАЦІЯ

Громик А.П. Математичне моделювання процесів теплопереносу в тонких пластинах. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. –

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Тернопіль, 2012.

Дисертація присвячена питанням математичного моделювання процесів теплопереносу в тонких пластинах різної геометричної форми, що описуються декартовою чи циліндричною системою координат, та побудові й дослідженню моделі випікання тонких плоских тістових заготовок.

У роботі за найбільш загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності вперше розроблено математичні моделі стаціонарного й нестаціонарного процесів теплопереносу в тонких пластинах у випадку, коли задача теплопереносу несиметрична відносно серединної площини пластини і коефіцієнти теплообміну з бічних поверхонь пластини різні.

Методом головних розв'язків (фундаментальних функцій, функцій Коші та функцій Гріна) одержано у замкнутому вигляді точні розв'язки модельних крайових задач стаціонарного та нестаціонарного процесів теплопереносу для пластин різної конструкції. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Фур'є чи диференціальним оператором Бесселя.

Виконано аналітичне та комп'ютерне моделювання стаціонарного й нестаціонарного теплопереносу в процесах випікання тонких плоских тістових заготовок прямокутної та кругової форми.

Досліджено вплив конструктивних і частотних (густинних) характеристик теплових джерел плити нагріву для забезпечення рівномірного нагріву тістових заготовок різних розмірів та отримання просторово-розподілених температурних розподілів заготовок з рівномірною інтенсивністю розподілу температур на їх поверхні.

Ключові слова: математичне моделювання, теплоперенос, тонка пластина, диференціальні рівняння з частинними похідними, крайові задачі, задача Коші, інтегральні перетворення, комп'ютерне моделювання.

АННОТАЦИЯ

Громик А.П. Математическое моделирование процессов теплопереноса в тонких пластинах. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя, Тернополь, 2012.

Диссертационная работа посвящена вопросам математического моделирования процессов теплопереноса в тонких пластинах различной геометрической формы, описываемых декартовой или цилиндрической системами координат, а также построению и исследованию модели выпекания тонких плоских тестовых заготовок.

В работе при наиболее общих предположениях в пределах феноменологической теории теплопроводности впервые разработано математические модели стационарного и нестационарного процессов теплопереноса для тонких изотропных пластин различной геометрии в декартовой и цилиндрической системах координат.

Рассмотрен наиболее общий случай, когда задача теплопередачи асимметрична относительно срединной плоскости пластины и коэффициенты теплообмена с боковых поверхностей пластины разные. Как следствия выписаны решения для случаев, когда задача теплопередачи асимметрична или симметрична относительно срединной плоскости пластины и коэффициенты теплообмена с боковых поверхностей пластины равные.

Методом главных решений (фундаментальных функций, функций Коши и функций Грина) в замкнутом виде получены точные решения модельных краевых задач стационарного и нестационарного процессов теплопереноса для пластин разной конструкции (прямоугольный клин, полоса-пластина, полуполоса-пластина, прямоугольная пластина; неограниченная цилиндрически-изотропная пластина с круговым вырезом и неограниченная клиновидная цилиндрически-изотропная пластина с вырезом в виде кругового сектора, цилиндрически-изотропная круговая пластина и цилиндрически-изотропная пластина в виде кругового сектора, цилиндрически-изотропная кольчатая пластина и кольчатая клиновидная цилиндрически-изотропная пластина).

Для построения главных решений привлечены соответствующие интегральные преобразования для однородных сред, порожденные дифференциальным оператором Фурье (ось, полуось, сегмент), интегральные преобразования Фурье относительно угловой переменной, интегральные преобразования, порожденные дифференциальным оператором Бесселя (интегральные преобразования Вебера, Ганкеля 1-го и 2-го рода относительно радиальной переменной).

Как следствия из общих решений получены наиболее часто встречаемые в инженерной практике случаи модельных задач для задания на границе пластины: распределения температуры по поверхности пластины в любой момент времени; плотности теплового потока; температуры окружающей среды и закона теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой, а также их возможных комбинаций.

Выполнено аналитическое и компьютерное моделирование стационарного и нестационарного теплопереноса в процессах выпекания тонких плоских тестовых заготовок прямоугольной и круговой формы.

В результате компьютерного моделирования получено пространственно-распределенные температурные распределения заготовок с равномерной интенсивностью распределения температур на их поверхностях, на основании которых исследовано влияние конструктивных и частотных (плотностных) характеристик тепловых источников плиты нагревания для обеспечения равномерного нагревания тестовых заготовок разных размеров. Проведенный анализ дает возможность осуществлять обоснование более равномерных режимов нагревания и теплопереноса, что в целом существенно влияет на энерго- и ресурсосберегательные показатели теплоэнергетических и теплонагревательных установок.

Ключевые слова: математическое моделирование, теплоперенос, тонкая пластина, дифференциальные уравнения в частных производных, краевые задачи, задача Коши, интегральные преобразования, компьютерное моделирование.

SUMMARY

Hromyk A.P. Mathematical modeling of heat transfer in thin plates. – Manuscript.

Dissertation for Academic Degree of Candidate of Engineering Sciences by specialty 01.05.02 – mathematical modeling and numerical methods. – Ternopil National Ivan Pulu'y Technical University, Ternopil, 2012.

The thesis is devoted to mathematical modeling of heat transfer in thin plates of different geometry described by Cartesian or cylindrical coordinate system, and the construction and study of models of thin flat baking dough preparations.

In this dissertation, the most common assumptions within the phenomenological theory of heat was first formed mathematical models of stationary and non-stationary processes of heat transfer in thin plates where heat transfer problem is asymmetric relative to the median plane of the plate and the heat transfer coefficients of the lateral surfaces of the plate are different.

The method of principal solutions (basic functions, Cauchy functions and Green's functions) are obtained in closed form exact solutions of boundary value problems modeling stationary and non-stationary processes of heat transfer to plates of various designs. To construct the main solutions involving the generation of the corresponding integral transformations differential operator Fourier or Bessel differential operator.

Done the analytical and computer modeling of steady and unsteady heat transfer in the process of baking dough thin flat pieces of rectangular and circular shapes.

The influence of structural and frequency (density) characteristics of thermal sources of heating plate to ensure uniform heating of the dough pieces in different sizes and a spatially distributed temperature distributions billets with uniform intensity distribution of temperature at the surface.

Keywords: mathematical modeling, heat transfer, thin plate, partial differential equations, boundary value problems, Cauchy problem, integral transformation, computer modeling.