

Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра математичних методів в інженерії

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Конспект лекцій

для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання

Тернопіль 2015

Валяшек В.Б. Операційне числення. Конспект лекцій для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання. / Кривень В.А., Валяшек В.Б., Каплун А.В., Ясній О.П., – Тернопіль : в-во ТНТУ, 2015. – 25 с.

Укладачі: д. ф.- м. н., проф. Кривень В.А.,
к. ф.- м. н., доц. Валяшек В.Б.,
докт. пед. н., проф. Каплун А.В.,
к. т. н., доц., Ясній О.П.

Відповідальний за випуск: Валяшек В.Б.

Рецензент: к. ф.- м. н., доц. Цимбалюк Л.І.

Методичні вказівки розглянуто й схвалено на засіданні кафедри математичних методів в інженерії (протокол №7 від 20.01.2015р.)

Рекомендовано до друку методичною радою факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії (протокол №6 від 3 лютого 2015р.)

Лекція 1 Елементи операційного числення	4
<i>1.1 Вступ</i>	<i>4</i>
<i>1.2 Перетворення Лапласа. Оригінал та зображення.....</i>	<i>5</i>
<i>1.3 Обернене перетворення Лапласа.....</i>	<i>6</i>
Лекція 2 Властивості перетворення Лапласа	10
<i>2.1 Властивість лінійності</i>	<i>10</i>
<i>2.2 Теорема подібності</i>	<i>11</i>
<i>2.3 Диференціювання оригінала</i>	<i>11</i>
<i>2.4 Диференціювання зображення</i>	<i>12</i>
<i>2.5 Теорема зміщення</i>	<i>12</i>
<i>2.6 Теорема загалювання</i>	<i>13</i>
<i>2.7 Інтегрування оригінала</i>	<i>14</i>
<i>2.8 Інтегрування зображення.....</i>	<i>14</i>
<i>2.9 Теорема множення</i>	<i>15</i>
<i>2.10 Теорема розкладу</i>	<i>16</i>
Лекція 3 Застосування операційного числення.....	18
<i>3.1 Таблиця оригіналів та зображень</i>	<i>18</i>
<i>3.2 Звичайні диференціальні рівняння.....</i>	<i>19</i>
<i>3.3 Системи диференціальних рівнянь</i>	<i>22</i>
<i>3.4 Диференціальні рівняння в частинних похідних.....</i>	<i>23</i>
Перелік посилань	25

ЛЕКЦІЯ 1

ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1 Вступ

В позаминому столітті багато математиків займалось так званим *символічним численням*. В основі цього числення лежить побудова математичного аналізу як системи формальних операцій над символом $p = \frac{d}{dt}$ (t - незалежна змінна). Наприклад, n -а похідна функції

$x = x(t)$ є результатом дії на x символу $p^n = \frac{d^n}{dt^n}$, ліва частина лінійного диференційного рівняння зі сталими коефіцієнтами $L[x] = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x$ - як результат дії на x

символа $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$, операція інтегрування $\int_0^t x(t) dt$ розглядається як

застосування символу $\frac{1}{p}$, так що $\frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t dt = t$, $\frac{1}{p^2} \cdot 1 = \frac{t^2}{2}$, ..., $\frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$, і т.д.

Символічне числення виявилось доволі зручним для розв'язування різних задач, пов'язаних з лінійними диференційними рівняннями. Його популяризації в значній мірі посприяв англійський інженер-електрик *О. Хевісайд*, який успішно використовував символічне числення в електротехнічних розрахунках.

Для ілюстрації методу Хевісайда наведемо розв'язання простого диференційного рівняння $x' - x = 1$

з початковою умовою $x(0) = 0$. Замінюючи диференціювання множенням на p , дістанемо замість диференційного рівняння $px - x = 1$, звідки $x = \frac{1}{p-1} \cdot 1$ і після формальних

перетворень дістаємо

$$x = \frac{1}{p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \cdot 1 = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} + \dots \right) \cdot 1.$$

Враховуючи сказане вище відносно символів $\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p^n}, \dots$, знаходимо остаточно

$$x = \int_0^t \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) dt = \int_0^t e^t dt = e^t - 1.$$

В правильності отриманого розв'язку можна переконатись безпосередньою перевіркою.

Однак Хевісайд ніскільки не турбувався про обґрунтування застосованих ним методів і в багатьох випадках отримував хибні результати. Обґрунтування символічного чи, як тепер його називають, *операційного методу*, було дано тільки в двадцятих роках минулого століття *Бромвічем* та *Карсоном*, які пов'язали цей метод з відомим із теорії функцій комплексної змінної методом інтегральних перетворень. Його успішно використовували *Коші*, *Лаплас* та інші математики. При цьому символ (оператор) отримав нове тлумачення як комплексна змінна $p = s + i\sigma$, а разом з ним нове трактування отримав і сам операційний метод.

Нехай, наприклад, потрібно знайти функцію $x(t)$ дійсної змінної t з деякого рівняння, яке містить цю функцію під знаками похідних та інтегралів. Операційний метод розв'язання задачі зводиться до таких етапів: 1) від шуканої функції $x(t)$ переходять до функції $X(p)$ комплексної змінної p - „зображення” $x(t)$; 2) над зображенням $X(p)$ проводять операції, що відповідають заданим операціям над $x(t)$ - дістають „операторне рівняння” відносно

$X(p)$. При цьому операції над зображенням виявляються значно простішими, наприклад: диференціюванню відповідає множення на змінну p , інтегруванню – ділення на p і т.д.; 3) отримане операторне рівняння розв'язують відносно $X(p)$, що зазвичай зводиться до простих алгебраїчних дій; 4) від знайденого зображення $X(p)$ переходять до оригіналу $x(t)$, який і буде шуканою функцією.

Зауваження 1.1. Застосування операційного метода можна порівняти з логарифмуванням, коли: 1) від чисел переходять до логарифмів; 2) над логарифмами проводять дії, які відповідають діям над числами, причому множенню чисел відповідає простіша операція додавання логарифмів і т.д., 3) від знайденого логарифма знову повертаються до числа.

1.2 Перетворення Лапласа. Оригінал та зображення

Функцією-оригіналом чи просто оригіналом називатимемо довільну комплекснозначну функцію $f(t)$ дійсного аргументу t , яка задовольняє такі умови:

1⁰ Функція $f(t)$ задовольняє умову Гьольдера при всіх $t \in \mathbf{R}$, за винятком окремих точок, де вона має розриви першого роду, причому на кожному скінченному інтервалі таких точок скінченна кількість. Це означає, що для кожного t (крім указаних виключених точок) існують додатні сталі $A > 0$, $\alpha \leq 1$ та h_0 такі, що

$$|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha \quad (1.1)$$

при всіх $h \in \mathbf{R}$, $|h| \leq h_0$.

2⁰ $f(t) = 0$ при всіх від'ємних t .

3⁰ $f(t)$ росте при $t \rightarrow +\infty$ не швидше деякої показникової функції, тобто існують такі сталі $M > 0$, $s_0 \geq 0$, що для всіх t виконується

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}. \quad (1.2)$$

Число s_0 назвемо показником росту $f(t)$; для обмежених оригіналів можна, очевидно, взяти $s_0 = 0$

Зауваження 1.2. Легко бачити, що умові 1⁰ задовольняє кожна кусково диференційовна на $(-\infty; +\infty)$ функція $f(t)$.

З погляду фізичних застосувань умови 1⁰ та 3⁰ не потребують пояснень – вони, очевидно, виконуються для більшості функцій $f(t)$, що описують фізичні процеси (змінна t інтерпретується як час). Умова 2⁰ на перший погляд здається штучною. Однак слід мати на увазі, що операційний метод пристосований до задач, які приводять до розв'язування диференціальних рівнянь з даними початковими умовами. В таких задачах уся інформація про хід процесу до моменту початку спостережень, за який, звичайно, можна взяти момент $t = 0$, міститься в початкових умовах. Отже, і умова 2⁰ цілком природна.

Найпростішою функцією-оригіналом є так звана *одична функція*

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Очевидно, множення функції $\varphi(t)$ на $\eta(t)$ „гасить” цю функцію для $t < 0$ і залишає без змін для $t \geq 0$: якщо функція $\varphi(t)$ задовольняє умовам 1⁰ та 3⁰ і не задовольняє 2⁰, то добуток

$$f(t) = \eta(t)\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varphi(t), & t > 0 \end{cases}$$

задовольнятиме і умові 2⁰, отже, буде оригіналом (наприклад, $\eta(t)\sin \beta t$, $\eta(t)t^n$, $\eta(t)e^{\alpha t}$ і т.д.). Для простоти запису опускатимемо, як правило, множник $\eta(t)$, умовившись раз

назавжди, що всі функції, які ми будемо розглядати, дорівнюють нулю для від'ємних t (наприклад, замість $\eta(t)$ писатимемо 1, замість $\eta(t)\sin \beta t$ - просто $\sin \beta t$ і т. д.).

Означення 1.1. Зображенням оригіналу $f(t)$ називається функція комплексної змінної $p = s + i\sigma$, яка визначається співвідношенням

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.3)$$

Інтеграл (1.3) називається *перетворенням Лапласа*, тому його ще позначатимемо $L\{f(t)\}$.

Фразу „оригінал $f(t)$ має своїм зображенням $F(p)$ ” чи „ $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$ ” записуватимемо символом

$$f(t) \leftarrow F(p) \quad \text{або} \quad F(p) \rightarrow f(t).$$

Теорема 1.1. Для кожного оригіналу $f(t)$ зображення $F(p)$ визначає в півплощині $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > s_0\}$, де s_0 показник росту $f(t)$, і є в цій півплощині аналітичною функцією.

Д о в е д е н н я. При $\operatorname{Re} p = s > s_0$ інтеграл (1.3) абсолютно збігається, бо за нерівністю (10.2) він мажоруюється збіжним інтегралом

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq \int_0^{+\infty} M e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}. \quad (1.4)$$

Крім того, в будь-якій півплощині $\operatorname{Re} p = s \geq s_1 > s_0$ інтеграл, який дістаємо з інтеграла (1.4) диференціюванням по p , збігається рівномірно, бо також мажоруюється збіжним інтегралом, не залежним від p :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)te^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} M te^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{(s-s_0)^2}. \quad (1.5)$$

Отже, в кожній точці півплощини $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > s_0\}$ функція $F(p)$ має похідну, тому вона аналітична. Теорема доведена.

Зауваження 1.3. Перетворення Лапласа (1.3), взагалі кажучи, визначає зображення $F(p)$ тільки в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$. Разом з тим в більшості практичних задач область визначення зображення значно ширша від цієї півплощини.

Зауваження 1.4. Якщо точка p прямує до нескінченності так, що $\operatorname{Re} p = s$ необмежено зростає, то $F(p)$ прямує до нуля:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(p) = 0. \quad (1.6)$$

Це твердження безпосередньо випливає з нерівності (1.4).

З (1.6) випливає, що $F(p) \rightarrow 0$, якщо $p \rightarrow \infty$, залишаючись всередині довільного кута $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg p < \frac{\pi}{2} - \delta$, де $\delta > 0$ як завгодно мале, причому ця збіжність рівномірна відносно $\arg p$. Якщо, зокрема, $F(p)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці, то $F(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ по довільному шляху, тобто $F(p)$ має нуль в нескінченності.

1.3 Обернене перетворення Лапласа

Розглянемо інтеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp, \quad (1.7)$$

взятий вздовж прямої $\operatorname{Re} p = a > 0$, яка проходиться знизу вгору. Позначимо ще через Γ_R та Γ'_R частини кола

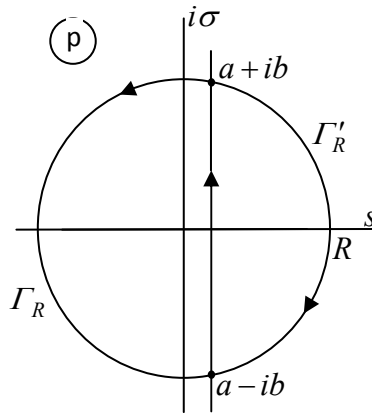


Рисунок 1.1

$|p| = R$, які знаходяться відповідно ліворуч та праворуч від прямої $Re p = a$, а через $a - ib$ та $a + ib$ - кінці Γ_R та Γ'_R (рис. 1.1).

Нехай $t > 0$; оскільки $\frac{1}{p} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$ рівномірно відносно $arg p$, то за лемою Жордана з курсу ТФКЗ (замінюємо в лемі iz на p) маємо:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0.$$

Тому з теореми Коші про лишки, згідно з якою

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 2\pi i \operatorname{res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p} = 2\pi i,$$

при $R \rightarrow +\infty$ дістанемо

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1 \quad (t > 0).$$

Якщо $t < 0$, то за тією ж лемою Жордана (замінюємо тепер в лемі iz на $-p$) маємо:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma'_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

а за теоремою Коші

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{\Gamma'_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

звідки при $R \rightarrow +\infty$ дістаємо

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 \quad (t < 0).$$

Отже, інтеграл (1.7) являє собою одиничну функцію. Зрозуміло, що, якщо в (1.7) замінити t на $t - \tau$, де τ - фіксоване число, то дістанемо функцію

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} dp = \eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (1.8)$$

Підставляючи в (1.8) $\tau = \tau_1$, а потім $\tau = \tau_2 > \tau_1$ і віднімаючи отриманий другий інтеграл від першого, дістаємо представлення ступінчатої функції

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p} dp = \begin{cases} 0, & t < \tau_1, \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2, \\ 0, & t > \tau_2. \end{cases} \quad (1.9)$$

Нехай тепер $f(t)$ - довільний оригінал. Зафіксуємо якесь $u > 0$ і розіб'ємо відрізок $[0; u]$ на частини з допомогою точок τ_k : $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = u$. Розглянемо ступінчасту функцію $h(t)$, яку визначимо так: $h(t) = 0$, якщо $t \notin [0; u]$; $h(t) = f(\tau_k)$, якщо $\tau_k < t < \tau_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Позначимо ще $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Скориставшись представленням (1.9), функцію $h(t)$ можемо подати у вигляді інтеграла

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) e^{-p\tau_k} \Delta\tau_k \right) dp, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\text{де } \Delta\tau_k = \frac{1 - e^{-p\Delta\tau_k}}{p} = \Delta\tau_k - \frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!} p + \frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!} p^2 - \dots$$

Якщо тепер число n збільшувати так, щоб $\max \Delta\tau_k$ прямувало до нуля, то $\Delta\tau_k$ буде нескінченно малою величиною, еквівалентною $\Delta\tau_k$, і сума в дужках у формулі (1.10), яка мало відрізняється від інтегральної для функції $f(\tau)e^{-p\tau}$ на проміжку $[0; u]$, перейде в інтеграл. Тому логічно очікувати, що ми дістанемо інтегральне представлення функції $f(t)$ на інтервалі $(0; u)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left(\int_0^u f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) dp.$$

Спрямувавши u до $+\infty$, дістанемо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left(\int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right) dp.$$

Але інтеграл в дужках є перетворенням Лапласа функції $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (1.11)$$

Тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) називається *оберненим перетворенням Лапласа*.

Сформулюємо остаточний результат.

Теорема 1.2. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ - зображенням для $f(t)$, то в будь-якій точці t , де $f(t)$ задовольняє умові Гьольдера, справедлива рівність (1.12), де інтеграл береться вздовж довільної прямої $Re p = a > s_0$ в розумінні головного значення.

Доведення цієї теореми опускаємо. Його можна знайти, наприклад, в [4].

Безпосередньо з теореми 1.2 впливає така теорема.

Теорема 1.3. Оригінал $f(t)$ цілком визначається своїм зображенням $F(p)$ з точністю до значень в точках розриву функції $f(t)$.

Справді, за теоремою 1.2 значення оригіналу в точці його неперервності виражається через зображення $F(p)$ за формулою (1.12). Значення оригіналу в точках розриву, очевидно, не впливають на зображення.

На завершення лекції наведемо ще, також без доведення, умови, достатні для того, щоб задана функція комплексної змінної $F(p)$ була зображенням деякого оригіналу.

Теорема 1.4. Якщо функція $F(p)$ аналітична в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, прямує до нуля при $p \rightarrow \infty$ в довільній півплощині $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ рівномірно відносно $\arg p$ і інтеграл

$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp$ абсолютно збігається, то $F(p)$ є зображенням функції

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp .$$

ЛЕКЦІЯ 2 ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

В цій лекції ми розглянемо ряд властивостей, які складають основу операційного числення та його застосувань.

Надалі завжди позначатимемо через $f(t)$, $g(t)$, ... оригінали, а через $F(p)$, $G(p)$, ... - їхні зображення.

2.1 Властивість лінійності

Для довільних комплексних сталих \tilde{n}_1 та \tilde{n}_2 функція $\tilde{n}_1 f(t) + \tilde{n}_2 g(t)$ буде оригіналом і при цьому

$$\tilde{n}_1 f(t) + \tilde{n}_2 g(t) \Leftrightarrow \tilde{n}_1 F(p) + \tilde{n}_2 G(p). \quad (2.1)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} L\{\tilde{n}_1 f(t) + \tilde{n}_2 g(t)\} &= \int_0^{+\infty} (\tilde{n}_1 f(t) + \tilde{n}_2 g(t)) e^{-pt} dt = \\ &= \tilde{n}_1 \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \tilde{n}_2 \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt = \tilde{n}_1 F(p) + \tilde{n}_2 G(p). \end{aligned}$$

Приклад 2.1. Для довільного α , яке може бути й комплексним, знайдемо

$$\begin{aligned} L\{e^{\alpha t}\} &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \left. \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p} \right|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{\alpha-p} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-p)t} - e^0 \right) = \frac{1}{\alpha-p} (0-1) = \frac{1}{p-\alpha}, \end{aligned}$$

бо $Re(\alpha-p) < 0$. Отже,

$$e^{\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p-\alpha}. \quad (2.2)$$

Як частковий випадок, при $\alpha = 0$ дістаємо

$$1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}. \quad (2.3)$$

Скориставшись властивістю лінійності та співвідношенням (2.2), маємо

$$L\{\sin t\} = L\left\{ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right\} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{p^2+1},$$

тобто

$$\sin t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}. \quad (2.4)$$

Аналогічно, використовуючи формули

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

Матимемо

$$\cos t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2+1}, \quad \operatorname{sh} t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2-1}, \quad \operatorname{ch} t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2-1}. \quad (2.5)$$

2.2. Теорема подібності

Для довільної сталої $\alpha > 0$ функція $f(\alpha t)$ буде оригіналом і при цьому має місце співвідношення

$$f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (2.6)$$

Справді, легко бачити, що при $\alpha > 0$ функція $f(\alpha t)$ задовольняє тим же умовам $1^0 - 3^0$, що й $f(t)$, отже, буде оригіналом. Поклавши $\alpha t = \tau$, бачимо, що $dt = \frac{d\tau}{\alpha}$ і $0 < \tau < +\infty$ при $0 < t < +\infty$. Тому

$$\begin{aligned} L\{f(\alpha t)\} &= \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\frac{\tau}{\alpha}} \frac{d\tau}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Приклад 2.2. Застосувавши теорему подібності до співвідношення (2.4), при матимемо

$$L\{\sin \beta t\} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{(p/\beta)^2 + 1} = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}, \quad \beta > 0,$$

тобто

$$\sin \beta t \leftarrow \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}. \quad (2.7)$$

Аналогічно зі співвідношень (2.5) дістанемо

$$\begin{aligned} \cos \beta t \leftarrow \frac{p}{p^2 + \beta^2}, \quad \text{sh } \beta t \leftarrow \frac{\beta}{p^2 - \beta^2}, \\ \text{ch } \beta t \leftarrow \frac{p}{p^2 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Зауваження 2.1. Співвідношення (2.7) та (2.8), які слушні при будь-яких комплексних β , можна отримати аналогічно до (2.4), використовуючи (2.2) з $\alpha = \beta$ та $\alpha = -\beta$.

2.3. Диференціювання оригіналу

Якщо функція $f(t)$ неперервна при $t \geq 0$ і $f'(t)$ є оригіналом то

$$f'(t) \leftarrow pF(p) - f(0). \quad (2.9)$$

Дійсно, переходячи до зображень і інтегруючи частинами, маємо:

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} &= \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} d(f(t)) = \\ &= \left(f(t) e^{-pt}\right) \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Оскільки $\text{Re } p = s > s_0$, то $\left|f(t) e^{-pt}\right| \leq M e^{-(s-s_0)t}$, і підставлення $t = +\infty$ в перший доданок дає нуль, підставлення ж $t = 0$ дає, очевидно, $-f(0)$; другий доданок дорівнює $pF(p)$, і тим самим співвідношення (2.9) доведене.

Відзначимо, зокрема, що, якщо $f(0) = 0$, то

$$f'(t) \leftarrow pF(p). \quad (2.10)$$

Зауваження 2.2. Якщо, крім $f'(t)$, оригіналом є також і $f''(t)$, то, застосовуючи формулу (2.9) двічі, дістаємо

$$\begin{aligned}
 f''(t) &= (f'(t))' \leftarrow \\
 &\leftarrow p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \\
 \text{і т. д. Якщо оригіналами є } f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t), \text{ то} \\
 f^{(n)}(t) &\leftarrow \\
 &\leftarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

де під $f^{(k)}(0)$ розуміємо $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$.

Двоїстою до розглянутої властивості є така.

2.4. Диференціювання зображення

Диференціювання зображення зводиться до множення на $-t$ оригіналу, і взагалі

$$F^{(n)}(p) \rightarrow (-1)^n t^n f(t). \tag{2.12}$$

Справді, оскільки $F(p)$ є в півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ аналітичною функцією, то її можна диференціювати скільки завгодно разів, і ми дістанемо

$$\begin{aligned}
 F'(p) &= \int_0^{+\infty} (f(t)e^{-pt})'_p dt = \int_0^{+\infty} (-tf(t))e^{-pt} dt, \\
 F''(p) &= \int_0^{+\infty} (-tf(t)e^{-pt})'_p dt = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt} dt, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt} dt,$$

що рівносильне співвідношенню (2.12).

Як приклад застосування даної властивості відзначимо, що із співвідношень (2.3) та (2.2) випливає

$$t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad t^n e^{\alpha t} \leftarrow \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}, \tag{2.13}$$

а зі співвідношень (2.7) та (2.8):

$$t \sin \beta t \leftarrow \frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}, \quad t \cos \beta t \leftarrow \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}, \tag{2.14}$$

$$t \operatorname{sh} \beta t \leftarrow \frac{2\beta p}{(p^2 - \beta^2)^2}, \quad t \operatorname{ch} \beta t \leftarrow \frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}. \tag{2.15}$$

2.5. Теорема зміщення

Для довільного комплексного a виконується

$$F(p - a) \rightarrow e^{at} f(t) \tag{2.16}$$

(„зміщення” зображення на a рівносильне множенню оригінала на e^{at}).

Маємо:

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{at} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-a)t} dt = F(p - a),$$

що й потрібно було довести.

Теорема зміщення дозволяє за відомими зображеннями функцій знаходити зображення тих же функцій, помножених на експоненту. Наприклад, із (2.7) та (2.8) дістанемо:

$$e^{\alpha t} \sin \beta t \leftarrow \frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2},$$

$$e^{\alpha t} \cos \beta t \leftarrow \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}. \quad (2.17)$$

Теорема зміщення є двоїстою до наступної властивості.

2.6 Теорема загаювання

Для довільного додатного τ виконується

$$f(t-\tau) \leftarrow e^{-p\tau} F(p). \quad (2.18)$$

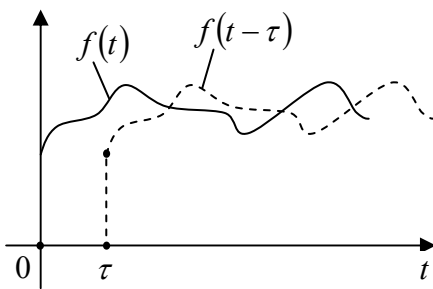


Рисунок 2.1

(включення оригіналу з загаюванням на τ (рис. 2.1) рівносильне множенню зображення на $e^{-p\tau}$).

Дійсно, оскільки $f(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, то

$$\begin{aligned} L\{f(t-\tau)\} &= \\ &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\tau} 0 \cdot e^{-pt} dt + \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Зробивши заміну змінної інтегрування $t-\tau = u$, дістанемо

$$L\{f(t-\tau)\} = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+\tau)} dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu} e^{-p\tau} dt =$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu} dt = e^{-p\tau} F(p),$$

що й потрібно було довести.

Теорему загаювання зручно використовувати при знаходженні зображень функцій, які на різних ділянках задаються різними аналітичними виразами.

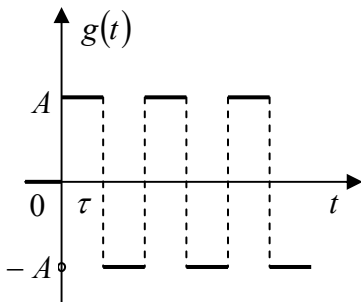


Рисунок 2.2

Приклад 2.3. Періодичний прямокутний імпульс $g(t)$, графік якого зображений на рис. 2.2, можна записати у вигляді

$$g(t) = A(\eta(t) - 2\eta(t-\tau) + 2\eta(t-2\tau) - 2\eta(t-3\tau) + \dots).$$

Із формули (2.3) за теоремою загаювання дістанемо

$$\eta(t-n\tau) \leftarrow \frac{e^{-pn\tau}}{p}, \quad n=1, 2, \dots$$

Тому, скориставшись властивістю лінійності, матимемо

$$\begin{aligned} L\{g(t)\} &= A \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p\tau} + \frac{2}{p} e^{-2p\tau} - \frac{2}{p} e^{-3p\tau} + \dots \right) = \\ &= \frac{A}{p} \left(1 - 2 \frac{e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} \right) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} = \frac{A}{p} \cdot \frac{e^{\frac{p\tau}{2}} - e^{-\frac{p\tau}{2}}}{e^{\frac{p\tau}{2}} + e^{-\frac{p\tau}{2}}} = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}. \end{aligned}$$

2.7 Інтегрування оригіналу

Інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на p :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \Leftarrow \frac{F(p)}{p} \quad (2.19)$$

(див. вступ на попередній лекції).

Перш за все, легко перекопати, що функція $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ разом з $f(t)$ є оригіналом, тобто задовольняє умовам $1^0 - 3^0$ п. 1.2. Тоді за формулою (2.10) (її можна застосувати, бо $g(0) = 0$) маємо:

$$f(t) = g'(t) \Leftarrow pG(p).$$

Отже, для зображення оригінала $f(t)$ виконується $F(p) = pG(p)$, звідки $G(p) = \frac{F(p)}{p}$, що й потрібно було довести.

Приклад 2.4. Знайдемо зображення для оригіналу $\int_0^t e^{-3\tau} \sin 2\tau d\tau$.

Оскільки (див. (11.17)) $e^{-3t} \sin 2t \Leftarrow \frac{2}{(p-3)^2 + 2^2}$, то за формулою (2.19) дістаємо

$$\int_0^t e^{-3\tau} \sin 2\tau d\tau \Leftarrow \frac{2}{p((p-3)^2 + 2^2)}.$$

Відзначимо, що можна було б вираз проінтегрувати і після цього скористатись формулами (2.17), але це було б значно складніше.

2.8 Інтегрування зображення

Якщо інтеграл $\int_p^{+\infty} F(z) dz$ збіжний, то він є зображенням функції $f(t)/t$:

$$\int_p^{+\infty} F(z) dz \Rightarrow \frac{f(t)}{t} \quad (2.20)$$

(інтегрування зображення рівносильне діленню на t оригінала).

Справді, враховуючи (10.3), маємо

$$\int_p^{\infty} F(z) dz = \int_p^{\infty} dz \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt. \quad (2.21)$$

Вважаючи, що шлях інтегрування (p, ∞) увесь знаходиться в півплощині $Re z \geq a > s_0$, дістаємо оцінку внутрішнього інтеграла

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(a-s_0)t} dt,$$

з якої зрозуміла його рівномірна збіжність відносно z . Тому ми можемо в (2.21) змінити порядок інтегрування:

$$\int_p^{\infty} F(z) dz = \int_0^{+\infty} f(t) dt \int_p^{\infty} e^{-zt} dz = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-zt} dt.$$

Отримана рівність рівносильна формулі (2.20).

Приклад 2.5. Скориставшись (2.2), маємо

$$e^{bt} - e^{at} \leftarrow \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a},$$

звідки, застосовуючи формулу (2.19), дістаємо

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \leftarrow \int_p^\infty \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right) dz = \ln \frac{p-a}{p-b}. \quad (2.22)$$

Приклад 2.6. З формули (2.4), застосовуючи (2.20), матимемо

$$\frac{\sin t}{t} \leftarrow \int_p^\infty \frac{dz}{z^2 + 1} = \arctg z \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p,$$

тобто

$$\frac{\sin t}{t} \leftarrow \arctg p. \quad (2.23)$$

Використовуючи (11.18), знаходимо зображення інтегрального синуса:

$$\text{si } t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \leftarrow \frac{\arctg p}{p}. \quad (2.24)$$

2.9 Теорема множення

Добуток двох зображень $F(p)$ та $G(p)$ також буде зображенням, причому

$$F(p)G(p) \rightarrow \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (2.25)$$

Перш за все переконаємось, що інтеграл в правій частині співвідношення (2.25) є оригіналом. Справді, умови 1⁰ та 2⁰ очевидні, а для доведення 3⁰ зауважимо, що якщо позначити найбільший з показників росту $f(t)$ та $g(t)$ через s_0 , то

$$\left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| \leq M \left| \int_0^t e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} d\tau \right| = Mte^{s_0t}.$$

Звідси і випливає, що інтеграл в (2.25) не перевищує деякої сталої, помноженої на $Me^{(s_0+\varepsilon)t}$, де ε - якесь мале додатне число.

Розглянемо тепер зображення інтеграла в (2.25):

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \leftarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

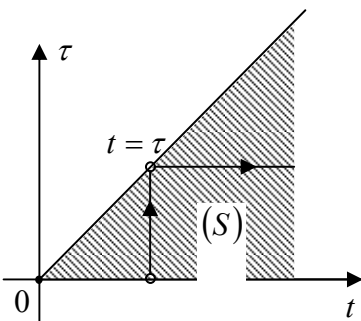


Рисунок 2.3

Праворуч тут стоїть повторний інтеграл, який поширюється на сектор (S) площини (t, τ) (рис. 2.3), бо при фіксованому $t > 0$ інтегрування по τ проводиться в межах від 0 до $\tau = t$, а потім t змінюється від 0 до $+\infty$. Оскільки цей двократний інтеграл при $\text{Re } p > s_0$ абсолютно збігається, то в ньому можна змінити порядок інтегрування, і ми дістанемо (замінюючи ще $t - \tau = u$):

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau &\leftarrow \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt} g(t-\tau)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p(u+\tau)} g(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f(\tau)d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pu} g(u)du = \end{aligned}$$

$$= F(p)G(p),$$

що й потрібно було довести.

Зауваження 2.3. Для довільних двох функцій $f(t)$ та $g(t)$ (не обов'язково оригіналів), визначених на $(-\infty, +\infty)$ і таких, що при усіх $\tau \in (-\infty, +\infty)$ збігається інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (2.26)$$

цей інтеграл називається *згорткою функцій $f(t)$ та $g(t)$* і позначається символом $f * g$. Якщо $f(t)$ та $g(t)$ - оригінали, то $f(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ і $g(t-\tau) = 0$ при $\tau > t$, тому

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Отже, співвідношення (2.25) можемо переформулювати ще так: *добутку зображень відповідає згортка оригіналів:*

$$F(p)G(p) \rightarrow f * g. \quad (2.27)$$

Наслідок 2.1. Розглянемо

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + (pF(p) - f(0))G(p).$$

Скориставшись правилом диференціювання оригіналу (формула (2.9)) та доведеною теоремою множення, дістаємо так званий *інтеграл Дюамеля:*

$$pF(p)G(p) \rightarrow f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (2.28)$$

Скориставшись властивістю симетрії згортки, цей інтеграл можемо записати ще й так:

$$pF(p)G(p) \rightarrow f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau. \quad (2.29)$$

Зміна ролями функцій $F(p)$ та $G(p)$ приводить до формул

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &\rightarrow g(0)f(t) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau = \\ &= g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Застосування інтеграла Дюамеля розглянемо на наступній лекції.

Сформулюємо без доведення властивість, двоїсту до (2.25).

Нехай дано два оригінали $f(t)$ та $g(t)$ з показниками росту s_1 та s_2 . Їхній добуток також буде оригіналом, причому

$$f(t)g(t) \leftarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq,$$

де $a > s_1$, $Re p > s_2 + a$.

2.10 Теорема розкладу

На практиці досить часто доводиться знаходити оригінал за відомим його зображенням. Для цього можна користуватися відомою нам формулою (1.12). Однак обчислення за цією формулою можуть бути доволі складними. Ми сформулюємо два результати, які полегшують знаходження оригіналу і стосуються розкладу в ряди оригіналів чи зображень.

Перша теорема розкладу. Якщо $F(p)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці і має в її околі $|p| \geq R$ розклад в ряд Лорана

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k},$$

то оригіналом для $F(p)$ буде (помножена на $\eta(t)$) функція

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

При цьому $f(t)$ є цілою функцією.

Приклад.2.7. Функція $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p}$ аналітична в нескінченно віддаленій точці і має там

нуль. Скориставшись розкладом $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ і поклавши $z = -\frac{1}{p}$, дістанемо розклад $F(p)$ в ряд Лорана в околі ∞ :

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}.$$

Тому, скориставшись щойно сформульованою теоремою, матимемо:

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} = f(t).$$

Друга теорема розкладу. Нехай функція $F(p)$: 1) аналітична в усій комплексній площині за винятком полюсів, які не мають скінченної граничної точки і усі знаходяться в деякій півплощині $Re p \leq s_0$; 2) існує система кіл $\Gamma_n = \{p \in \mathbf{C} : |p| = R_n\}$, $R_1 < R_2 < \dots$, $R_n \rightarrow \infty$, на якій $F(p)$ прямує до нуля рівномірно відносно $arg p$; 3) для будь-якого $a > s_0$ абсолютно збігається інтеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$. Тоді

оригіналом для $F(p)$ буде (помножена на $\eta(t)$) функція

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}),$$

де сума лишків береться по всіх особливих точках функції $F(p)$ в порядку неспадання їх модулів.

Зауваження 2.4. Досить часто у застосуваннях апарату операційного числення дістають зображення $F(p)$ у вигляді раціональної функції

$$F(p) = \frac{Q_m(p)}{P_n(p)}. \quad (2.31)$$

де $Q_m(p)$ та $P_n(p)$ - многочлени степенів відповідно m та n . Умова (1.6) забезпечує правильність дробу (2.31). А, як нам відомо, довільний правильний раціональний дріб можна зобразити у вигляді суми елементарних дробів. Для кожного ж з таких доданків можна знайти оригінал, використовуючи розглянуті вище приклади, а також властивості перетворення Лапласа.

ЛЕКЦІЯ 3 ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

3.1 Таблиця оригіналів та зображень

Отримані на попередній лекції зображення впорядкуємо у вигляді таблиці. Нею користуватимемось при застосуваннях апарата операційного числення.

№ п/п	О р и г і н а л	З о б р а ж е н н я
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
3	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
4	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
5	$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
6	$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
7	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
8	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
9	$t \sin \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}$
10	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
11	$t sh \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 - \beta^2)^2}$
12	$t ch \beta t$	$\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
13	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
14	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
15	$\frac{e^{bt} - e^{\alpha t}}{t}$	$\ln \frac{p - a}{p - b}$
16	$\frac{\sin t}{t}$	$\text{arcctg } p$
17	$si t$	$\frac{\text{arcctg } p}{p}$

Зауважимо, що є значно повніші таблиці оригіналів та зображень, які можна знайти в спеціальних посібниках з операційного числення, наприклад, в [4].

3.2 Звичайні диференційні рівняння

Операційний метод особливо просто застосовується до розв'язування задач Коші для звичайних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Отже, нехай дано диференційне рівняння

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t), \quad (3.1)$$

де $a_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots, n$, з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \quad (3.2)$$

Вважатимемо, що $a_0 \neq 0$, а функція $f(t)$ і розв'язок $x(t)$ з його похідними до n -го порядку є оригіналами. Позначимо $X(p) \quad x(t)$, $F(p) \quad f(t)$. За правилом диференціювання оригіналу (формули (2.10) та (2.11)) та властивістю лінійності замість диференційного рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2) дістаємо *операторне рівняння*

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = F(p) + x_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + x_1 (a_0 p^{n-2} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0$$

або

$$A(p) X(p) = F(p) + B(p), \quad (3.3)$$

де $A(p)$ та $B(p)$ - відомі многочлени. З цього рівняння легко знаходимо операторний розв'язок:

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \quad (3.4)$$

Якщо рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2) має розв'язок $x(t)$, що задовольняє умовам, накладеним на оригінали (а можна було б довести, що такий розв'язок в прийнятих умовах існує завжди), то цей розв'язок є оригіналом для $X(p)$.

Розглянемо приклади.

Приклад 3.1. Розв'язати задачу Коші

$$x'' - 4x = e^{-t}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -3.$$

Р о з в ' я з а н н я

Відповідно до (3.3) операторне рівняння запишеться так: $(p^2 - 4)X(p) = \frac{1}{p+1} + 2p - 3$. Його

розв'язок

$$X(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{(p+1)(p^2 - 4)} = \frac{2p^2 - p - 2}{(p+1)(p+2)(p-2)}$$

є раціональною функцією, тому, з огляду на зауваження 2.4, розкладемо його на суму елементарних дробів:

$$X(p) = -\frac{1}{3} \frac{1}{p+1} + 2 \frac{1}{p+2} + \frac{1}{3} \frac{1}{p-2}.$$

Скориставшись формулою 2 із таблиці, а також властивістю лінійності, знаходимо оригінал для цього зображення, який і буде шуканим розв'язком задачі Коші:

$$x(t) = -\frac{1}{3} e^{-t} + 2e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{2t}.$$

Приклад 3.2. Розв'язати задачу Коші

$$x^{IV} + 2x'' + x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Розв'язання

Операторне рівняння дістанемо у вигляді $(p^4 + 2p^2 + 1)X(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$, звідки легко дістаємо

його розв'язок:

$$X(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^3}.$$

Очевидно, він є аналітичною функцією в усій комплексній площині, за винятком точок $p_{1,2} = \pm i$, які є полюсами третього порядку. Тому, за другою теоремою розкладу, маємо:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{res}_{p=i} \left(\frac{1}{(p^2 + 1)^3} e^{pt} \right) + \operatorname{res}_{p=-i} \left(\frac{1}{(p^2 + 1)^3} e^{pt} \right) = \\ &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt}}{(p^2 + 1)^3} (p-i)^3 \right) \Bigg|_{p=i} + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt} (p+i)^3}{(p^2 + 1)^3} \right) \Bigg|_{p=-i} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^3} \right) \Bigg|_{p=i} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3} \right) \Bigg|_{p=-i} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2(p+i)^2 - 6t(p+i) - 12}{(p+i)^5} e^{pt} \right) \Bigg|_{p=i} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{t^2(p-i)^2 - 6t(p-i) - 12}{(p-i)^5} e^{pt} \right) \Bigg|_{p=-i} = \\ &= \frac{1}{8} (3 - t^2) \sin t - \frac{3}{8} t \cos t. \end{aligned}$$

Приклад 3.3. Знайти розв'язок рівняння

$$x'' + \omega^2 x = a(\eta(t) - \eta(t-b))$$

з нульовими початковими даними.

Розв'язання

За властивістю лінійності та теоремою загаювання

$$a(\eta(t) - \eta(t-b)) \Leftarrow \frac{a}{p} (1 - e^{-bp}).$$

Враховуючи нульові початкові умови, маємо

$$x'' + \omega^2 x \Leftarrow (p^2 + \omega^2)X(p).$$

Отже, операторне рівняння буде таким:

$$(p^2 + \omega^2)X(p) = \frac{a}{p} (1 - e^{-bp}).$$

Тоді $X(p) = \frac{a}{p(p^2 + \omega^2)} + \frac{ae^{-bp}}{p(p^2 + \omega^2)}$. Розклавши раціональний дріб на суму елементарних і

скориставшись формулами 1 і 4 з таблиці, дістанемо

$$\frac{a}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{a}{\omega^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) \Rightarrow \frac{a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) = \frac{2a}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2},$$

і за теоремою загаювання

$$\frac{ae^{-bp}}{p(p^2 + \omega^2)} \rightarrow \frac{2a}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2} \eta(t-b),$$

$$\text{тому } x(t) = \frac{2a}{\omega^2} \left(\sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2} \eta(t) - \sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2} \eta(t-b) \right).$$

Відзначимо особливу роль інтеграла Дюамеля. Нехай потрібно розв'язати лінійне диференційне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L[x] = f(t) \tag{3.5}$$

при нульових початкових умовах.

Якщо відомий розв'язок $x_1(t)$ рівняння

$$L[x] = 1 \tag{3.6}$$

з тією ж лівою частиною і правою 1, також з нульовими початковими умовами, то інтеграл Дюамеля дозволяє записати розв'язок рівняння (3.5) без особливих труднощів.

Справді, операторні рівняння, які відповідають (3.5) та (3.6), мають вигляд

$$A(p)X(p) = F(p), \quad A(p)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

звідки

$$X(p) = pX_1(p)F(p).$$

Тоді, враховуючи, що $x_1(0) = 0$, за формулою Дюамеля (2.30) дістаємо потрібний розв'язок рівняння (3.5) з нульовими початковими умовами

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau, \tag{3.7}$$

який, з огляду на (2.29), може бути записаний ще й так:

$$x(t) = x_1(t)f(0) + \int_0^t x_1(\tau) f'(t-\tau) d\tau. \tag{3.8}$$

Приклад 3.4. Розв'язати задачу

$$x'' - 4x' = \frac{1}{1+e^{-2t}}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Розв'язання Спочатку шукаємо розв'язок задачі

$$x'' - 4x' = 1, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Відповідне операторне рівняння матиме вигляд

$$(p^2 - 4p)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

$$\text{тому } X_1(p) = \frac{1}{p^2(p-4)} = -\frac{1}{16} \frac{1}{p} - \frac{1}{4} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{p-4} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{16} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}e^{4t} = x_1(t).$$

Тут ми скористались властивістю лінійності, а також формулами 1, 2 і 7 з таблиці оригіналів та зображень.

Очевидно, $x_1'(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t}$. За формулою (3.7) знаходимо шуканий розв'язок

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^{-2\tau}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4(t-\tau)} \right) d\tau = -\frac{1}{4} \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{e^{2\tau} + 1} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4} e^{4t} \int_0^t \frac{e^{-4\tau}}{1+e^{-2\tau}} d\tau = \frac{1}{8} \left((e^{4t} - 1) \ln \frac{e^{2t} + 1}{2} - e^{2t} + (1 - 2t)e^{4t} \right).$$

3.3 Системи диференціальних рівнянь

Цілком аналогічно застосовується операційний метод і до розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Нехай, наприклад, потрібно розв'язати систему n диференціальних рівнянь другого порядку

$$L_k[x] = \sum_{j=1}^n \left(a_{kj} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + b_{kj} \frac{dx_j}{dt} + c_{kj} x_j \right) = f_k(t), \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.9)$$

при заданих початкових умовах

$$x_j(0) = \alpha_j, \quad x'_j(0) = \beta_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.10)$$

Якщо вважати $x_j(t)$ та $f_k(t)$ оригіналами і позначити через $X_j(p)$ та $F_k(p)$ їхні зображення, то система (3.9) з початковими умовами (3.10) заміниться операторною системою

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (a_{kj} p^2 + b_{kj} p + c_{kj}) X_j(p) &= \\ &= F_k(p) + \sum_{j=1}^n ((a_{kj} p + b_{kj}) \alpha_j + a_{kj} \beta_j), \quad k = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Розв'язуючи її як алгебраїчну систему лінійних рівнянь, знаходимо $X_j(p)$, а потім і їхні оригінали $x_j(t)$.

Відзначимо, що для системи диференціальних рівнянь першого порядку викладки спрощуються.

Приклад 3.5. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} x' = 7x + y, \\ y' = -x + 5y + 3e^{6x}, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2.$$

Розв'язання Операторна система буде такою:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 7X(p) + Y(p), \\ pY(p) + 2 = -X(p) + 5Y(p) + 3 \frac{1}{p-6}. \end{cases}$$

Виражаючи з першого рівняння $Y(p)$ через $X(p)$ і підставляючи в друге, після простих перетворень знаходимо

$$X(p) = \frac{p^2 - 13p + 45}{(p-6)^3} = \frac{1}{p-6} - \frac{1}{(p-6)^2} + \frac{3}{2} \frac{2!}{(p-6)^3},$$

а тоді й

$$Y(p) = \frac{-2p^2 + 28p - 99}{(p-6)^3} = -2 \frac{1}{p-6} + 4 \frac{1}{(p-6)^2} - \frac{3}{2} \frac{2!}{(p-6)^3}.$$

Переходячи до оригіналів (див. формули 2 та 8 в таблиці оригіналів та зображень), дістаємо потрібний розв'язок даної задачі Коші:

$$x(t) = \left(1 - t + \frac{3}{2} t^2 \right) e^{6t}, \quad y(t) = \left(-2 + 4t - \frac{3}{2} t^2 \right) e^{6t}.$$

Приклад 3.6. Розв'язати систему

$$\begin{cases} (2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0, \\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0 \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = x'(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Розв'язання Переходимо до операторної системи

$$\begin{cases} (2p^2 - p + 9)X(p) - (p^2 + p + 3)Y(p) = 2p + 1, \\ (2p^2 + p + 7)X(p) - (p^2 - p + 5)Y(p) = 2p + 3. \end{cases}$$

Додавши та віднявши ці два рівняння, матимемо

$$\begin{cases} (4p^2 + 16)X(p) - (2p^2 + 8)Y(p) = 4p + 4, \\ (2p - 2)X(p) + (2p - 2)Y(p) = 2, \end{cases}$$

звідки, розділивши обидві частини отриманої першої рівності на $(2p^2 + 8)$, а другої – на $(2p - 2)$, дістаємо

$$2X(p) - Y(p) = 2 \frac{p+1}{p^2+4}, \quad X(p) + Y(p) = \frac{1}{p-1}.$$

З останніх рівностей легко знаходимо

$$X(p) = \frac{1}{3} \frac{1}{p-1} + \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{3} \frac{2}{p^2+4},$$

$$Y(p) = \frac{2}{3} \frac{1}{p-1} - \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{3} \frac{2}{p^2+4}.$$

Переходячи до оригіналів та використовуючи формули 2, 3 та 4 з таблиці, остаточно дістаємо

$$x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2 \cos 2t + \sin 2t), \quad y(t) = \frac{1}{3}(2e^t - 2 \cos 2t - \sin 2t).$$

3.4 Диференціальні рівняння в частинних похідних

Операційний метод успішно застосовується до розв'язування так званих *нестационарних задач* для рівнянь математичної фізики. Для простоти обмежимося випадком, коли шукана функція u залежить від двох змінних x та t , з яких першу трактуватимемо як координату, а другу як час. Крім того, припустимо, що диференціальне рівняння має вигляд

$$L[u] = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3.12)$$

де a, b, c, a_1, b_1 - функції, які залежать тільки від x , задані та неперервні на проміжку $0 \leq x \leq l$.

Нестационарна задача в нашому випадку формулюється так.

Знайти розв'язок $u(x, t)$ диференціального рівняння (3.12) для $0 \leq x \leq l$ та $t \geq 0$, який задовольняє заданим початковим умовам

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (3.13)$$

(друга умова задається тільки, коли завжди $a > 0$, $a_1 < 0$) та крайовим умовам

$$u(0, t) = f(t), \quad \alpha \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t), \quad (3.14)$$

де α, β, γ - сталі.

Нестационарність задачі полягає в тому, що розглядається розв'язок, який істотно залежить від початкових умов („перехідний” режим фізичного процесу).

Припустимо, що u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, які розглядаються як функції t , є оригіналами, і позначимо зображення функції u через

$$U(p, x) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt.$$

Відповідно до наших припущень тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} \leftarrow \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leftarrow \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

(диференціювання U по x ми позначаємо з допомогою символу d , а не ∂ , бо розглядаємо p тільки як параметр). За правилом диференціювання оригіналів дістаємо також

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leftarrow pU - u(x, 0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \leftarrow p^2 U - u(x, 0)p - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

або, враховуючи початкові умови,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leftarrow pU - \varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \leftarrow p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Припустимо ще, що $f(t)$ є оригіналом і $F(p) \rightarrow f(t)$, тоді крайові умови дають

$$U|_{x=0} = F(p), \quad \left(\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi) \right) \Big|_{x=l} = \gamma U|_{x=l}.$$

Отже, операційний метод приводить розв'язання поставленої вище нестационарної задачі для рівняння (12.12) в частинних похідних до розв'язання звичайного диференційного рівняння

$$a \frac{d^2 U}{dx^2} + b \frac{dU}{dx} + AU + B = 0, \quad (3.15)$$

де

$$A = c + a_1 p^2 + b_1 p, \quad B = -a_1 p - a_1 \psi - b_1 p$$

і p - комплексний параметр, при таких граничних умовах:

$$U|_{x=0} = F(p), \quad \left(\alpha \frac{dU}{dx} + (\beta p - \gamma)U - \beta \varphi \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (3.16)$$

Зауваження 3.1. Наведені вище міркування показують, що при заданих умовах зображення U розв'язку u нестационарної задачі задовольняє рівнянню (3.15) і граничній задачі (3.16). Якщо відомо, що нестационарна задача має єдиний розв'язок, який задовольняє разом зі своїми частинними похідними перших двох порядків по x умовам $1^0 - 3^0$, накладеними на оригінали, і якщо задача (3.16) для рівняння (3.15) має єдиний розв'язок U , то розв'язок сформульованої вище задачі (3.14) для рівняння (3.15) можна дістати як оригінал для U .

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
2. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1978. – 416 с.
3. Гольдберг А.А., Шеремета М.М. Аналітичні функції: Навчальний посібник. – К.: : УМК ВО, 1991. – 116 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 736 с.
5. Горгула В.І., Сікора Б.С., Волковецький С.В. Теорія функцій комплексної змінної і операційне числення: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1998. – 80 с.
6. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. I. Функции одного переменного. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
7. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 574 с.