Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра математичних методів в інженерії

Навчальний посібник

з курсу: ” Оптимізаційні методи та моделі “

для спеціальностей: “ОБЛІК І АУДИТ, ФІНАНСИ І КРЕДИТ, МАРКЕТИНГ, ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА”

Тернопіль 2015

Валяшек В.Б. Навчальний посібник з курсу: “ Оптимізаційні методи та моделі “
для спеціальностей “Облік і аудит, Фінанси і кредит, Маркетинг, Економічна кібернетика”
/ Кривень В.А., Валяшек В.Б., Цимбалюк Л.І., Козбур Г.В. – Тернопіль : видавництво ТНТУ, 2015. – 83 с.

Укладачі:
д.ф.-м.н., проф. Кривень В.А.
к.ф.-м.н., доц. Валяшек В.Б.
к.ф.-м.н., доц. Цимбалюк Л.І..
старший викладач Козбур Г.В.

Відповідальний за випуск: Валяшек В.Б.

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Блащак Н. І.

Навчальний посібник розглянуто й схвалено на засіданні кафедри математичних методів в інженерії (протокол № 9 від 30.04.2015р.)

Рекомендовано до друку методичною радою факультету комп’ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії (протокол № 6 від 3 лютого 2015р.)

Вступ

Метою даного навчального посібника є надання допомоги студентам при самостійному вивченні таких розділів дисципліни:

- оптимізаційні економіко-математичні моделі;
- загальна задача лінійного програмування та методи її розв'язування;
- симплексний метод розв'язування оптимізаційних задач;
- метод штучного базису розв'язування оптимізаційних задач;
- теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач;
- постановка транспортної задачі, методи розв'язування та аналізу;
- цілочислові задачі лінійного програмування та основні методи їх розв'язування і аналізу;
- задачі дробово-лінійнрого програмування;
- задачі нелінійного програмування;
- задачі динамічного програмування.

Посібник укладено відповідно до програми курсу: “ Оптимізаційні методи та моделі ” для вищих технічних навчальних закладів. Кожна тема у посібнику має короткі теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач.

Методичний посібник може бути використаний студентами технічного університету при самостійному опрацюванні вище названих розділів та виконанні контрольно-розрахункових робіт.

ТЕМА 1. ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ.

1.1. Предмет,завдання та методологічні засади курсу. Задачі економічного вибору.

Важливим завданням сучасності є керування економічними системами, оптимізація їх структури, траєкторії розвитку й функціонування з метою досягнення максимальної економічної ефективності. Ці проблеми вивчає наука, яку називають ***теорією дослідження операцій***. Вона охоплює всі етапи вивчення систем, у тому числі економічних: від з'ясування мети (цілі) функціонування й розвитку, побудови економіко-математичної моделі та відшукання оптимального розв'язку до розробки плану практичної реалізації здобутих результатів дослідження та забезпечення реалізації цього плану. ***Математичне програмування*** — один з головних інструментів теорії дослідження операцій — полягає в розробленні методів розв'язування оптимізаційних задач та дослідження отриманого розв'язку.

Економічну систему можна схематично подати у вигляді прямокутника (рис. 1.1).

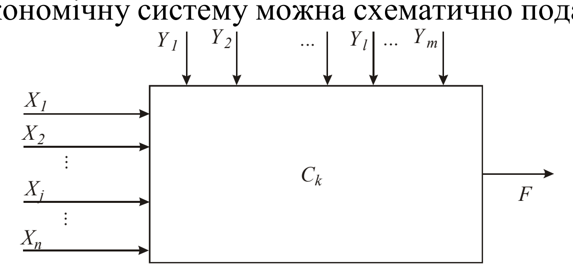


Рис. 1.1. Схема виробонично-економічної системи

Параметри C_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ є кількісними характеристиками системи. Наприклад, якщо йдеться про сільськогосподарську економічну систему, то значення C_k характеризують наявність ресурсів (земельних угідь, живої праці, сільськогосподарської техніки, тваринницькі та складські приміщення), рівень урожайності сільськогосподарських культур і продуктивності свійських тварин, норми витрат ресурсів, ціну та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на куповані ресурси тощо.

Параметри C_k для певної системи можуть бути сталими, наприклад норми висіву насіння сільськогосподарських культур, норми споживання тваринами кормів і т. ін., або їх значення залежатиме від певних умов, як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції , реалізаційні ціни на рослинницьку й тваринницьку продукцію.

Інші кількісні характеристики є змінними величинами, які бувають незалежними чи залежними, дискретними або неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є обсяг чистого прибутку, незалежною — кількість кормів, які планується згодувати великій рогатій худобі, дискретною — кількість корів, неперервною — площа посіву озимої пшениці, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою — кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Незалежні змінні бувають двох видів: керовані $X_j\left(j = 1, 2, \ldots, n\right)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; некеровані змінні $Y_i\left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, площі посіву зернових культур — керовані, а погодні умови — некеровані змінні. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

1.2. Сутність звичайної оптимізації. Постановка оптимізаційних задач. Вибір критерію оптимізації.

Кожна економічна система має мету (ціль) розвитку та функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F — обрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною *F,* якою вимірюється ступінь досягнення мети, і незалежними змінними та параметрами системи:

$$F = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n;\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, C_1, C_2, \ldots, C_l\right). \tag{1.1}$$

Функцію *F* називають ***цільовою функцією,*** або ***функцією мети***. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення *F* відбиває ступінь досягнення певної мети.

Задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних X_j щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Отже, потрібно відшукати значення

$$F^* = \max(\min) f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, C_1, C_2, \ldots, C_l\right). \tag{1.2}$$

Можливості вибору *Xj* завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи і т. ін.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду

$$q_r\left(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, C_1, C_2, \ldots, C_l\right)\left\{\le, =, \ge\right\} 0$$
$$\left(r = 1, 2, \ldots, S\right) \tag{1.3}$$

Тут набір символів $\left\{\le, =, \ge\right\}$ означає, що для деяких значень поточного індексу r виконуються нерівності типу ≤, для інших — рівності (=), а для решти — нерівності типу ≥.

Система (1.3) називається ***системою обмежень,*** або ***системою умов*** задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні X_j мають бути невід'ємними:

$$X_j \ge 0, \left(j = 1, 2, \ldots, n\right). \tag{1.4}$$

Вирази (1.2)—(1.4) є ***економіка-математичною моделлю*** цієї економічної системи. Розробляючи таку модель, слід керуватися певними правилами:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.
2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та пере ускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а пере ускладнені моделі важко реалізувати на ПК як з огляду на неможливість інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.
3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ПК.
4. Потрібно забезпечити, щоб множина наборів X_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях по змозі слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (1.3) має єдиний розв'язок, то не існує задачі вибору оптимального плану.

Будь-який набір змінних $X_1, X_2, \ldots, X_n$, що задовольняє умови (1.3) і (1.4), називають ***допустимим планом,*** **або** ***планом***. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною ***стратегією економічної системи, програмою дій***. Саме зі словом «програма» і пов'язана назва предмета «математичне програмування». Кожному допустимому плану відповідає значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1.1).

Сукупність усіх розв'язків систем обмежень (1.3) і (1.4), тобто множина всіх допустимих планів, становить *область існування планів.*

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається ***оптимальним***. Оптимальний план ***є розв'язком задачі математичного програмування*** (1.2)—(1.4).

Зауважимо, що в задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно визначена. У реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують кілька десятків показників. Наприклад, максимум чистого доходу від виробленої продукції у вартісному виразі чи максимум рентабельності, мінімум собівартості виробленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів. Некоректним є вираз «максимум товарної продукції за і мінімальної її собівартості». Хоча задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, але існують математичні методи побудови компромісних планів, тобто методи багато критеріальної оптимізації.

Перш ніж розглядати методи оптимізації, ознайомимося з класифікацією задач математичного програмування.

1.3. Найпростіша класифікація оптимізаційних задач

Будь-яка класифікація передбачає вибір критерію, згідно з яким вона здійснюється. Оскільки математичне програмування передусім є строгою математичною дисципліною, то критеріями класифікації мають бути в основному математичні структури (властивості) задач і методів їх розв'язування. Зауважимо, що одна й та сама задача з погляду різних математичних критеріїв може належати до кількох класів. Адже кожний критерій підкреслює лише одну властивість задачі на противагу деякій іншій, тобто поділяє всі задачі на два класи (чи підкласи всередині певного класу).

Задачі математичного програмування поділяються на два великі класи ***лінійні*** та ***нелінійні.*** Якщо цільова функція (1.2) та обмеження (1.3) є лінійними функціями, тобто вони містять змінні у першому або нульовому степені. В усіх інших випадках задача буде нелінійною. Важливою перевагою лінійних задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається ***симплексним методом.*** Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких класів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язування, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються в умовах невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, а тому доводиться будувати нелінійні та стохастичні моделі. Розв'язувати нелінійні задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу розв'язування таких задач. Для окремих типів нелінійних задач розроблено численні спеціальні ефективні методи розв'язування. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) лінійними. Такий підхід на практиці є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні виокремлюють такі класи: ***опукле програмування.*** Для задач опуклого програмування існує низка добре обґрунтованих та ефективних методів їх розв'язування. Зазначимо, що задачі лінійного програмування є частковим випадком задач опуклого програмування.

Наголосимо, що коли область допустимих планів є опуклою множиною, а цільова функція є опуклою функцією, то задача математичного програмування має глобальний, єдиний екстремум (якщо такий існує).

Множина S в n-мірному евклідовому просторі називається **опуклою множиною**, якщо для будь-яких точок (елементів) цієї множини $X^{(1)}, X^{(2)} \in S$ точки $X = \mu X^{(1)} + (1-\mu) X^{(2)}$ належать множині S за всіх значень μ, які належать відрізку $0 \le \mu \le 1$..

Геометричне це означає, якщо $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ належать до множини 5, то відрізок прямої, що з'єднує ці дві точки, також цілком належить до множини *S.*

Функція *f{X),* визначена на опуклій множині лінійного простору (на опуклій множині S), називається опуклою, якщо виконується нерівність

$$f\left(\mu X^{(1)}+\left(1-\mu\right)X^{(2)}\right)\le \mu f\left(X^{(1)}\right)+\left(1-\mu\right)f\left(X^{(2)}\right)$$

для всіх ц, які належать відрізку $0\le\mu\le1$.

Квадратичне програмування — цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Далі задачі математичного програмування поділяють на ***дискретні*** і ***неперервні****.* Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. Окремий клас становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень, тобто задачі ***цілочислового програмування****.* Якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення в деяких інтервалах числової осі, то задача є ***неперервною****.*

Задачі математичного програмування поділяються також на ***детерміновані*** і ***стохастичні****.* Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, котрі набувають значень відповідно до функції розподілу. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням α і дисперсією σ, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У противному разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається ***стохастичним програмуванням.***

Економічні процеси розвиваються в часі, а тому відповідні моделі мають відображати динаміку. Це означає, що для знаходження оптимального плану потрібно застосовувати класи задач математичного програмування ***статичні*** (одно крокові) і ***динамічні*** (багатокрокові). Поняття динамічності зрозуміле, воно пов'язане з часом. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку України до 2015 року, мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2015 рік, а й на всі проміжні роки, тобто враховано динаміку розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним.* У ньому має бути обґрунтована оптимальна (раціональна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників реальні показники щороку можуть відхилятися від планових. Тому постає потреба коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними****.* Вони визначаються в результаті реалізації статичної економіко-математичної моделі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно - та багатокроковими задачами. ***Багатокроковість*** як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, їх багато вимірністю. Сутність цього методу полягає в тому, що оптимальні значення розглядуваної множини змінних знаходять крок за кроком, послідовно застосовуючи індукцію, причому рішення, яке приймається на кожному кроці, має задовольняти умови оптимальності щодо рішення, прийнятого на попередньому кроці. Така процедура може бути і не бути пов'язаною з часом. ***Однокрокові*** задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються одночасно на останній ***ітерації*** (кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багато кроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто якимось чином задаємо допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій дістаємо оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не інтерпретується як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно або багатокрокові залежно від способу їх розв'язування. Якщо задачу можна розв'язувати як одно крокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, аби не застосовувати для знаходження оптимального плану складніших методів. Проте більшість економічних процесів с динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, що їх доводиться приймати з метою досягнення розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначається стратегічним планом.

Щойно було розглянуто лише найбільші класи задач математичного програмування, які визначені згідно з математичними критеріями. Можна також за різними ознаками виокремити й підкласи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий клас розглядають ***дробово-лінійне програмування,*** коли обмеження є лінійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий клас становлять задачі ***теорії ігор,*** які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають цілі, що не збігаються, або протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підкласи. Наприклад, ***ігри двох осіб із нульовою сумою***.

Наведену класифікацію використано для структурування курсу «Математичне програмування».

ТЕМА 2
ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1. Математична постановка задач лінійного програмування. Система гіпотез.

Загальна лінійна математична модель економічних процесів і явищ — так звана загальна задача лінійного програмування (ЛП) подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції $Z = cx_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, (2.1)

або $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \quad (2.3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (2.2) і (2.3), тоді як цільова функція набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Задачу (2.1)—(2.3) легко звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2.2) всі $b_i \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від'ємне, то, помноживши i-те обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши допоміжну змінну $x_{n+1} : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k$ зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну змінну x_{n+2}, тобто $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$.

Задача 2.1. Записати в канонічній формі таку задачу ЛП:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge -180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 100 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Розв'язування. Помножимо другу нерівність на (–1) і введемо відповідно допоміжні змінні x_4 і x_5 для другого та третього обмеження:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 180 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 100 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Неважко переконатися, що допоміжні змінні, у цьому разі x_4 і x_5, є невід'ємними, причому їх уведення не змінює цільової функції.

Отже, будь-яку задачу ЛП можна записати в такій канонічній формі:

знайти максимум функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$ (2.4)

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.5)$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \quad (2.6)$$

Задачу (2.4)—(2.6) можна розв'язувати на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (–1), тобто

$$\max Z = \min(-Z) = \min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n).$$

2.2. Визначення множини допустимих планів задачі ЛП

Задачу ЛП (ЗЛП) зручно записувати за допомогою знака суми «Σ». Справді, задачу (2.4)—(2.6) можна подати так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0 \, (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ще компактнішим є запис ЗЛП у матричному вигляді:

$$Z = CX \to \max$$

за умов

$$AX = A_0,$$

$$X \ge 0,$$

де

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

є матриця коефіцієнтів при змінних

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця - стовпець змінних; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матриця - стовпець вільних членів;

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — матриця - рядок коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Часто ЗЛП зручно записувати у векторній формі:

$$Z = \vec{C} \cdot \vec{X} \to \max$$

за умов

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \ldots + \vec{A}_n x_n = \vec{A}_0,$$

$$\vec{X} \ge 0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \qquad \vec{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є вектори коефіцієнтів при змінних.

2.3. Геометрична інтерпретація ЗЛП. Канонічна форма ЗЛП і її оптимальний план.

Геометричну інтерпретацію ЗЛП розглянемо на такому прикладі. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукровий буряк на площі 20 га, відвівши під цукровий буряк не менш як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур наведені в
таблиці 2.1

Таблиця 2.1

№ з/п	Техніко-економічний показник із розрахунку на 1 га	Сільськогосподарська культура		Наявний ресурс
		Озима пшениця	Цукровий буряк	
1	Жива праця, людино-днів	5	25	270
2	Механізована праця, людино-днів	2	8	80
3	Прибуток, тис. грн.	0,7	1	

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Запишемо економіко-математичну модель структури виробництва озимої пшениці та цукрового буряка, скориставшись такими позначеннями:

x_1 — шукана площа посіву озимої пшениці;

x_2 — шукана площа посіву цукрового буряка.

ЗЛП має вигляд:

$$Z = 0,7x_1 + x_2 \to \max \tag{2.7}$$

за умов

$$x_1 + x_2 \le 20, \tag{2.8}$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270, \tag{2.9}$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80, \tag{2.10}$$

$$x_2 \ge 5, \tag{2.11}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \tag{2.12}$$

Геометричну інтерпретацію задачі наведено на рис. 2.1.

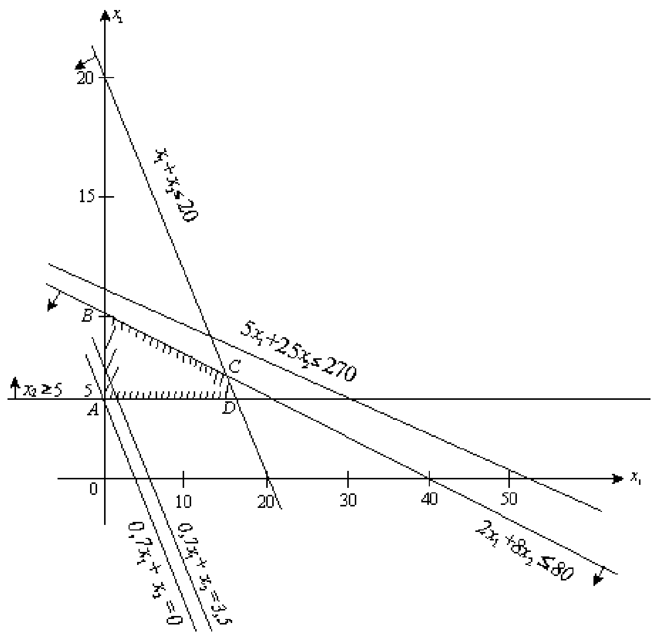


Рис. 2.1. Область допустимих розв'язків

Область допустимих розв'язків дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \le 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \le 20$. З цією метою в нерівність $x_1 + x_2 \le 20$ підставляємо координати якоїсь характерної точки, скажімо $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2 \le 20$. Цей факт на рис. 2.1 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (2.8)—(2.12). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис. 2.1 — многокутник *ABCD).* Цільова функція $Z = 0,7x_1 + x_2$ описує сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z. Зокрема, якщо Z = 0, маємо $0,7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли Z = 3,5, дістаємо пряму $0,7x_1 + x_2 = 3,5$.

Загальна задача лінійного програмування (2.1)—(2.3) геометричне інтерпретується так: кожне *і*-те обмеження, що має вигляд рівняння

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$

у *n*-вимірному просторі основних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задає гіперплощину. Кожному обмеженню виду (2.2) і (2.3) відповідають гіперплощина та півпростір, який лежить по один бік цієї гіперплощини. У перетині всіх півпросторів, що визначаються обмеженнями задачі (2.2) і (2.3), утворюється опуклий многогранник допустимих її розв'язків. Цільову функцію

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

в *n*-вимірному просторі основних змінних можна геометричне інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z.

2.4. Основні аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють системі обмежень (2.2) і (2.3), називають ***допустимим розв'язком,*** або ***допустимим планом задачі***. Сукупність допустимих розв'язків (планів) задачі утворює ***область допустимих розв'язків задачі***.

Опорним планом задачі лінійного програмування називається план, утворений координатами вершини многогранника планів задачі. Отже, опорний план — це план, який задовольняє не менш ніж *n* лінійно незалежних обмежень (2.2) у вигляді строгих рівностей разом з обмеженням (2.3) щодо знака.

Опорний план називається ***невиродженим,*** якщо він є вершиною многогранника планів задачі, утвореного перетином точно n гіперплощин, тобто задовольняє n лінійно незалежних обмежень — строгих рівностей. У противному разі опорний план є ***виродженим***.

Якщо задача лінійного програмування має розв'язок і серед її планів є опорні, то хоча б один із них буде оптимальним.

Сукупність усіх розв'язків задачі лінійного програмування є многогранною опуклою множиною, яку називають ***многогранником розв'язків***.

Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многогранника розв'язків. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього многогранника, то вона досягає його і в будь-який точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

2.5. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

2.5.1. Основи графічного методу

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач з двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Розглянемо таку задачу. Знайти екстремум (мінімум, максимум) функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\left(\min\right) \tag{2.13}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \left\{\le, =, \ge\right\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \left\{\le, =, \ge\right\} b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \left\{\le, =, \ge\right\} b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \left\{\le, =, \ge\right\} b_m \end{cases} \tag{2.14}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{2.15}$$

Припустимо, що система (2.14) за умов (2.15) сумісна і многокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування (2.4) кожне i-те обмеження-нерівність (2.14) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ \left(i = 1, 2, \dots, m\right)$. Системою обмежень (2.14) описується спільна частина, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множина точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі. Таку множину точок називають ***многокутником розв'язків,* або *областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування***.

Умова (2.15) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометричне інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

Сформулюємо деякі властивості задачі лінійного програмування, застосовувані під час її графічного розв'язування.

Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многокутника розв'язків. А якщо цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині многокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підставляння координат якої в (2.13) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з розглянутих далі кроків.

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.14) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо многокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\overrightarrow{N}=(c_1;c_2)$, що задає напрям зростання значень цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1+c_2x_2=\text{const}$, перпендикулярну до вектора $\overrightarrow{N}$.
6. Переміщуючи пряму $c_1x_1+c_2x_2=\text{const}$ в напрямі вектора $\overrightarrow{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

Цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині *A* многокутника розв'язків (рис. 2.2).

Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка *AB* (рис. 2.3). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

Задача лінійного програмування не має оптимальних планів (рис. 2.4 — цільова функція не обмежена згори; рис. 2.5 — система обмежень задачі несумісна).

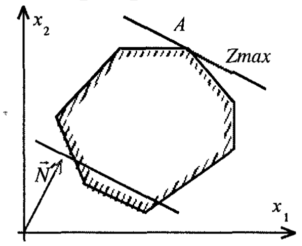


Рис. 2.2

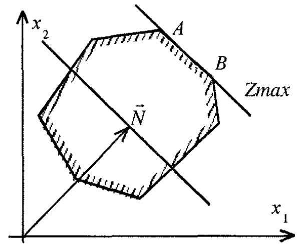


Рис 2.3

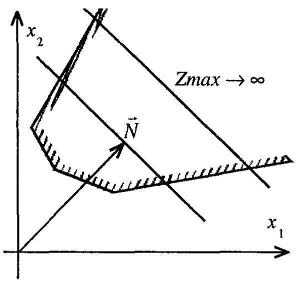


Рис. 2.4

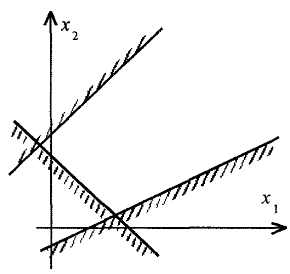


Рис 2.5

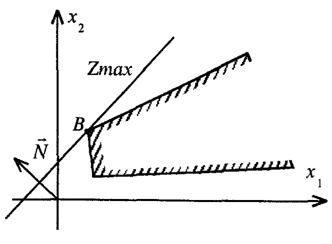


Рис. 2.6

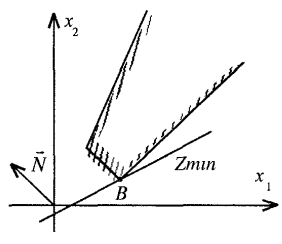
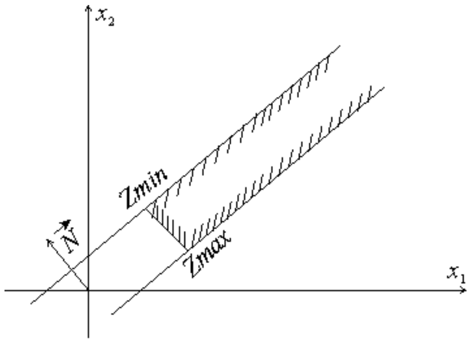


Рис. 2.7

Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 2.6 і 2.7). На рис. 2.6 у точці *B* маємо максимум, на рис. 2.7 у точці *B* — мінімум, на рис. 2.8 показано, що в разі необмеженої області допустимих планів цільова функція набуває максимальне і мінімальне значення.



2.5.2. Навчальні завдання. Розв'язування задач графічним методом
Розглянемо застосування графічного методу для розв'язування деяких економічних задач.

Задача 2.2. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає дві моделі збірних книжкових полиць — А та В. Полиці обох моделей обробляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки (у хвилинах) однієї полиці кожної моделі подано таблицею 2.2.

Таблиця 2.2

Верстати	**Тривалість обробки полиці, хв., за моделями**	
	А	**В**
1	30	15
2	12	26

Час роботи верстатів 1 та 2 становить відповідно 40 та 36 год. на тиждень. Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В — 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а попит на полиці моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень.
Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток фірми. Побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Змінними в моделі є тижневі обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В. Нехай x_1 — кількість полиць моделі А, виготовлюваних фірмою за тиждень, а x_2 — відповідна кількість полиць моделі В. Цільова функція моделі — максимізація прибутку фірми від реалізації продукції. Математично вона записується так:
$Z = 50x_1 + 30x_2 \rightarrow \max$
Обмеження математичної моделі враховують час роботи верстатів 1 та 2 для обробки продукції та попит на полиці різних моделей. Обмеження на час роботи верстатів 1 та 2 набирають такого вигляду:
для верстата 1 - $30x_1 + 15x_2 \leq 2400$ хв.;
для верстата 2 - $12x_1 + 26x_2 \leq 2160$ хв.
Обмеження на попит набирають вигляду:
$x_1 - x_2 \leq 30$ *і* $x_2 \leq 80.$
Отже, економіко-математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max, \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \le 2400 & (2.17) \\ 12x_1 + 26x_2 \le 2160 & (2.18) \\ x_1 - x_2 \le 30 & (2.19) \\ x_2 \le 80 & (2.20) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \quad (2.21)$$

Записана економіка-математична модель є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Розв'язування. Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження моделі. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис. 2.9). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї задовольняють розглядувану нерівність, а іншої — не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 2.9 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному разі таким зображенням є інша півплощина. Умова невід'ємності змінних $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі, — шестикутник *OABCDE.* Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку многокутника *OABCDE,* в якій цільова функція Z
Набуває найбільшого значення.

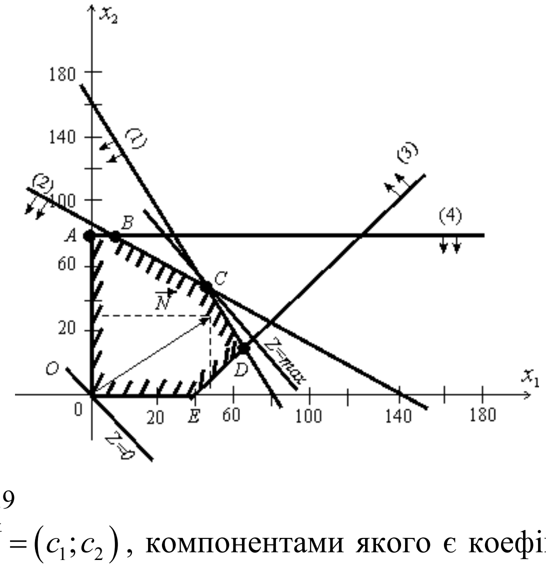


Рис.2.9

Для цього побудуємо вектор $\overrightarrow{N} = (c_1; c_2)$, компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\overrightarrow{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами $(x_1 = c_1;\ x_2 = c_2)$. У нашій задачі вектор $\overrightarrow{N} = (50; 30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор, протилежний йому, — напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню Z = 0. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки маємо визначити найбільше значення цільової функції, пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ в напрямі вектора $\overrightarrow{N}$ доти, доки не визначимо вершину многокутника, яка відповідає оптималь-

ному плану задачі.
Із рис. 2.9 бачимо, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та многокутника *OABCDE,* є точка С. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі, тобто обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В, що максимізують прибуток від їх реалізації.
Координати точки *C* визначаються перетином прямих (2.17) і (2.18):

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400 \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо $x_1 = 50; x_2 = 60.$ Отже, $X^* = (50; 60); \max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300.$ Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі А та 60 — моделі В, то вона отримає максимальний прибуток 4300 у. о. При цьому тижневий фонд роботи верстатів 1 та 2 буде використано повністю.

Задача 2.3 Невелика птахоферма має розрахувати оптимальний кормовий раціон для 1000 курчат, яких вирощують до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що тижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважатимемо, що в середньому за 8 тижнів вони досягнуть маси 500 г. З цією метою кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, ураховуючи лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів — зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість задано таблицею 2.3.

Таблиця 2.3

Корм	**Вміст поживних речовин, %**		**Вартість 1 кг корму, у.о.**
	Білок	**Клітковина**	
Зерно	10	2	0,40
Соєві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менш як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини.
Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, задовольняючи вимоги до загальних витрат кормової суміші та її поживності.

Побудова математичної моделі. Нехай x_1 — маса, кг, зерна в кормовій суміші, *а* x_2 — вміст, кг, соєвих бобів у готовій кормовій суміші.
Загальна кількість суміші $x_1 + x_2$ має становити не менш як 1000 • 0,5 = 500 (кг), тобто

$$x_1 + x_2 \geq 500$$

Розглянемо обмеження щодо поживності кормової суміші.
1. Суміш має містити не менш як 20 % білка:

$$10x_1 + 50x_2 \geq 20(x_1 + x_2)$$

2. Суміш має містити не більш як 5 % клітковини:

$$2x_1 + 8x_2 \leq 5(x_1 + x_2)$$

Остаточно математична модель задачі оптимізації кормового раціону набирає такого вигляду:

$Z = 0,40x_1 + 0,90x_2 \to \min;$ (2.22)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 500 & (2.23) \\ -10x_1 + 30x_2 \ge 0 & (2.24) \\ -3x_1 + 3x_2 \le 0 & (2.25) \end{cases}$$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0.$ (2.26)

Розв'язування. Графічну інтерпретацію задачі подано на рис. 2.10. Множина допустимих її розв'язків необмежена. Для вектора $\overrightarrow{N} = (0,4; 0,9)$ можна змінити масштаб, наприклад $\overrightarrow{N} = (200; 450)$. Найменшого значення цільова функція Z досягає в точці *A,* що лежить на перетині прямих (2.23) та (2.24). Визначимо її координати:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500, \\ -10x_1 + 30x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 375; \\ x_2 = 125 \end{cases}$$

Отже, $X^* = (375;125); \min Z = 0,4 \cdot 375 + 0,9 \cdot 125 = 262,5$.

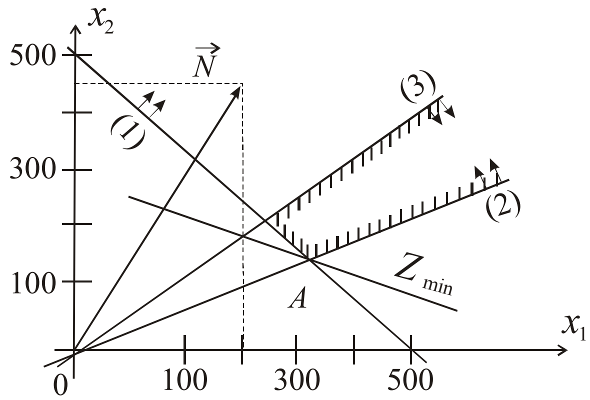


Рис. 2.10

Знайдений оптимальний план задачі показує: для того щоб отримати 500 кг кормової суміші мінімальної вартості (262,50 у. о.), потрібно взяти 375 кг зерна та 125 кг соєвих бобів. При цьому вимоги до поживності кормової суміші виконуватимуться:
0,10 • 375 + 0,50 • 125= 100кг білка, що становить рівно 20 % загальної маси суміші;
0,02 • 375 + 0,08 • 125 = 17,5 кг клітковини в кормовій суміші, що становить 3,5 % її маси і не перевищує 5 %.

ТЕМА 3
СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

3.1. Теоретичні відомості

Графічний метод для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості змінних вдаються до загального методу розв'язування задач лінійного програмування — так званого ***симплекс-методу***. Процес розв'язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод — це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
2. Побудова симплексної таблиці.
3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.
4. Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.
5. Повторення дій починаючи з п. 3. Розглянемо докладніше кожний з етапів алгоритму.

1. Визначення першого опорного плану починають із запису задачі лінійного програмування в канонічній формі, тобто у вигляді обмежень-рівнянь з невід'ємними правими частинами. Якщо в умові задачі присутні обмеження-нерівності, то перетворення їх на рівняння виконується за допомогою ***додаткових змінних,*** які вводяться до лівої частини обмежень типу « $\leq$ » зі знаком « + », а до обмежень типу « $\geq$ » — зі знаком « – ». У цільовій функції задачі додаткові змінні мають коефіцієнт нуль.

Після зведення задачі до канонічного вигляду її записують у векторній формі. За означенням опорного плану задачі лінійного програмування його утворюють m одиничних лінійно незалежних векторів, які становлять базис m - вимірного простору (де m — кількість обмежень у задачі лінійного програмування).

На цьому етапі розв'язування задачі можливі такі випадки:

• після запису задачі у векторній формі в системі обмежень є необхідна кількість одиничних векторів. Тоді початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій;

• у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних незалежних векторів. Тоді для побудови першого опорного плану застосовують ***метод штучного базису***. Ідея його полягає в тому, що відсутні одиничні вектори можна дістати, увівши до відповідних обмежень деякі змінні з коефіцієнтом +1, які називаються ***штучними***. У цільовій функції задачі лінійного програмування штучні змінні мають коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де M — досить велике додатне число.

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називають ***базисними,*** а всі інші змінні – ***вільними***. Їх прирівнюють до нуля та з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних. У такий спосіб отримують початковий опорний план задачі лінійного програмування.

2. Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного плану на оптимальність подають у вигляді симплексної таблиці.

У першому стовпчику таблиці – «Базис» – записують базисні змінні опорного плану, причому в тій послідовності, в якій вони розміщуються в системі обмежень задачі.

Наступний стовпчик симплексної таблиці – «$C_{баз}$» – коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі.

У третьому стовпчику – «План» – записують значення базисних змінних і відшукуванні у процесі розв'язування задачі компоненти оптимального плану.

У решті стовпчиків симплексної таблиці, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записують відповідні коефіцієнти з кожного обмеження задачі лінійного програмування.

3. Перевіряють опорний план на оптимальність згідно з наведеною далі теоремою.

! Теорема (ознака оптимальності опорного плану). Опорний план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ задачі лінійного програмування є оптимальним, якщо для всіх $j\left(j = \overline{1,n}\right)$ виконується умова

$Z_j - C_j \geq 0$ (для задачі на max)

або

$Z_j - C_j \leq 0$ (для задачі на min)

Якщо для побудови опорного плану було використано метод штучного базису, необхідною умовою оптимальності є також вимога, щоб у процесі розв'язування задачі всі штучні змінні були виведені з базису і дорівнювали нулю.

Значення оцінок $Z_j - C_j$ визначають за формулою

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \qquad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків «$C_{баз}$» та «x_j» мінус відповідний коефіцієнт C_j. Розраховані оцінки записують в окремий рядок симплексної таблиці, який називають ***оцінковим***.

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки:

а) усі $\Delta_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, і тоді визначений опорний план є оптимальним;

б) не всі Δ_j задовольняють умову оптимальності, і тоді потрібно виконати перехід до наступного, нового опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з нього деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Змінна, яка включається до нового базису, відповідає тій оцінці $Z_j - C_j$, що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок кілька, серед них вибирають найбільшу за абсолютною величиною і відповідну їй змінну вводять до базису. Припустимо, що індекс зазначеної змінної $j = k$. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх додатних a_{ik} напрямного стовпчика величину $\theta = b_i / a_{ik}$. Вибирають найменше значення θ, яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Відповідний рядок симплексної таблиці називатиметься ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається число симплексної таблиці a_{rk}, яке називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{rk}, і методу Жордана-Гаусса розраховують нову симплексну таблицю.

Далі ітераційний процес повторюють доти, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $Z_j - C_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{rk}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки $Z_j - C_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

3.2. Приклади розв'язування задач симплекс-методом

Розглянемо застосування симплекс-методу для розв'язання деяких задач лінійного програмування.

Задача 3.1. Продукція чотирьох видів A, B, C і D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду на верстатах наведена в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції (год.)			
	A	B	C	D
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн для верстата 1 і 15 грн. — для верстата 2. Тривалість використання верстатів обмежена: для верстата 1 вона становить 450 машино-годин, а для верстата 2 — 380 машино-годин.

Ціна одиниці продукції видів A, B, C і D дорівнює відповідно 73, 70, 55 та 45 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний прибуток.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_j — план виробництва продукції j-го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Умовами задачі будуть обмеження на тривалість використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

для верстата 1 $\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450$ (маш.-год.);

для верстата 2 $\quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380$ (маш.-год.).

Цільовою функцією задачі є загальний прибуток від реалізації готової продукції, який розраховується як різниця між ціною та собівартістю виготовлення продукції кожного виду:

$$\max Z = (73 - (2\cdot 10 + 3\cdot 15))x_1 + (70 - (3\cdot 10 + 2\cdot 15))x_2 + \\ + (55 - (4\cdot 10 + 1\cdot 15))x_3 + (45 - (2\cdot 10 + 2\cdot 15))x_4;$$

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 .$$

Отже, математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,\ 4}.$$

Розв'язування. Розв'яжемо задачу симплекс-методом згідно з розглянутим алгоритмом.

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 та x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,\ 6}.$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають недовикористаний для виробництва продукції час роботи верстатів 1 та 2. У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6.$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$ одиничні та лінійно незалежні, то саме з них складається початковий базис у зазначеній системі векторів. Змінні задачі x_5 та x_6, що відповідають одиничним базисним векторам, називають *базисними*, а решту — *вільними змінними* задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 450, \quad x_6 = 380.$$

Згідно з визначеними $x_j \left(j = \overline{1, 6} \right)$ векторна форма запису системи обмежень цієї задачі матиме вигляд:

$$0 \cdot \vec{A}_1 + 0 \cdot \vec{A}_2 + 0 \cdot \vec{A}_3 + 0 \cdot \vec{A}_4 + 450 \cdot \vec{A}_5 + 380 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 та x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0.$$

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
← x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	150
x_6	0	380	3	2 ↑	1	2	0	1	190
$\Delta j = Zj - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - c_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) - 8 = -8;$$
$$Z_2 - c_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 10 = -10;$$
$$Z_3 - c_3 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) - 0 = 0;$$
$$Z_4 - c_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5;$$
$$Z_5 - c_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$
$$Z_6 - c_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0.$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z, якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0$.

3. Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), то визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку є хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ та $\Delta_2 = -10$ від'ємні, тобто не задовольняють умову оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюють зміною базису, тобто через виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису вибираємо змінну x_2, оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка з-поміж тих, які не задовольняють умову оптимальності
($|-10|>|-8|$).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика «x_2» знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці маємо, що $\min\theta = \{450/3;\ 380/2\} = 150$, і тому з базису виключаємо змінну x_5, а число $a_{12} = 3$ — *розв'язувальний елемент*. Дальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана—Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	10	150	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0	225
← x_6	0	80	5/3	0	–5/3	2/3	–2/3	1	48
$\Delta j = Z_j - c_j \geq 0$		1500	–-4/3	0	40/3	35/3	10/3	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і «$C_{баз}$», а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими нижче правилами:

1. Кожний елемент розв'язувального (напрямного) рядка необхідно поділити на розв'язувальний елемент і отримані числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за правилом прямокутника.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв’язувальний елемент (число 1);

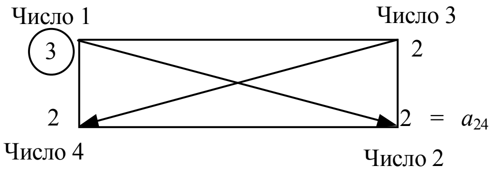
2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 — елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають за такою формулою:

$$\frac{\text{Число 1} \cdot \text{Число 2} - \text{Число 3} \cdot \text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24}, який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика «x_4». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24} = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 2) : 3 = 2/3$. Це значення записуємо в стовпчик «x_4» у другому рядку другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі й елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів зображення визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $Z_j - c_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Базис	$C_б$	План	8	10	0	– 5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	118	0	1	2	2/5	3/5	–2/5
x_1	8	48	1	0	–1	2/5	–2/5	3/5
$\Delta j = Z_j - c_j \geq 0$		1564	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від’ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$X^* = (x_1 = 48;\ x_2 = 118;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0)$,

або

$X^* = (48;\ 118;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$;

$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1564$.

Отже, план виробництва продукції, що передбачає випуск 48 одиниць продукції А та 118 одиниць продукції В, є оптимальним. Він уможливлює отримання найбільшого прибутку за заданих умов (1564 грн). При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Наведені вище три симплексні таблиці можна об’єднати в одну та послідовно записувати в ній всі ітерації.

ТЕМА 4
МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

У попередніх темах розглядався випадок, коли система обмежень задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю порядку m. Проте більшість задач не можна звести до потрібного вигляду. В такому разі застосовується метод штучного базису.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n). \tag{4.3}$$

Задача подана в канонічному вигляді і система обмежень (4.2) не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можна, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі додати одну змінну $x_{n+i} \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$. Такі змінні називають ***штучними***. (Не обов'язково кількість введених штучних змінних має дорівнювати m. Їх необхідно вводити лише в ті рівняння системи обмежень, які не розв'язані відносно базисних змінних.) Допустимо, що система рівнянь (4.2) не містить жодного одиничного вектора, тоді штучну змінну вводять у кожне рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{4.4}$$

$x_j \geq 0$ $(j = 1,2,...,n+m)$.

У результаті додавання змінних у рівняння системи (4.2) область допустимих розв'язків задачі розширилась. Задачу з системою обмежень (4.4) називають ***розширеною***, або ***М-задачею***. Розв'язок розширеної задачі збігатиметься з розв'язком початкової лише за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі будуть виведені з базису, тобто дорівнюватимуть нулеві. Тоді система обмежень (4.4) набуде вигляду (4.2) (не міститиме штучних змінних), а розв'язок розширеної задачі буде розв'язком і задачі (4.1)—(4.3).

Згідно з симплексним методом до базису вводять змінні, які покращують значення цільової функції. Для даної задачі на максимум вони мають його збільшувати. Отже, для того, щоб у результаті процедур симплексних перетворень виключалися з базису штучні змінні, потрібно ввести їх у цільову функцію з від'ємними коефіцієнтами. Тобто цільова функція набуде вигляду:

$$\max F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - ... - Mx_{n+m}$$

(У разі розв'язання задачі на відшукання мінімального значення цільової функції вводять коефіцієнти, які є досить великими числами. Цільова функція тоді має вигляд: $\min F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + Mx_{n+1} + ... + Mx_{n+m}$).

Припускається, що величина M є досить великим числом. Тоді якого б малого значення не набувала відповідна коефіцієнту штучна змінна x_{n+i}, значення цільової функції F^* буде від'ємним для задачі на максимум та додатним для задачі на мінімум і водночас значним за модулем. Тому процедура симплексного методу одразу вилучає відповідні змінні з базису і забезпечує знаходження плану, в якому всі штучні змінні $x_{n+i} = 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення $x_{n+i} > 0$, то це означає, що початкова задача не має розв'язку, тобто система обмежень несумісна.

Для розв'язання розширеної задачі за допомогою симплексних таблиць зручно використовувати таблиці, оцінкові рядки яких поділені на дві частини-рядки. Тоді в ($m+2$)-му рядку записують коефіцієнти з M, а в ($m+1$)-му — ті, які не містять M. Вектор, який підлягає включенню до базису, визначають за ($m+2$)-м рядком. Ітераційний процес по ($m+2$)-му рядку проводять до повного виключення всіх штучних змінних з базису, потім процес визначення оптимального плану продовжують за ($m+1$)-им рядком.

Взаємозв'язок між розв'язками початкової та розширеної задач лінійного програмування не є очевидним і визначається такою теоремою.

Теорема 4.1. Якщо в оптимальному плані $\widehat{X}_{opt} = = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = = 0, (i = 1, 2, ..., m)$, то план $X_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ є оптимальним планом початкової задачі.

Отже, загалом ***алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом*** складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
2. Побудова симплексної таблиці.
3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок Δ_j. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Δ_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.
4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням розв'язувального елемента та розрахунками елементів нової симплексної таблиці.
5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

Далі ітераційний процес повторюють, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.
2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.
3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки Δ_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

Задача 4.1. Розв'язати задачу з прикладу 2.10 із додатковою умовою: продукція С має виготовлятися обсягом не менш як 9 одиниць.

Розв'язування. Математичну модель сформульованої задачі запишемо так:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \\ x_3 \ge 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Застосовуючи для розв'язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Зауважимо, що нерівність типу « ≥ » перетворюємо у рівняння введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком «–».

Система містить лише два одиничні вектори — $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом + 1 штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\vec{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \geq \overline{1,8}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $–M$ (для задачі на max), де M — досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі такий:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380;\ 0;\ 9),$$

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 0 \cdot 0 - M \cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю цієї задачі:

Базис	$C_б$	План	8	10	0	-5	0	0	0	-M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
← x_8	$-M$	9	0	0	1 ↑	0	0	0	–1	1	9
$\Delta j = Z_j - c_j \geq 0$		0	– 8	-10	0	5	0	0	0	0	
		– 9M	0	0	-M	0	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо: $Z_0 = –9M$; $Z_1 – c_1 = –8$; $Z_2 – c_2 = –10$, $Z_3 – c_3 = –M$ і т. д. Отже, ми отримуємо оцінки двох видів: одні з них містять M, а інші є звичайними числами. Тому для зручності розділимо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок будемо записувати звичайні числа, а в другий — числа з коефіцієнтом M.

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, розглянутим у задачі 2.41, виконуємо перехід до наступного опорного плану

Базис	$C_б$	План	8	10	0	-5	0	0	0	$-M$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
← x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	-4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1	185.5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	–
Δj	–	0	-8	-10 ↑	0	5	0	0	0	0	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	-4/3	207
← x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	-2/3	1	-5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	–
Δ_j	–	1380	-4/3 ↑	0	0	35/3	10/3	0	40/3	-40/3	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	-2/5	2	-2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	-2/5	3/5	-1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	
Δj		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	-12	

Оптимальним планом задачі є вектор:

$X^* = (57; 100; 9; 0; 0; 0; 0)$,

$\max Z = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 = 1456.$

Отже, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 грн.

Задача 4.2. Фінансові ресурси фірми можуть використовуватися для вкладення у два проекти. За інвестування в проект А гарантується отримання через рік прибутку в розмірі 60 коп. на кожну вкладену гривню, а вкладення в проект В дає змогу отримати дохід у розмірі 2 грн. на кожну інвестовану гривню, але через два роки. За фінансування проекту В період інвестування має бути кратним двом. Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом у сумі 100 000 грн., щоб максимізувати загальний грошовий дохід, який можна отримати через три роки після початку інвестування.

Розв'язування. Нехай x_{ij} — розмір вкладених коштів у i-му році в проект j ($i = \overline{1,3}$; $j = 1, 2$). Побудуємо умовну схему розподілу грошових коштів протягом трьох років.

		Проект А	**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року	100 000	
	Альтернативні вкладення	x_{11}	x_{12}
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{11}$	—
2-й рік	Наявна сума на початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$	

	Альтернативні вкладення	x_{21}	x_{22}
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{21}$	$3x_{12}$
3-й рік	Наявна сума на початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$	
	Альтернативні вкладення	x_{31}	—
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{31}$	$3x_{22}$

Згідно з наведеною схемою можна записати математичну модель задачі.

Цільова функція: грошовий дохід фірми після трьох років інвестицій

$$\max Z = 1{,}6x_{31} + 3x_{22}.$$

Обмеження моделі сформулюємо згідно з такою умовою: розмір коштів, інвестованих у поточному році, не може перевищувати суми залишку коштів минулого року та доходу за минулий рік:

для 1-го року $x_{11} + x_{12} \le 100\,000$;

для 2-го року $x_{21} + x_{22} \le 100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$;

для 3-го року $x_{31} \le 100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$.

Виконавши елементарні перетворення, дістанемо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100\,000; \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0. \end{cases}$$

Отже, економіко-математична модель сформульованої задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 1{,}6x_{31} + 3x_{22}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100\,000; \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3};\ \ j = 1, 2.$$

Очевидно, що ця задача є задачею лінійного програмування і її можна розв’язати симплекс-методом. Згідно з алгоритмом необхідно звести систему обмежень задачі до канонічної форми. Це виконується за допомогою додаткових змінних x_1, x_2, та x_3, які введемо зі знаком «+» до лівої частини всіх відповідних обмежень. У цільовій функції задачі ці змінні мають коефіцієнт, що дорівнює нулю.

Розв’язування задачі наведено у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_1	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
$Z_j - c_j \ge 0$		0	–4,8	–4,8	0,44	0	0	0	3	1,6

← x_{11}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	160 000	0	1,6	1	1	0	1,6	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3 ↑	–1,6	0	1	0	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Оптимальним є такий план:

$X_1^* = (x_{11} = 100\,000;\ x_{22} = 160\,000).$

За такого плану інвестувань $Z_{\max} = 480\,000$ грн.

Але задача має ще один оптимальний план, який можна дістати, вибравши розв'язувальний елемент у стовпчику «x_{12}» останньої симплексної таблиці. Це може бути або число 1, або 1,6. Візьмемо як розв'язувальний елемент 1. Виконавши один крок перетворень симплекс-методом, дістанемо таку другу кінцеву симплексну таблицю:

Базис	$C_б$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_{12}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	300 000	3	0	–1,6	0	1	3	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Звідси:

$X_2^* = (x_{12} = 100\,000;\ \ x_{31} = 300\,000), Z_{\max} = 480\,000$ грн.

Зобразимо використання грошових коштів фірми за першим оптимальним планом задачі у вигляді схеми:

		Проект А		**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 грн.	
	Вкладення	x_{11} = 100 000		x_{12} = 0
	Дохід на кінець року			160 000 грн.
2-й рік	Наявна сума на початок року		160 000 грн.	
	Вкладення	x_{21} = 0		x_{22} = 160 000
	Дохід на кінець року			0 грн.
3-й рік	Наявна сума на початок року		0 грн.	
	Вкладення			
	Дохід на кінець року	x_{31}		**480 000 грн.**

Згідно з розглянутою схемою перший оптимальний план інвестування передбачає на перший рік усі кошти обсягом 100 000 грн вкласти в проект А, що дасть змогу одержати прибуток обсягом 60 000 грн, а загальна сума в кінці року становитиме 160 000 грн. На другий рік усі кошти в розмірі 160 000 грн передбачається витратити на фінансування проекту В. Наприкінці другого року фірма прибутку не отримає. На третій рік фінансування проектів не передбачається, але в кінці року прибуток фірми від минулорічних інвестицій проекту В становитиме 320 000 грн., а загальний грошовий дохід — 480 000 грн.

Такий же максимальний дохід можна мати, провівши інвестиції за схемою:

		Проект А		**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 грн.	
	Вкладення	$x_{11} = 0$		$x_{12} = 100\,000$
	Дохід на кінець року		0 грн.	
2-й рік	Наявна сума на початок року		0 грн.	
	Вкладення	$x_{21} = 0$		$x_{22} = 0$
	Дохід на кінець року		300 000 грн.	
3-й рік	Наявна сума на початок року		300 000 грн.	
	Вкладення	$x_{31} = 300\,000$		
	Дохід на кінець року			**480 000 грн.**

Згідно з другим оптимальним планом у першому році фірма спрямовує весь капітал у розмірі 100 000 грн. на фінансування проекту В. Це уможливить одержання грошового доходу лише наприкінці другого року обсягом 300 000 грн., які на третій рік повністю інвестуються в проект А. Загальний грошовий дохід фірми за три роки діяльності за цим варіантом також становитиме 480 000 грн.

Якщо як розв’язувальний елемент в останній симплексній таблиці взяти число 1,6, то матимемо третій оптимальний план:

$$x_{11} = 50000; x_{12} = 50000;$$
$$x_{22} = 80000;$$
$$x_{31} = 150000.$$
$$Z_{\max} = 480000.$$

ТЕМА 5
ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

5.1. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряженних задач ЛП.

Кожній задачі лінійного програмування відповідає ***двоїста,*** що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Якщо пряма задача лінійного програмування має вигляд

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \le b_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n},$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

за обмежень

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{m1}y_m \le c_1, \\ \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{m2}y_m \le c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \ldots + \alpha_{mn}y_m \le c_n, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,m},$$

Порівнюючи ці дві сформульовані задачі, доходимо висновку, що ***двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за такими правилами.***

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.
2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.
3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.
4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.
5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.
6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

5.2. Двоїсті оцінки. Стійкість оптимальних планів прямої та двоїстої задач.

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У симетричних задачах обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У несиметричних задачах обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої — лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Різні можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач наведено далі.

Симетрична задача.

Пряма задача.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i;$$

$$x_j \ge 0.$$

Двоїста задача

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$y_j \ge 0.$$

Несиметрична задача.

Пряма задача.

Двоїста задача

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i; i \in \{1,...,m_1\}, m_1 \le m; \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i; i \in \{m_1+1,...,m\}; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j \in \{1,...,n_1\}, n_1 \le n,$$

$$x_j \text{ приймає будь-яке значення коли } j \in \{n_1+1,...,n\}$$

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_j \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j; j \in \{1,...,n_1\}, n_1 \le n; \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i = c_j; j \in \{n_1+1,...,n\}; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i \in \{1,...,m_1\}, m_1 \le m,$$

$$y_i \text{ приймає будь-яке значення коли } i \in \{m_1+1,...,m\}.$$

5.3. Основні теореми двоїстості задач та їх економічний зміст.

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв'язок, який випливає з наведених далі теорем.

! ***Перша теорема двоїстості.*** Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\max Z = \min F$, і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв'язків.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план *X**, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається зі співвідношення

$$Y^* = \vec{c}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{баз}$ — вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; $\boldsymbol{D}^{-1}$ — матриця, обернена до матриці $\boldsymbol{D}$, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця $\boldsymbol{D}^{-1}$ завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв'язок іншої задачі.

! ***Друга теорема двоїстості.*** Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі *i*-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний *i*-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо *i*-й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне *i*-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

! ***Третя теорема двоїстості.*** Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

5.4. Післяоптимізаційний аналіз задач ЛП.

Розглянемо застосування теорії та співвідношень двоїстості на конкретних прикладах.

Задача 5.1. До наведеної задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати одну з них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0.$$

Розв'язування. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція Z максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак « ≤ ». Тому перше обмеження моделі по множимо на
(−1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to \text{max}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$F = -y_1 + 5y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -5, \\ -y_1 + 3x_2 \geq 2, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \ \ y_2 \geq 0.$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній вектор $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тому використаємо штучну змін ну в першому обмеженні.

Розширена задача лінійного програмування буде така:

$\max\left(-5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5\right);$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

У цій задачі x_4 та x_5 — базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 — вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5;\ x_5 = 1$. Перший опорний план задачі:

$x_0 = \left(0;0;0;5;1\right), Z_0 = -M.$

Подальше розв'язування прямої задачі подано у вигляді симплекс-таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	–5 x_1	2 x_2	0 x_3	0 x_4	M x_5	θ
$\leftarrow x_5$ x_4	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	–1 0	0 1	1 0	1 5/3
$Z_j - C_j \geq 0$		0 $-M$	5 $-M$	–2 $-M$	0 M	0 0	0 0	
x_2 $\leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 –1	1 0	–1 3	0 1	1 –3	– 2/3
$Z_j - C_j \geq 0$		2	7	0	–2	0	$2 + M$	
x_2 x_3	2 0	5/3 2/3	2/3 –1/3	1 0	0 1	1/3 1/3	0 –1	
$Z_j - C_j \geq 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	$0 + M$	

З останньої симплекс-таблиці бачимо, що оптимальний план прямої задачі

$X^* = \left(0; 5/3; 2/3; 0\right),\ Z_{\max} = 10/3.$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна записати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$\min F = \max Z = 10/3,$

$$Y^* = \vec{c}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{баз}$ = (2; 0) та міститься в стовпчику «$C_{баз}$» останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

він також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_5» та «x_4», які утворювали початковий базис. Отже,

$$Y^* = (2;0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;2/3),$$

$$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Застосовуючи до розв'язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв'язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

Задача 5.2. До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$$Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,3}.$$

Розв'язування. За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$\boldsymbol{F = y_1 + 4y \to \max;}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 1, \\ y_1 + 2y_2 \leq 2, \\ -y_1 + y_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$y_2 \geq 0.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 — лише невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв'язати графічно (рис. 5.1).

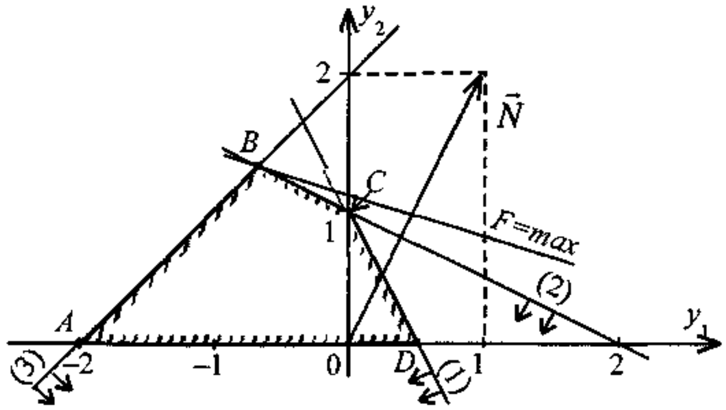


Рис. 5.1

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі F досягає в точці B многокутника $ABCD$. Її координати:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

тобто $Y^* = (-2/3;4/3); \max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3.$

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot(-2/3)+4/3=0; \\ -2/3+2\cdot 4/3=2; \\ -1\cdot(-2/3)+4/3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<1; \\ 2=2; \\ 2=2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, доходимо висновку, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $y_2 = 4/3$ додатна, доходимо висновку, що друге обмеження прямої задачі для X^* виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій $x_1 = 0$, та визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто $X^* = (0;5/3;2/3), \min Z = 1\cdot 0 + 2\cdot 5/3 + 2\cdot 2/3 = 14/3$

Умова $\min Z = \max F = 14/3$ виконується, і тому $X^* = (0;5/3;2/3); Y^* = (-2/3;4/3)$ є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.

Задача 5.3. Визначити, чи оптимальні такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$Z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

а) $x = (8/7;3/7;0)$; б)$x = (0;1/5;8/5)$; в)$x = (1/3;0;1/3)$.

Розв'язування. Принцип розв'язування задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу та припускаючи, що відповідний план X є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої за дачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій збігатимуться, то припущення правильне. Протилежного висновку можна дійти в таких випадках.

1. Якщо запропонований план X недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі.
2. Якщо визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі.
3. Якщо визначений план двоїстої задачі допустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції F не дорівнює значенню функції Z, тобто не виконується умова першої теореми двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу до прямої задачі лінійного програмування:

$$F = y_1 + 2y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 12, \\ -3y_1 + 2y_2 \leq -4, \\ y_1 + y_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$y_1 \in \left]-\infty;\infty\right[, y_2 \geq 0.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot\dfrac{8}{7}-3\cdot\dfrac{3}{7}+0=1; \\ \dfrac{8}{7}+2\cdot\dfrac{3}{7}+0=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=1; \\ 2=2, \end{cases}$$

Обидва обмеження виконуються і тому X = (8/7; 3/7; 0) є допустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді для нього Z = 12·8/7 + 4·3/7+ 2·0=12.

Скористаємося другою теоремою двоїстості та визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0;\quad x_2 = 3/7 > 0$, то згідно з другою частиною другої теореми двоїстості можна записати перше та друге обмеження як рівняння і визначити y_1 і y_2:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 12; \\ -3y_1 + 2y_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в третє обмеження системи двоїстої задачі:

$y_1 + y_2 \le 2;$

$4+4=8>2.$

Для визначених значень $y_1 = 4$; $y_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план $Y = (4;4)$ є недопустимим планом двоїстої задачі. Унаслідок цього наше припущення, що $X = (8/7; 3/7; 0)$ є оптимальним планом вихідної задачі, виявилося помилковим.

2. X = (0; 1/5; 8/5)Підставимо цей план в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot 0 - 3\cdot 1/5 + 8/5 = 1; \\ 0 + 2\cdot 1/5 + 8/5 = 2. \end{cases}$$

План допустимий і для нього Z=12·0–4· 1/5 + 2·8/5 = 12/5.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_3 та x_2 додатні, то друге та третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4; \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8/5; \\ y_2 = 2/5. \end{cases}$$

Перевіримо, що виконується перше обмеження двоїстої задачі для визначених значень y_1 та y_2: 2 • 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12. Отже, перше обмеження виконується, і тому Y = (8/5; 2/5) є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього F = 8/5 + 2 • 2/5 = 12/5 = Z. З огляду на викладене можна зробити висновок, що $Y^* = (8/5; 2/5)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, а $X^* = (0; 1/5; 8/5)$ – оптимальним планом прямої задачі.

Наше припущення відносно запропонованого плану виявилося правильним.

3. X= (1/3; 0; 1/3). Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються так:

$$\begin{cases} 2\cdot 1/3 - 3\cdot 0 + 1/3 = 1; \\ 1/3 + 2\cdot 0 + 1/3 = 2/3 \ne 2. \end{cases}$$

Оскільки X= (1/3; 0; 1/3) є недопустимим планом, то він не може бути також оптимальним планом прямої задачі.

Отже, перевірка запропонованих планів на оптимальність дала такі результати: а) ні; б) так, $Y^* = (0; 1/5; 8/5), \min Z = 12/5;$ в) ні.

ТЕМА 6
АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

6.1. Аналіз розв'язків оптимізаційних задач, рентабельності і дефіциту.

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів. Для виробництва n видів продукції використовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$. Норма витрат кожного ресурсу на одиницю продукції становить $\alpha_{ij}\left(j=\overline{1,n}; i=\overline{1,m}\right)$. Ціна одиниці продукції j-го виду дорівнює $c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$\max Z=\max\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\left(i=\overline{1,m}\right);$$

$$x_j\ge 0\left(j=\overline{1,n}\right).$$

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*\right)$, який дає найбільший дохід.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$F=\sum_{i=1}^{m}b_i y_i\to\min;$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j\quad\left(j=\overline{1,n}\right);$$

$$y_i\ge 0\quad\left(i=\overline{1,m}\right).$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає ось у чому. Визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, використовуваних для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці 7-го ресурсу, їх інколи ще називають ***тіньовою ціною відповідного ресурсу.***

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на ***дефіцитні*** та ***недефіцитні*** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i, в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним.*** Якщо ж двоїста оцінка $y_i>0$, то i-й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним.*** У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої за дачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), виготовляти продукцію не вигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j=0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j>0$.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до змін умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

–склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;

–склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;

–змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв'язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

3. Уведення нової змінної в математичну модель задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

6.2. Навчальні завдання

Розглянемо конкретний приклад, що підтверджує зроблені висновки.

Задача 6.1. Деяке підприємство виробляє чотири види продукції А, В, С і Д, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю кожної продукції (в умовних одиницях) наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, ум. од., за видами продукції				Запас ресурсу
	А	В	С	Д	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: для продукції А – 2 ум. од., для В і Д – по 4 од., для С – 3 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству найбільший дохід. На ведемо симплекс-таблицю, що відповідає оптимальному плану поставленої задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	45	–2	1/2	0	1	1/2	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	3/2	1	0	–1/2	0	2
$Z_j - C_j \geq 0$		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Виконаємо зазначені далі дії.

1. Сформулювати математичну модель даної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї.
2. Записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач і зроби ти їх економічний аналіз.
3. Визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.
4. Визначити план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо запас першого ресурсу збільшити на 10 од., другого – зменшити на 10 од., а третього – збільшити на 20 ум. од.
5. Визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві.
6. Розрахувати інтервали можливої зміни ціни одиниці кожного виду продукції.

Розв'язування. 1. Математичні моделі прямої та двоїстої задачі мають такий вигляд:

$$Z = 2x_2 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 250, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 280, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 80, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4};$$

де x_j – обсяг виробництва продукції j–го виду ($j = \overline{1,4};$)

$$F = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 4, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3, \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3},$$

де y_j – оцінка одиниці i–го виду ресурсу ($j = \overline{1,3}$).

2. З наведеної симплекс-таблиці маємо:

$$X^* = (0;0;35;45;0;30;0), \max Z = 285;$$

$$Y^* = (4;0;3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2;0;2);$$

$$\min F = 250/2 + 160 = 285 = \max Z.$$

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво лише двох видів продукції С і Д у кількості відповідно 35 та 45 од. Випуск продукції А та В не передбачається $(x_1 = x_2 = 0)$. Додаткові змінні x_5, x_6, x_7 характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки $x_6 = 30$, другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а перший та третій ресурси — повністю $(x_5 = x_7 = 0)$. За такого оптимального плану виробництва продукції та використання ресурсів підприємство отримує найбільший дохід у розмірі 285 ум. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві. Так, $y_1 = 1/2$ та $y_3 = 2$ відмінні від нуля, а ресурси 1 та 2 використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: $\min F = 285$ ум. од.

3. Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший — підстановкою X^* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у противному разі — недефіцитний.

$$\begin{cases} 2\cdot 0 + 5\cdot 0 + 2\cdot 35 + 4\cdot 45 = 250 & \text{(ресурс 1 дефіцитний);} \\ 1\cdot 0 + 6\cdot 0 + 2\cdot 35 + 4\cdot 45 = 250 < 280 & \text{(ресурс 2 недефіцитний);} \\ 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 35 + 1\cdot 45 = 80 & \text{(ресурс 3 дефіцитний).} \end{cases}$$

Другий спосіб – за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля – ресурс недефіцитний.

Третій спосіб – за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i–го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $y_i = 0$, то $i-$й ресурс недефіцитний. Так,

y_1 = 1/2 (ресурс 1 дефіцитний);
y_2 = 0 (ресурс 2 недефіцитний);
y_3 = 2 (ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю $(b_1 = 250+1 = 251)$, то цільова функція $\max Z$ збільшиться за інших однакових умов на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме $\max Z = 285{,}5$ ум. од. Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпчика «x_5» останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці $y_1 = 1/2$. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_4^* збільшиться на 1/2, змінної x_6^*— зменшиться на одиницю, а x_3^* — на 1/2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

X^*=(0; 0; 34,5; 45,5; 0; 29; 0).

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов приводить до зростання випуску продукції Д та падіння виробництва продукції С, а обсяг використання ресурсу 2 збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде $\max Z = 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 3\cdot 34{,}5 + 4\cdot 45{,}5 = 285{,}5$, тобто зросте на $y_1 = 1/2$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 2 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю$(b_3 = 80+1 = 81)$. Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $y_3 = 2$, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0;0;37;44;0;30;0).$$

$$\max Z = 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 3\cdot 37 + 4\cdot 44 = 287.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції С на дві одиниці та зменшення випуску продукції Д на одну одиницю. При цьому обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: а чи зберігатимуться встановлені пропорції, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а наприклад, на 10 ум. од.? Щоб однозначно відповісти на поставлене запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень.

Приріст (зміну) запасу ресурсу 1 позначимоΔb_1. Тоді, якщо $b_1' = b_1 + \Delta b_1$, то новий оптимальний план

$X^* = (0;0;35-1/2\Delta b_1;45+1/2\Delta b_1;0;30-\Delta b_1;0).$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, — це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 35-1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 45+1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 30-\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \leq 70; \\ \Delta b_1 \geq 90; \\ \Delta b_1 \leq 30; \end{cases}$$

$$-90 \leq \Delta b_1 \leq 30.$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум. од. або зменшиться на 90 ум. од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу 1 залишиться $y_1 = 1/2$. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах

$250-90 \le b_1+\Delta b_1 \le 250+30,$

$$160 \le b_1 \le 280.$$

Згідно з цим максимально можливий дохід підприємства перебуватиме в межах

$250-90\cdot 1/2 \le Z_{\max} \le 285+30\cdot 1/2,$

$$240 \le Z_{\max} \le 300,$$

а оптимальний план виробництва продукції

(0; 0; 80; 0; 0; 120; 0) $\le X^* \le$ (0; 0; 20; 60; 0; 0; 0).

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 2$ дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35+2b_3 \ge 0; \\ 45-\Delta b_3 \ge 0; \\ 30+0\Delta b_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \ge -17{,}5; \\ \Delta b_3 \le 45; \end{cases}$$

$$-17{,}5 \le \Delta b_3 \le 45,$$

$$62{,}5 \le b_3 \le 125.$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум. од. або зменшиться на 17,5 ум. од., то двоїста оцінка $y_3 = 2$ цього ресурсу залишиться оптимальною. Згідно із цим можливий дохід підприємства та оптимальний план виробництва продукції перебуватимуть у межах

$250 \le \max Z \le 375$

(0; 0; 0; 62,5; 0; 30; 0) $\le X^* \le$ (0; 0; 125; 0; 0; 30; 0).

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

4. За умовою задачі обсяги всіх трьох ресурсів змінюються відповідно $\Delta b_1 = +10, \Delta b_2 = -10, \Delta b_3 = +20$. Для визначення компонентів нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу: $X^* = D^{-1}\cdot \vec{B}.$

З останньої симплекс-таблиці можна записати обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2+\Delta b_2 \\ b_3+\Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250+10 \\ 280-10 \\ 80+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів

$$X^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix},$$

тобто X^*(0; 0; 70; 30; 0; 10; 0).

Усі $x_j \ge 0$, і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається Y^*=(1/2; 0; 2). Загальний максимальний дохід підприємства зміниться на

$\Delta Z_{\max} = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 10\cdot 1/2 - 10\cdot 0 + 20\cdot 2 = +45$ ум. од. і становитиме

$\max Z = 285+45 = 330$ ум. од.

5. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2\cdot 1/2+1\cdot 0+3\cdot 2=7>2 & \text{(продукція А нерентабельна);} \\ 5\cdot 1/2+6\cdot 0+2\cdot 2=13/2>4 & \text{(продукція В нерентабельна);} \\ 2\cdot 1/2+2\cdot 0+1\cdot 2=3=3 & \text{(продукція С рентабельна);} \\ 4\cdot 1/2+4\cdot 0+1\cdot 2=4=4 & \text{(продукція Д рентабельна).} \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оцінковому рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках «x_1» – «x_4». їх оптимальні значення $y_4=5; y_5=5/2; y_6=0; y_7=0$. Тому продукція А і В нерентабельна, а продукція С і Д — рентабельна.

6. Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися чи зменшуватися). І тому завжди цікаво знати, у межах яких змін ціни продукції кожного виду оптимальний план її виробництва залишається таким: $X^*=(0;0;35;45)$.

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємось тим, що при цьому симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів оцінкового рядка. Нові оцінки $\left(Z_j - C_j\right)$ мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта C_1 позначимо ΔC_1. Оскільки x_1— небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна оцінка $Z_1 - C_1$.

$$\left(Z_1 - C_1\right) = 4\cdot(-2)+0\cdot 1+3\cdot 3/2-\left(2+\Delta C_1\right)=5-\Delta C_1.$$

За умови $Z_1 - C_1 \geq 0$ дістанемо нерівність $5-\Delta C_1 \geq 0$, тобто $\Delta C_1 \leq 5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції А за інших однакових умов зросте не більш як на 5 ум. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві все одно залишиться $X^*=(0; 0; 35; 45)$. Лише максимальний дохід зміниться на max $\Delta Z = \Delta C_1 x_1$.

Аналогічно розраховується інтервал зміни коефіцієнта ΔC_2:

$$\left(Z_2 - C_2\right) = 5/2 - \Delta C_2 \geq 0; \qquad \Delta C_2 \leq 5/2$$

Зі зростанням ціни одиниці продукції В на 5/2 ум. од. за інших однакових умов оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а $\max \Delta Z = \Delta C_2 X_2$.

Дещо складніше розраховується інтервал зміни коефіцієнтів для базисних змінних. У цьому разі зміни відбуваються також у стовпчику «$C_{баз}$» симплекс-таблиці, а це, у свою чергу, стосується всіх ненульових оцінок $\left(Z_j - C_j\right)$. Так, для базисної змінної x_3 зміна коефіцієнта на ΔC_3 приведе до таких оцінок:

$$\left(Z_1 - C_1\right) = 4\cdot(-2)+0\cdot(-1)+\left(3+\Delta C_3\right)\cdot 5-2=5+5\Delta C_3;$$

$$\left(Z_2 - C_2\right) = 4\cdot 1/2+0\cdot 1+\left(3+\Delta C_3\right)\cdot 3/2-4=5/2+3/2\Delta C_3;$$

$$\left(Z_5 - C_5\right) = 4\cdot 1/2+0\cdot(-1)-1/2\cdot\left(3+\Delta C_3\right)-0=1/2-1/2\Delta C_3;$$

$$\left(Z_7 - C_7\right) = 4\cdot(-1)+0\cdot 0+2\cdot\left(3+\Delta C_3\right)-0=2+2\Delta C_3.$$

Нові значення оцінок мають задовольняти умову оптимальності, тобто $Z_j - C_j \geq 0$. Тому інтервал для ΔC_3 визначається з такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 5+5\Delta C_3 \geq 0, \\ 5/2+3/2\Delta C_3 \geq 0, \\ 1/2-1/2\Delta C_3 \geq 0, \\ 2+2\Delta C_3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta C_3 \geq -1, \\ \Delta C_3 \geq -5/3, \\ \Delta C_3 \leq 1, \\ \Delta C_3 \geq -1; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_3 \leq 1,$$

$$2 \leq C_3 \leq 4.$$

Отже, ціна одиниці продукції С може збільшуватися та зменшуватися на 1 ум. од. і перебувати в межах від 2 до 4 ум. од., але оптимальним планом виробництва продукції залишається X^*= (0;0;35;45).

Для базисної невідомої x_4 інтервал зміни коефіцієнта C_4 розраховується аналогічно:

$$\begin{cases} 5-2\Delta C_4 \geq 0, \\ 5/2+1/2\Delta C_4 \geq 0, \\ 1/2+1/2\Delta C_4 \geq 0, \\ 2-\Delta C_4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta C_4 \leq 5/2, \\ \Delta C_4 \geq -5, \\ \Delta C_4 \geq 1, \\ \Delta C_4 \leq 2; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_4 \leq 2,$$

$$3 \leq C_4 \leq 6.$$

Якщо за інших однакових умов ціна одиниці продукції Д зменшиться до 3 ум. од. або збільшиться до 6 ум. од., то оптимальний план виробництва продукції на підприємстві не зміниться (X^*= (0; 0; 35; 45)).

Якщо коливання ціни продукції виходять за визначені межі, то план X^*= (0; 0; 35; 45) вже не буде оптимальним і його необхідно буде поліпшити згідно з алгоритмом симплекс-методу, тобто продовжити розв'язування задачі.

Виконаний у цій задачі аналіз лінійної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і дає змогу дослідити можливі зміни цього оптимального плану в результаті коректування умов прямої задачі.

6.3. Аналіз цільової функції і коефіцієнтів технологічної матриці. Приклади:

Фірма виготовляє продукцію трьох видів А, В і С. Для цього потрібний певний час обробки кожної продукції на різних групах обладнання (1, 2, 3) (див. таблицю).

Ресурс	Час обробки продукції, год, за видами		
	А	В	С
1	1	2	4
2	2	4	2
3	1	1	2

Можливий час роботи обладнання кожного типу становить відповідно 360, 520 та 220 год. на місяць. Ціна одиниці продукції А дорівнює 90 дол., продукції В — 110дол., а продукції С — 150 дол. Визначити, яку продукцію і в якій кількості слід виготовляти, щоб фірма отримувала найбільший дохід.

Розв'язування задачі симплекс-методом дає таку останню симплексну таблицю:

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2
$Z_j - C_j \ge 0$		20 600	0	0	10	0	10	70

Керівництво фірми цікавить, чи зміниться оптимальний план виробництва продукції і якщо зміниться, то яким буде новий оптимальний план у кожній з наведених далі ситуацій.

1. Фірма може збільшити час роботи обладнання груп 2 та 3 відповідно на 100 та 80 год. за місяць, орендуючи для цього додаткове обладнання, яке коштуватиме 5000 дол. Чи вигідно це? Якщо вигідно, то яким має бути новий план виробництва продукції?

2. Фінансовий відділ фірми вважає, що загострення конкуренції на ринку збуту може призвести до зниження ціни на продукцію В на 25 дол. Як це позначиться на оптимальному плані виробництва продукції фірми?

3. Відділ досліджень і розробок фірми пропонує виготовляти дешевшу модифікацію продукції С. Для виробництва одиниці цієї нової продукції потрібний час роботи обладнання груп 1, 2 та 3 становить відповідно 4, 3 та 1 год. Орієнтовна ціна одиниці нової продукції дорівнює 120 дол. Керівництво фірми цікавить, чи буде за таких умов виробництво нової продукції вигідним.

4. Споживач продукції А за певних обставин порушує попере дню домовленість і відмовляється прийняти більш як 100 од. продукції А. Визначити, як фірма має змінити план виробництва своєї продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Розв'язування. Із наведеної в умові задачі симплекс-таблиці маємо: $X^* =$ (180; 40; 0; 100; 0; 0), $\max Z = 20\ 600, Y^* =$ (0; 10; 70). Оптимальним планом виробництва продукції на фірмі є випуск 180 од. продукції А та 40 од. продукції В. Виготовлення продукції виду С не передбачається. При цьому фірма отримає максимальний дохід у розмірі 20 600 дол. на місяць.

1. Збільшення часу роботи обладнання дасть змогу збільшити випуск продукції, тобто змінить оптимальний план і дохід фірми. Оскільки $\Delta b_1 = 0$, $\Delta b_2 = 100$, $\Delta b_3 = 80$, новий оптимальний план визначається так:

$$X^* = D^{-1} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 360+0 \\ 520+100 \\ 220+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 290 \end{pmatrix}.$$

Новий план допустимий (всі $x_j \ge 0$), і тому оптимальні двоїсті оцінки зберігають свої значення: $Y^* =$ (0; 10; 70). Приріст доходу фірми в результаті зміни оптимального плану виробництва продукції розраховується так:

$$\max \Delta Z = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 100 \cdot 10 + 80 \cdot 70 = 6600 \text{ дол.}$$

Оскільки дохід фірми від додаткового використання обладнання груп 2 і 3 перевищує витрати на оренду цього обладнання (6600 > 5000), то природно, що така тактика фірми буде вигідною. При цьому оптимальним планом виробництва стане випуск 290 од. продукції А і 10 од. продукції В. Невикористаний час роботи обладнання групи 1 зменшиться до 50 год. на місяць, а дохід фірми за відрахуванням витрат на оренду обладнання дорівнюватиме 20 600 + (6600 - 5000) = 22 200 дол. на місяць.

2. Зміна ціни одиниці продукції В на ΔC_2 (25 дол.) стосується всього оцінкового рядка симплекс-таблиці, оскільки x_2 є базисною змінною. Нові $Z_5 - C_5$ матимуть такі значення:

$Z_3 - C_3 = 10 - \Delta C_2 = 10 + 25 = 35;$

$Z_5 - C_5 = 10 + 1/2\Delta C_2 = 10 - 12{,}5 = -2{,}5;$

$Z_6 - C_6 = 70 - \Delta C_2 = 70 + 25 = 95.$

Коли б усі здобуті оцінки задовольняли умову $Z_5 - C_5 \geq 0$, то це означало б, що попри зниження ціни план виробництва продукції на фірмі не зміниться. Але оцінка $Z_5 - C_5$ не задовольняє умову оптимальності задачі на максимум, і тому можна зробити такий висновок. Істотне зниження ціни одиниці продукції В порушує визначений раніше оптимальний план виробництва продукції, оскільки випуск продукції виду В стає для фірми невигідним, нерентабельним.

Новий оптимальний план визначається у процесі подальшого розв'язування задачі симплекс-методом:

Базис	$C_{баз}$	План	90	85	150	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	100	0	0	3	1	−1/2	0	–
$\leftarrow x_2$	85	40	0	1	−1	0	1/2	−1	80
x_1	90	180	1	0	3	0	−1/2	2	–
$Z_j - C_j \geq 0$		19 600	0	0	35	0	$\uparrow$ −2,5	95	
x_4	0	140	0	1	2	1	0	−1	
x_5	0	80	0	2	−2	0	1	−2	
x_1	90	220	1	1	2	0	0	1	
$Z_j - C_j \geq 0$		19 800	0	5	30	0	0	90	

Отже, у розглянутій ситуації зниження ціни одиниці продукції виду В на 25 дол. різко змінить структуру та обсяги виробництва продукції на фірмі. Вигідним стане випуск лише продукції А у кількості 220 од.: при цьому час роботи обладнання груп 1 і 2 використовуватиметься повністю. Усе це призведе до зменшення доходу фірми до 19 800 дол. на місяць.

3. Обсяг виробництва нової продукції в оптимальному плані позначимо x_7. Тоді математична модель прямої задачі матиме такий вигляд:

$$Z = 90x_1 + 10x_2 + 150x_3 + 120x_7 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_7 \leq 360, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_7 \leq 520, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 \leq 220, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}.$$

У математичній моделі двоїстої задачі змінній x_7 відповідатиме таке обмеження: $4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 120$. Оцінимо рентабельність нової продукції за допомогою двоїстих оцінок: $4 \cdot 0 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 70 = 100$, що є меншим за 120 дол. Загальна вартість усіх ресурсів, що витрачаються на випуск одиниці нової продукції, не перевищує орієнтовної ціни цієї продукції, і тому її виробництво для фірми є вигідним, рентабельним. Завдяки цьому визначений раніше оптимальний план виробництва продукції можна поліпшити за рахунок уведення в нього x_7.

Для цього за допомогою оберненої матриці необхідно визначити елементи стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці:

$$D^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{17}\\ \alpha_{27}\\ \alpha_{37}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & -1\\ 0 & -1/2 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

Результати однієї ітерації симплекс-методу, що приводить до нового оптимального плану задачі, наведено далі.

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0	120	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$\leftarrow x_4$	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	5/2	40
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	1/2	80
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2		360
$Z_j - C_j \ge 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	–20	
x_7	120	40	0	0	6/5	2/5	–1/5	0	1	
x_2	110	20	0	1	–8/5	–1/5	3/5	–1	0	
x_1	90	160	1	0	12/5	–1/5	–2/5	2	0	
$Z_j - C_j \ge 0$		21 400	0	0	34	8	6	70	0	

Як бачимо з таблиці, $X^* = (160;\ 20;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 40)$, $\max Z = 21\ 400$. Керівництво фірми має підтримати пропозицію відділу досліджень та розробок і налагодити виробництво нової продукції, яка є рентабельною, виготовляючи її в кількості 40 од.; відповідно продукції А — 160 од. і продукції В — 20 од. Такий новий оптимальний план виробництва продукції збільшить дохід фірми до 21 400 дол. на місяць.

4. Четверта запропонована ситуація математично пов'язана з уведенням в умову задачі додаткового обмеження, що може при вести до таких наслідків:

а) нове обмеження для визначеного оптимального плану виконується і тоді воно є надлишковим, зайвим і його включення до моделі не змінює визначеного плану;

б) нове обмеження для визначеного оптимального плану не виконується, і тоді за допомогою двоїстого симплекс-методу не обхідно знайти новий оптимальний план.

За умовою задач додатковим є обмеження $x_1 \le 100$. Але воно суперечить оптимальній кількості продукції А, яка дорівнює 180 од. Тому необхідно приєднати це додаткове обмеження до симплекс-таблиці та продовжити розв'язування задачі, але вже за допомогою двоїстого симплекс-методу. Для цього спочатку зведемо додаткове обмеження до канонічного вигляду: $x_1 + x_7 = 100$.

Оскільки в оптимальному плані змінна x_1 є базисною, її необхідно записати через небазисні невідомі. Це робиться так. У симплекс-таблиці, яку наведено в умові задачі, рядок змінної “x_1” подається рівнянням

$$1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + 0\cdot x_4 - 1/2\cdot x_5 + 2\cdot x_6 = 180.$$

З цього рівняння визначимо x_1:

$$x_1 = 180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6.$$

Підставивши цей вираз в додаткове обмеження, отримаємо

$$180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = 100$$

або

$$-3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = -80.$$

У такому вигляді додаткове обмеження дописується в симплекс-таблицю. Застосування двоїстого симплекс-методу приведе до нового оптимального плану задачі:

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	0
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	0
$\leftarrow x_7$	0	–80	0	0	– 3	0	1/2	–2	1
$Z_j - C_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	0
x_4	0	20	0	0	0	1	0	–2	1
x_2	110	200/3	0	1	0	0	1/3	–1/3	–1/3
x_1	90	100	1	0	0	0	0	0	1
x_3	150	80/3	0	0	1	0	–1/6	2/3	–1/3
$Z_j - C_j \geq 0$		$\frac{61\ 000}{3}$	0	0	0	0	35/3	190/3	10/3

З останньої таблиці маємо $X^* = (100;\ 200/3;\ 80/3;\ 20;\ 0;0)$, $\max Z = 61\ 000/3 \approx 20\ 000$.

Проаналізуємо цей план. Реалізація запропонованої в умові задачі ситуації змінює структуру та кількісний вираз оптимального плану. Тепер з урахуванням вимог споживача фірма виготовлятиме 100 од. продукції А, 200/3 од. продукції В і 80/3 од. продукції С. У результаті такого плану випуску продукції дохід фірми зменшиться до 20 333 дол. на місяць.

ТЕМА 7
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА. ПОСТАНОВКА, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ.

7.1. Економічна і математична постановка ТЗ. Умови існування розв'язку ТЗ.

Транспортна задача — це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min; \qquad (7.1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (7.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (7.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \qquad (7.4)$$

де x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача; c_{ij} — вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача; a_i — запаси продукції i-го постачальника; b_j — попит на продукцію j-го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (7.5)$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою,*** або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою,*** або ***відкритою***.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (7.2)—(7.4) транспортної задачі, який позначають матрицею $x = \left(x_{ij}\right) \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \left(\vec{x}^{\,*}_{ij}\right) \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (7.1) набуває найменшого значення.

! Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі). Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

5.2. Методи побудови опорного плану. Впровадження. Двоїстість.

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є ***метод потенціалів***.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.
1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.
3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.
5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (5.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} , або фіктивного споживача B_{n+1} . вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі — стовпчиками.

Побудову першого плану за **методом північно-західного кута** починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці (x_{11}), в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Після побудови першого опорного плану одним із розгляну тих методів у таблиці має бути заповнено $(m + n - 1)$ клітинок, де m — кількість постачальників; n — кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***не виродженим***. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $(m + n - 1)$, то початковий план побудовано неправильно і він є не опорним. ***Ознакою опорності*** плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. ***Циклом*** у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $(m + n - 1)$, то опорний план називають ***виродженим***. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно постачальників та споживачів.

! Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ існують числа u_i та v_j, для яких виконується умова

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad x_{ij} > 0,$$
$$u_i + v_j \le c_{ij}, \qquad x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1,m}$, та $j = \overline{1,n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

4. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова невиконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\left\{\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - c_{ij}\right\}$. Для вибраної порожньої клітинки будують цикл перерахування та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим по черзі — знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел x_{ij}, що стоять у клітинках зі знаком «–». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+».

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

Розглянемо застосування методу потенціалів для розв'язування транспортних задач, наведених далі.

7.3. ТЗ за критерієм часу. Двоетапна ТЗ. Розв'язання по сітці.

Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i–ї фабрики до j-го замовника $\left(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}\right)$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} = 290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає ось у чому: уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$Z = 4 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 2 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{22} + x_{23} + 2 \cdot x_{24} + 2 \cdot x_{31} +$$
$$+ x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 2 \cdot x_{34} \to \min$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} +$$
$$+ x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,3}; \ j = \overline{1,4}.$$

Розв'язування. Розв'язування задачі подамо в таблицях, які назвемо транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості.

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 110	4	2 2 +	5 40–	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 –60	2 0+	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум. од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а (m + n – 1) = 3 + 4 – 1= 6. Для подальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку A_2B_4. Тепер перший план транспортної задачі є не виродженим, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад,

$v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5,\ u_2 = 2,\ u_3 = 2,\ v_1 = -1,\ v_2 = -1,\ v_3 = -1.$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4;$

$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2;$

$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5;$

$A_2B_2 : u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3;$

$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2;$

$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4.$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «-» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку A_1B_3 переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщуються в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщуються в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщуються в клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку $\min\{60;40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка A_1B_3 — 40 од. продукції, $A_2B_3 - (60-40) = 20$ од., $A_2B_4 - (0+40) = 40$ од. Клітинка A_1B_4, звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати ($n + m - 1$).

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 –110	4	2 40+	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 –20	2 40+	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 1 +	1 40	4	2 40–	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому $Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану транспортної задачі і дістанемо таку таблицю:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$A_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$A_3 = 80$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Тому $Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720$ ум. од.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість виробництва та перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

ТЕМА 8.
ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ.

8.1. Область застосування ЦЗЛП.

У попередніх розділах було розглянуто задачі лінійного програмування та методи їх розв'язування. Ці методи найбільш розроблені, легко реалізуються на ПК, а тому набули широкого застосування в багатьох галузях науки, техніки та економіки. Проте лінійні моделі відбивають лише певну й вельми обмежену сукупність властивостей навколишнього світу. Адже, скажімо, соціально-економічні процеси не є лінійними. Галузі, об'єднання та окремі підприємства народного господарства функціонують і розвиваються за умов невизначено сті, а тому описуються нелінійними, стохастичними, динамічними процесами. Отже, для управління народним господарством, його галузями й тими чи іншими об'єктами господарювання потрібні нелінійні економіко-математичні моделі та методи. А вони ще недостатньо розроблені і до того ж не так легко, як лінійні, піддаються реалізації на ПК. Щоправда, нелінійні, стохастичні задачі нерідко вдається звести до лінійних, а далі — скористатися відповідними добре розробленими методами розв'язування. Однак такий підхід щоразу потребує певних застережень.

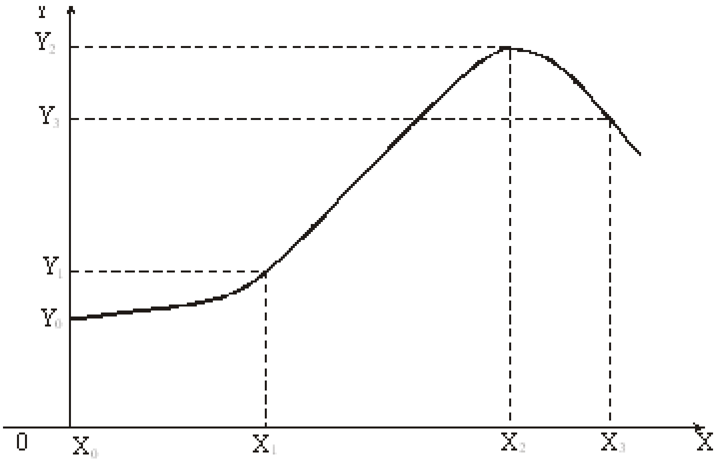


Рис.6.1.

Розглянемо приклад. Урожайність сільськогосподарських культур залежить, як відомо, від багатьох чинників, серед яких насамперед слід назвати заходи з підживлення ґрунту. Природна родючість земельних угідь забезпечує лише певний рівень продуктивності рослин. Щоб підвищити їх урожайність, використовують органічні та мінеральні добрива. Залежність урожайності цукрових буряків від кількості внесених мінеральних добрив ілюструє рис. 6.1. Із цього рисунка бачимо, що за рахунок природної родючості ґрунту та внесення органічних добрив досягається врожайність цукрових буряків Y_0. Зі зростанням кількості внесених мінеральних добрив урожайність цієї культури підвищується. Наприклад, якщо ця кількість збільшується від X_1 до X_2 (реально це 100—280 кг діючої речовини на гектар), то врожайність цукрових буряків зростає майже лінійно, приблизно від 150 до 450 ц/га. Проте з подальшим збільшенням кількості внесених мінеральних добрив $(X_3 > X_2)$ урожайність знижується $(Y_3 < Y_2)$, оскільки рослини не забезпечуються іншими необхідними елементами, наприклад водою.

Отже, якщо в розробленій економіко-математичній моделі вирощування цукрових буряків взяти обмеження за рівнем їх урожайності (скажімо, 150—450 ц/га), то з відповідними застереженнями можна припустити, що існує лінійна залежність між урожайністю цукрового буряку та обсягами внесених і органічних добрив.

Зауважимо, що розвиток комп'ютерної техніки і методів математичного моделювання створює передумови для використання нелінійних методів, а це може значною мірою підвищити якість розроблюваних планів, надійність та ефективність прийнятих рішень. У цьому розділі стисло розглянемо деякі методи математичного програмування, що вкрай потрібні економістові XXI століття. Зауважимо, що фахівець, який розробив економіко-математичну модель, але через її складність не реалізував на ПК, істотно поповнив свої знання про досліджуваний процес, а отже, і прийняті ним (свідомо чи несвідомо) рішення є більшобґрунто ваними й економічно ефективними, ніж ті, які могли б постати без вивчення зазначеної моделі.

8.2. Математична постановка ЦЗЛП.Геометрична інтерпретація розв'язків на площині.

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень, наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських підприємствах тощо, тобто коли така вимога випливає з особливостей технології виробництва. До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень — 0 або 1 (бульові, або бінарні, змінні).

Розглянемо приклад. Інвестиційна компанія може вкласти кошти у три різні підприємства. Ефективність кожного проекту оцінено згідно з тим, що його реалізація можлива за чотирьох умов. Дані про ці проекти наведено в таблиці:

Проект	Змінна	Умови реалізації проектів			
		y_1	y_2	y_3	y_4
1	x_1	8	15	21	4
2	x_2	10	16	18	6
3	x_3	12	14	17	7
Імовірності оцінки реалізації проектів		0,2	0,1	0,4	0,3

Кожна змінна x_1, x_2, x_3 може набувати лише двох значень -1 або 0, тобто інвестиційна компанія вкладає або не вкладає кошти у відповідне підприємство.

До цілочислового програмування відносять задачі про призначення, найкоротший шлях і т. ін. У реальних задачах часто цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька змінних. Такі задачі називають ***частково цілочисловими***.

Загальна задача цілочислового програмування записується так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \qquad (8.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad \left(i = \overline{1, m}\right), \qquad (8.2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1, n}\right), \qquad (8.3)$$

$$x_j - \text{цілі} \qquad \left(j = \overline{1, n}\right), \qquad (8.4)$$

Для знаходження оптимального розв'язку цілочислових задач застосовують спеціальні методи. Найпростішим методом розв'язування цілочислової задачі є знаходження її оптимального розв'язку як задачі, що має лише неперервні змінні, з подальшим округленням останніх. Такий підхід часто є виправданим. Нехай, наприклад, у результаті розв'язування задачі про поєднання галузей у сільськогосподарському підприємстві дістали, що воно по требує 1235,6 корів. Округливши це значення корів до 1236, не припустимося значної похибки. Проте в деяких випадках такі спрощення призводять до істотних неточностей. Якщо, скажімо, у разі розв'язування як неперервної задачі про сушильний цех, що може бути обладнаний агрегатами трьох типів, дістали $x_1 = 2,6, x_2 = 4,3$ і $x_3 = 0,7$, будь-які округлення недопустимі.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують дві основні групи методів:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук ціло числового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими ***послабленими обмеженнями***, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод віток і меж.

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідженням кожної окремої частини многокутника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

8.3. Метод Гоморі

Нехай маємо задачу цілочислового програмування (8.1)— (8.4). Для її розв'язування можна скористатися ітеративним методом Гоморі. Суть його полягає ось у чому:

1. Знаходять розв'язок послабленої, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних — (8.1)—(8.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (8.1)—(8.4).

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{a_{ij}\right\}x_j \geq \left\{b_j\right\},$$

де символ {} позначає дробову частину числа.

Для визначення дробової частини будь-якого числа від цього числа віднімають цілу його частину — найбільше ціле число, що не перевищує даного. Цілу частину числа позначають символом []. Наприклад,

[1,3] = 1; [–1,3] = –2; {1,3} = 1,3 – 1 = 0,3; {–1,3} = –1,3 – (–2) =2 – 1,3 = 0,7.

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Здобуту розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Досвід показує, що процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний. Істотними є також похибки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

Задача 8.1. Сільськогосподарське підприємство задумало створити сушильний цех на виробничій площі 190м^2, маючи для цього 100 тис.грн. і можливість придбати устаткування двох типів А і В. Техніко-економічну інформацію про ці два види устаткування подано в таблиці:

Техніко-економічний показник	Устаткування		Ресурс
	А	В	
Вартість, тис. грн.	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн./рік	350	150	–

Розв'язування. Нехай x_1 і x_2 — кількість комплектів устатку вання відповідно типу *А* і *В*.

Запишемо економіко-математичну модель:

$Z = 350x_1 + 150x_2 \to \max,$

$25x_1 + 10x_2 \le 100,$

$40x_1 + 20x_2 \le 190,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$

x_1 і x_2 – цілі.

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Остання симплексна таблиця набере вигляду:

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
$Z_j - C_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження виду

$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \ge \{b_j\}:$

$\{1\} x_1 + \{0\} x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\} x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\} x_4 \ge \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$

Оскільки $\left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$, $\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $\left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то додаткове обмеження набирає вигляду

$\frac{3}{5} x_3 + \frac{3}{4} x_4 \ge \frac{1}{2}.$

Зведемо його до канонічної форми та введемо штучну змінну:

$\frac{3}{5} x_3 + \frac{3}{4} x_4 - x_5 + x_6 \ge \frac{1}{2}.$

Приєднавши здобуте обмеження до останньої симплексної таблиці з умовно-оптимальним планом, дістанемо:

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0	0	–*M*
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	$-M$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	-1	1
$Z_j - C_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв'язуючи наведену задачу, остаточно знаходимо цілочисловий оптимальний план: $X^*\left(x_1=2;\ x_2=5\right),\quad Z_{\max}=1450$.

8.4. Метод «віток і меж»

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування є метод «віток і меж». Спочатку, як і в разі методу Гоморі, розв'язується послаблена (відкиданням умови цілочисловості) задача.

З цією метою застосовується симплексний метод.

Нехай потрібно знайти x_j — цілочислову змінну, значення якої x_j^* в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Тоді можна стверджувати, що в інтервалі $\left(\left[x_j^*\right],\ \left[x_j^*\right]+1\right)$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо $x_j^*=2,3$, дістаємо інтервал (2,3), де, очевидно, немає x_j яке набуває цілого значення.

Значенню $x_j^*=-2,3$ відповідає інтервал (–3; –2), де також не існує цілого значення x_j. Отже, допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей

$x_j \le \left[x_j^*\right]$ або $x_j \ge \left[x_j^*\right]+1$.

Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов'язані між собою задачі. Тобто початкову задачу цілочислового програмування (6.1)—(6.4) розіб'ємо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \to \max\left(\min\right) \tag{8.5}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \left\{\begin{matrix}\le\\=\\\ge\end{matrix}\right\} b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{8.6}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \tag{8.7}$$

$$x_j \ -\ \text{цілі}, \tag{8.8}$$

$$x_j \le \left[x_j^*\right] \tag{8.9}$$

$$\max\left(\min\right)Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{8.10}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \left\{\begin{matrix}\le\\=\\\ge\end{matrix}\right\} b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{8.11}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \tag{8.12}$$

$$x_j \ -\ \text{цілі}, \quad \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{8.13}$$

$$x_j \le \left[x_j^*\right] + 1 \qquad (8.14)$$

де x_j^* —компонент розв'язку задачі (8.1)—(8.4).

Далі симплекс-методом розв'язуємо послаблені задачі (8.6)— (8.9) і (8.10)—(8.14), тобто з відкиданням обмежень (8.8) і (8.13). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (8.1)—(8.4). Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беремо задачу з найбільшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий план — оптимальний.

Розв'язування цілочислових задач методом «віток і меж» можна значно прискорити, приєднавши обмеження виду (8.9) і (8.14) до останньої симплекс-таблиці не початкової (8.1)—(8.4), а відповідних задач.

Розв'яжемо методом «віток і меж» задачу (8.1) – (8.4).

Відкинувши умову цілочисловості, дістанемо розв'язок $x_1 = 1,\ \ x_2 = 7\frac{1}{2}$. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задовольняти одну з нерівностей $x_2 \le \left[7\frac{1}{2}\right] = 7$ або $x_2 \ge \left[7\frac{1}{2}\right] + 1 = 8$. Далі приєднуємо до задачі кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочислово сті, і розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі. Для першої (з обмеженням $x_2 \le 7$) оптимальним буде розв'язок $x_1^1 = 1,2,\qquad x_2^1 = 7,\ Z_{\max}^1 = 1470$, а для другої (з обмеженням $x_2 \ge 8$) — розв'язок $x_1^2 = 0,75,\qquad x_2^2 = 8,\ Z_{\max}^2 = 1462,5$. Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, узявши для наступного розгалуження першу задачу, оптимальний план якої дає більше значення функціоналу. Далі розв'язуємо задачу, приєднуючи до неї обмеження $x_1 \le 1$ і $x_1 \ge 2$, звідки й знаходимо оптимальний план $X^*\left(x_1 = 2;\ x_2 = 5\right),\ Z_{\max} = 1450$, що збігається з розв'язком, здобутим за методом Гоморі.

8.5. Приклади цілочислових економічних задач

Задача 8.2. Задача лінійного розкрою. У цеху розрізують прути завдовжки 6 м на заготівки 1,4; 2 і 2,5 м. Усього в цеху мають 200 прутів. Потрібно дістати не менше як 40, 60 і 50 заготівок завдовжки відповідно 1,4; 2 і 2,5 м.

Побудувати загальну і числову модель лінійного розкрою. За критерій оптимізації є сенс узяти мінімум відходів.

Розв'язування. Нехай і $i\left(i \in I\right)$ — вид заготівки. Кожний прут можна розрізати різними $j\left(j \in J\right)$ способами. Скористаємося такими позначеннями:

a_{ij} — вихід заготовок *і*-го виду в разі розрізування прута 7-м способом;

c_j — відходи в разі розрізування прута *і*-м способом;

A — кількість наявних прутів;

B_i, D_i — відповідно нижня і верхня межі потреби в *і*-й заготівці;

x_j — кількість прутів, які розрізані за *j*-м варіантом.

Запишемо загальну економіко-математичну модель лінійного розкрою.

Критерій оптимальності:

$$\min Z = \sum_{j \in J}^{n} c_j x_j$$

за умов

$$B_j \le \sum_{j\in J}^{n} a_{ij}x_j \le D_i \qquad (i\in I),$$

$$\sum_{j\in J} x_j \le A,$$

$$x_j \ge 0 \quad (j\in J),$$

$$x_j - \text{цілі } (j\in J).$$

Побудуємо числову економіко-математичну модель розрізування прутів, розглянувши можливі варіанти такого розрізування:

Довжина заготівки, м	Варіанти розрізування прутів						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1,4	4	–	–	1	1	2	2
2	–	3	–	1	2	1	–
2,5	–	–	2	1	–	1	1
Довжина відходів, м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7

Бажано, щоб у множину ввійшли всі можливі варіанти, навіть такі, які на перший погляд здаються неефективними, наприклад x_6.

Запишемо числову економіко-математичну модель розрізування прутів:

$$Z = 0,4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0,1x_4 + 0,6x_5 + 1,2x_6 + 0,7x_7 \to \min$$

за умов

а)щодо кількості заготівок завдовжки 1,4 м:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \ge 40;$$

2 м:

$$3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 60;$$

2,5 м:

$$2x_3 + x_4 + 1,2x_6 + x_7 \ge 50;$$

б) щодо кількості наявних прутів:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 200;$$

в) щодо невід’ємності змінних:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0;$$

г) щодо цілочисловості змінних:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 -$ цілі числа.

Пропонуємо розв'язати цю задачу одним із методів цілочислового програмування.

Задача 8.3. Задача комівояжера. В економічному регіоні розміщено 6 пунктів (міст). Комівояжер, який виїжджає з міста 1, має побувати в кожному місті один раз і повернутися до вихідного пункту. Знайти найкоротший маршрут, якщо відстані між містами відомі (рис. 8.1).

Записати загальну і числову економіко-математичну модель.

Розв'язування. Нехай маємо *n* пунктів, де має побувати комівояжер.

Позначимо:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо маршрут передбачає переїзд із } i \text{ - го міста до } j \text{ - го;} \\ 0 - \text{ у противному разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} — бульові (цілочислові) змінні. Цільовою функцією цієї задачі є мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

де c_{ij} — відстань між містами i та j.

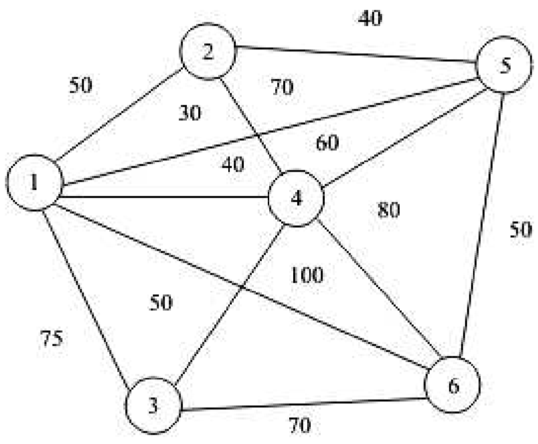


Рис. 8.1

Обмеження щодо одноразового в'їзду в кожне місто:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \left(j = \overline{1,n}; i \neq j\right).$$

Обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \left(i = \overline{1,n};\ i \neq j\right).$$

Ці обмеження не повністю описують допустимі маршрути і не виключають можливості розриву маршруту. Щоб усунути цей недолік, введемо додаткові змінні $u_i\left(u_j\right)$ $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right)$, які набувають невід'ємних цілих значень. Запишемо обмеження, які виключають можливість існування підмаршрутів:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right)$$

де $u_i\left(u_j\right)$ — порядковий номер міста за маршрутом прямування комівояжера.

Запишемо числову економіко-математичну модель комівояжера за розглядуваних умов.

Критерій оптимальності:

$$\min\left(50x_{12} + 75x_{13} + 40x_{14} + 70x_{15} + 100x_{16} + 30x_{23} + 40x_{25} + 50x_{34} + 70x_{36} + 60x_{45} + 80x_{46} + 50x_{56}\right);$$

а) обмеження щодо одноразового в’їзду в кожне місто:

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1,$$

$$x_{12} + x_{42} + x_{52} = 1,$$

$$x_{13} + x_{43} + x_{63} = 1,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} + x_{64} = 1,$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{45} + x_{65} = 1,$$

$$x_{16} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1;$$

б) обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}=1,$
$x_{21}+x_{24}+x_{25}=1,$
$x_{31}+x_{34}+x_{36}=1,$
$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{45}+x_{46}=1,$
$x_{51}+x_{52}+x_{54}+x_{56}=1,$
$x_{61}+x_{63}+x_{64}+x_{65}=1;$

в) обмеження щодо виключення підмаршрутів:

$$
\begin{aligned}
&u_2-u_4+6x_{24}\le 5,\\
&u_2-u_5+6x_{25}\le 5,\\
&u_3-u_4+6x_{34}\le 5,\\
&u_3-u_6+6x_{36}\le 5,\\
&u_4-u_2+6x_{42}\le 5,\\
&u_4-u_3+6x_{43}\le 5,\\
&u_4-u_5+6x_{45}\le 5,\\
&u_4-u_6+6x_{46}\le 5,\\
&u_5-u_2+6x_{52}\le 5,\\
&u_5-u_4+6x_{54}\le 5,\\
&u_5-u_6+6x_{56}\le 5,\\
&u_6-u_3+6x_{63}\le 5,\\
&u_6-u_4+6x_{64}\le 5,\\
&u_6-u_5+6x_{65}\le 5,
\end{aligned}
$$

$$x_{ij}=\begin{cases}0\\1\end{cases}\left(i=\overline{1,6};\ j=\overline{1,6}\right),$$

$u_i\left(u_j\right)-$ цілі числа $\left(i=\overline{2,6};\ j=\overline{2,6};\ i\ne j\right)$.

Такі задачі розв'язуються спеціальними методами [1; 10].

Зауважимо, що аналогічні задачі нерідко постають на практиці, наприклад, у дрібному бізнесі.

Фірма у місті має 25 кіосків, які торгують безалкогольними напоями. Щоденно з бази автомобілем розвозять до них товар. Як оптимально організувати розвезення відповідної кількості товару?

ТЕМА 9.
ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНРОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ.

9.1. Економічна сутність і постановка ДЛП.

Розв'язуючи економічні задачі, часто за критерій оптимальності беруть показники рентабельності, продуктивності праці тощо, які математично подаються дробово-лінійними функціями. Загальну економіко-математичну модель у цьому разі записують так:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \to \max\left(\min\right)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{1,n}\right),$$

$$x_j \geq 0\left(j = \overline{1,n}\right).$$

Припускають, що знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

Алгоритм розв'язування задачі дробово-лінійного програмування передбачає зведення її до задачі лінійного програмування. Щоб виконати таке зведення, позначимо

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0}$$

зробимо заміну змінних

$$y_j = y_0 x_j \left(j = \overline{1,n}\right).$$

і запишемо економіко-математичну модель:

$$\max\left(\min\right) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + x_0 y_0$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0\left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0$$

$$y_j \geq 0\left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$y_0 > 0.$$

Дістали задачу лінійного програмування, яку можна розв'язати симплексним методом. Нехай оптимальний план

$$y_{0j} = \left\{y_{01}, \quad y_{02}, \quad \ldots, \quad y_{0n}, \quad y_0\right\}$$

9.2. Основні методи розвязування здач ДЛП і аналіз оптимальних планів

Задача 9.1.. Сільськогосподарське акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю, яке розміщене в Лісостепу України, має намір оптимізувати структуру виробництва. За критерій оптимальності взято максимізацію рентабельності як відношення прибутку до собівартості. Дані про види діяльності, що їх здійснюватиме товариство, наведено в таблиці:

Показник	Діяльність з вирощуванням							Ресурс
	озимої пшениці, га	цукрових буряків, га	корів продуктивністю, кг				кормових культур, га	
			5000	4500	4000	3500		
Урожайність, т/га	4	35	–	–	–	–	6	–
Собівартість, грн./т	600	250	600	700	800	9000	200	–
Ціна, грн./т	800	300	1000	1000	1000	1000	–	–
Вихід кормів, тон кормових одиниць/га	0,8	2,0	–	–	–	–	6	–
Витрати живої праці, людино-днів/га	4	25	6	6	6	6	3	26 000
Витрати механізованої праці, людино-днів/га	2	8	3	3	3	3	2	11 000
Частка корів у стаді	–	–	0,1	0,2	0,3	0,4	–	
Потреба в кормах, т/гол	–	–	5	4,7	4,4	4,1	–	–

Акціонерне товариство має 2500 га ріллі. Записати економіко-математичну модель і знайти оптимальну структуру виробництва.

Розв'язання. Введемо позначення:

x_1 — площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — площа посіву цукрового буряка, га;

x_3 — площа посіву кормових культур, га;

x_4 — кількість корів продуктивністю 5000 кг;

x_5 — кількість корів продуктивністю 4500 кг;

x_6 — кількість корів продуктивністю 4000 кг;

x_7 — кількість корів продуктивністю 3500 кг.

Запишемо критерій оптимальності:

$$Z = \frac{800x_1 + 1750x_2 + 2000x_4 + 1350x_5 + 800x_6 + 350x_7}{2400x_1 + 8750x_2 + 1200x_3 + 3000x_4 + 3150x_5 + 3200x_6 + 3150x_7} \to \max$$

за розглянутих далі умов.

1. Обмеження за ресурсами.

1)Ріллі:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 2500.$$

2) Живої праці:

$$4x_1 + 25x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 3x_7 \le 26000.$$

3) Механізованої праці:

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 \le 11000.$$

2. Обмеження сівозміни.

1) Посівна площа кормових має бути більша або дорівнювати площі під озимою пшеницею:

$$x_3 \ge x_1$$

2) Посівна площа озимої пшениці має бути більша або дорівнювати площі під цукровими буряками:

$x_1 \geq x_2$

3. Структура корів за продуктивністю.

1) Балансове рівняння щодо корів:

$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = x_8$.

де x_8 — загальна кількість корів.

2) Частка корів продуктивністю 5000 кг:

$x_4 \leq 0,1x_8$

3) Частка корів продуктивністю 4500 кг:

$x_5 \leq 0,2x_8$

4) Частка корів продуктивністю 4000 кг:

$x_6 \leq 0,4x_8$

5) Частка корів продуктивністю 3500 кг:

$x_7 \leq 0,3x_8$

4. Забезпеченість корів кормами:

$0,8x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5,0x_4 + 4,7x_5 + 4,4x_6 + 4,1x_7 \geq 0.$

Невід'ємність змінних:

$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$

Щоб знайти розв'язок за цією моделлю, зробимо відповідну заміну й скористаємося симплексним методом:

$$2400x_1 + 8750x_2 + 1200x_3 + 3000x_4 + 3150x_5 + 3200x_6 + 3150x_7 = \frac{1}{y_0},$$

$$y_j = y_0 x_j.$$

Отже, маємо таку лінійну економіко-математичну модель:

$f = 800y_1 + 1750y_2 + 2000y_4 + 1350y_5 + 800y_6 + 350y_7 \to \max$

за розглянутих далі умов.

1.

$y_1 + y_2 + y_3 - 2500y_0 \leq 0,$

$4y_1 + 25y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 6y_5 + 6y_6 + 6y_7 - 26000 \leq 0,$

$2y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 3y_7 - 11000 \leq 0.$

2.

$y_3 - y_1 \geq 0$ або $y_1 - y_3 \geq 0,$

$y_1 - y_2 \geq 0$ або $y_2 - y_1 \geq 0.$

3.

$y_4 + y_5 + y_6 + y_7 - y_8 = 0,$

$y_4 - 0,1y_8 \leq 0,$

$y_5 - 0,2y_8 \leq 0,$

$y_6 - 0,4y_8 \leq 0,$

$y_7 - 0,3y_8 \leq 0.$

4. $0,8y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 5,0y_4 + 4,7y_5 + 4,4y_6 + 4,1y_7 \geq 0.$

5. $y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{0,8}\right).$

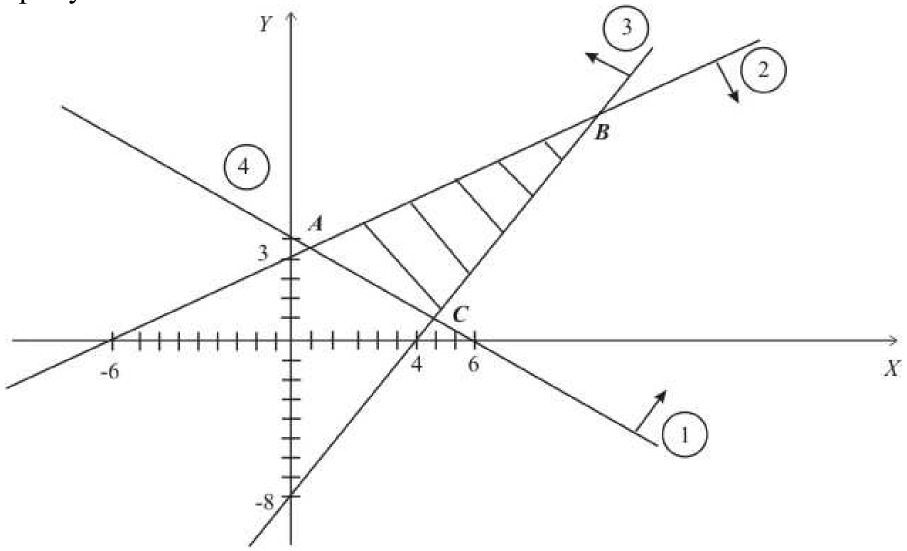
Задача 9.2. Розв'язати графічно задачу дробово-лінійного програмування:

$$Z = \frac{5x_1 - 2x_2}{2x_1 + x_2} \to \max(\min)$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 2x_2 \le 8, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо на площині область допустимих розв'язків задачі — трикутник ABC.



Цільова функція задачі являє собою пряму, яка обертатиметься навколо початку системи координат залежно від змінюваних параметрів x_1, x_2 так, що точки A і C будуть точками максимуму і мінімуму функції. Виразимо x_2 із цільової функції:

$$x_2 = x_1 \frac{5 - 2Z}{Z + 2}.$$

Кутовий коефіцієнт цільової функції

$$R_Z = \frac{5 - 2Z}{Z + 2}$$

Розглянемо похідну

$$\frac{dR_Z}{dZ} = \left(\frac{5 - 2Z}{Z + 2} \right)' = \frac{(5 + 2z)'(Z + 2) - (Z + 2)'(5 - 2Z)}{(Z + 2)^2} = -\frac{9}{(Z + 2)^2}.$$

Оскільки при будь-якому значенні Z вона від'ємна, то функція R_Z є спадною (зі зростанням Z кутовий коефіцієнт R_Z зменшується), а графік цільової функції обертатиметься навколо початку координат за годинниковою стрілкою. Отже, точка C є точкою максимуму, а точка A — мінімуму досліджуваної задачі.

Знайдемо координати цих точок.

Точка А: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 18 = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24.$$

Звідси $x_1 = \frac{6}{7}$; $x_2 = \frac{24}{7}$.

Точка A має координати (6/7; 24/7).

Точка С: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 24 = -36;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8.$$

Звідси $x_1 = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2}$; $x_2 = \frac{-8}{-8} = 1$.

Точка C має координати (9/2; 1).

Знайдемо значення цільової функції в цих точках:

$$Z_A = \frac{5 \cdot \frac{6}{7} - 2 \cdot \frac{24}{7}}{2 \cdot \frac{6}{7} + \frac{24}{7}} = -\frac{1}{2}; \qquad Z_C = \frac{5 \cdot \frac{9}{2} - 2 \cdot 1}{2 \cdot \frac{9}{2} + 1} = \frac{41}{20}.$$

Результати $\left(Z_C > Z_A\right)$ підтверджують, що оптимуми знайдено правильно: максимум досягається в точці C, а мінімум — у точці A.

Задача 9.3. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування симплексним методом:

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 12; \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 9; \\ -x_1 + 4x_2 + x_5 = 8; \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'язування. Зведемо початкову задачу до задачі лінійного програмування згідно з розглянутими раніше правилами.

Позначимо $\frac{1}{y_0} = x_1 + x_2$.

Введемо нові змінні:

$$y_j = y_0 x_j, \qquad j = \overline{1,5}.$$

Дістанемо задачу лінійного програмування:

$$f = 3y_1 + 2y_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 - y_3 - 12y_0 = 0; \\ 2y_1 - y_2 + y_4 - 9y_0 = 0; \\ -y_1 + 4y_2 + y_5 - 8y_0 = 0; \\ y_1 + y_2 = 1; \\ y_0 \ge 0,\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу симплексним методом. У перше та останнє обмеження введемо штучні змінні y_6, та y_7.

Маємо оптимальний розв'язок перетвореної задачі:

$y_1 = 0,7222, \quad y_2 = 0,2778, \quad y_3 = y_4 = 0, \quad y_5 = 0,1296.$

Знайдемо оптимальний розв'язок початкової задачі, враховуючи, що $x_j = \dfrac{y_i}{y_0}$:

$$x_1 = \frac{0,7222}{0,1296} = 5,57; \quad x_3 = 0; \ x_4 = 0;$$

$$x_2 = \frac{0,2778}{0,1296} = 2,14; \qquad x_5 = \frac{0,6481}{0,1296} = 5.$$

Отже, $X^* = (5,57; 2,14; 0; 0; 5)$,

$$Z_{\max} = \frac{3 \cdot 5,57 + 2 \cdot 2,14}{5,57 + 2,14} = 2,722.$$

ТЕМА 10.
ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ.

10.1. Економічно сутність і постановка задач НЛП.

Розв'язуючи задачі оптимального управління (планування), доводиться враховувати нелінійний характер взаємозв'язків між економічними показниками. У загальному вигляді нелінійна економіко-математична модель має вигляд:

$Z = f(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n) \to \max(\min)$

за умов

$q_i(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n)\{\le, =, \ge\} b_i$

$(i = \overline{1,m})$,

де $f(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n)$ – нелінійні функції.

Задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду. Проте в такому разі можливі значні похибки. Нехай, наприклад, собівартість продукції у визначено як функцію $y = a + \dfrac{b}{x}$, де x — обсяги виробництва. Ввівши заміну $z = \dfrac{1}{x}$, дістанемо лінійну залежність $y = a + bz$. За такої заміни похибки немає. А коли $y = -ax^2 + bx + c$, то заміна цієї залежності деякою лінійною функцією $y = d + fx$ призводить до значних похибок, що ілюструє рис. 6.3.

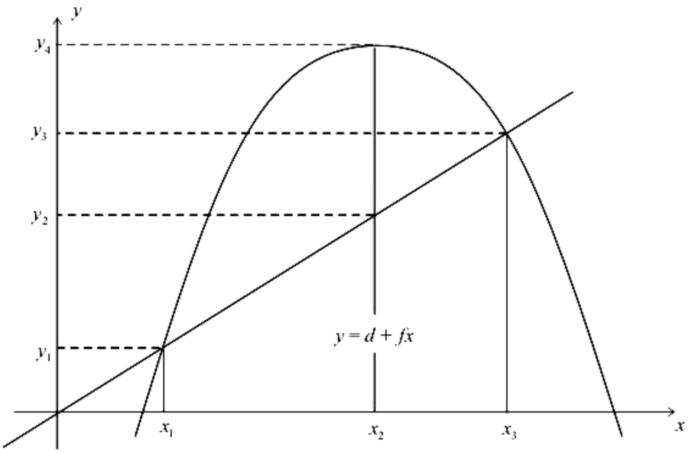


Рис.10.1

У точках x_1 і x_3 значення собівартості для обох розглядуваних функцій однакові, але в усіх інших точках ці значення відрізняються, причому в точці x_2 значною мірою:

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - fx_2 = ax_2^2 + \left(b - f\right)x_2 + \left(c - d\right).$$

Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею.

Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'я зок універсальним методом — симплексним. При цьому немає проблеми з доведенням існування такого розв'язку. Адже в ре зультаті розв'язування задачі симплексним методом завжди діс таємо один із варіантів відповіді: 1) знайдено розв'язок; 2) задача суперечлива, тобто її розв'язку не існує; 3) цільова функція не обмежена, отже, розв'язку також немає.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, тому щоразу слід доводити існування розв'язку задачі, а також його єдиність. Це досить складна математична задача.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому постають труднощі обчислювального характеру. Навіть для сучасних ПК відповідні алгоритми є доволі трудомісткими.

Для розв'язування нелінійних задач застосовують наближені методи, стикаючись із проблемою локальних і глобальних оптимумів. Наприклад, на рис. 10.2. маємо на відрізку локальні оптимуми в точках $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$, а глобальний — у точці x_4 і x_6.

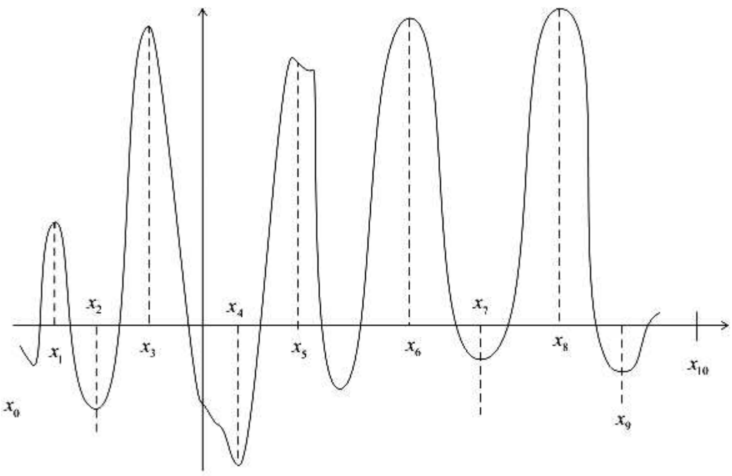


Рис. 10.2

Більшість наближених методів дають змогу знаходити локальний оптимум. Визначивши всі локальні оптимуми, методом порівняння можна знайти глобальний. Проте для практичних розрахунків такий метод не є ефективним. Часто наближені методи не «вловлюють» глобального оптимуму, зокрема тоді, коли глобальний оптимум лежить досить близько до локального. Якщо відрізок $\left[x_0, x_{10}\right]$ розіб'ємо на десять підвідрізків і глобальний оптимум потрапить у відрізок $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ (див. рис. 6.4), а ліворуч від x_i та праворуч від x_{i+1} крива $y = f(x)$ підніматиметься, то глобальний оптимум буде пропущеним. Звернемо увагу ще на один дуже важливий момент. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною. Для нелінійних задач точка, яка є оптимальним планом, може бути граничною або такою, що міститься всередині допустимої області розв'язків (планів).

10.2. Класичний метод оптимізації задач МЛП та базі використання множників Лагранжа та їх економічна інтепритація.

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує, як уже зазначалося, універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які грунтуються, здебільшого, на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування бувають ***прямі*** та ***непрямі***. Прямими методами оптимальні розв'язки відшукують у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є ***градієнтні***. Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, найбільш розроблені методи ***квадратичного*** та ***сепарабельного*** програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язують методами класичної математики. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами ***зведеного градієнта***, скажімо ***методом Якобі***, та ***множників Лагранжа***. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму ***Куна—Танкера***.

Розглянемо метод множників Лагранжа на прикладі такої за дачі нелінійного програмування:

$$Z = f\left(x_1, \quad x_2 \quad \ldots, \quad x_n\right) \to \max\left(\min\right) \quad (10.15)$$

за умов

$$q_i\left(x_1, \quad x_2 \quad \ldots, \quad x_n\right) = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (10.16)$$

де функції $f\left(x_1, \quad x_2 \quad \ldots, \quad x_n\right)$ і $q_i\left(x_1, \quad x_2 \quad \ldots, \quad x_n\right)$ диференційовані.

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні даної задачі простішою: на знаходження екстремуму складнішої функції, але без обмежень. Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і подається у вигляді:

$$\begin{aligned} &L\left(x_1, x_2 \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) = \\ &= f\left(x_1, x_2 \ldots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - q_i\left(x_1, x_2 \ldots, x_n\right)\right), \end{aligned} \quad (10.17)$$

де λ_i — не визначені поки що величини, так звані множники Лагранжа.

Знайшовши частинні похідні функції $\boldsymbol{L}$ за всіма змінними і прирівнявши їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0\left(j = \overline{1,n}\right), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad \left(i = \overline{1,m}\right), \end{cases}$$

запишемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{\partial x_j} = 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \\ b_i - q_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \qquad \left(i = \overline{1,m}\right), \end{cases} \quad (10.18)$$

що є, як правило, нелінійною.

Розв'язавши цю систему, знайдемо $X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — стаціонарні точки. Оскільки їх визначено з необхідної умовиекстремуму, то в них можливий максимум або мінімум. Іноді стаціонарна точка є точкою перегину (сідлова точка). Отже, для визначення достатніх умов екстремуму та діагностування його типу існує спеціальний алгоритм [15].

Розв'яжемо методом множників Лагранжа наведену далі задачу.

Задача 10.1. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю відвело 1200 га ріллі під основні рослинницькі культури — озиму пшеницю та цукрові буряки.

Техніко-економічні показники вирішування цих культур від биває таблиця:

Показник	Площа, га, відведена	
	під озиму пшеницю, x_1	під цукровий буряк, x_2
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн./т	800	300
Собівартість, грн./т	$y_1 = 12,5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12,5x_2^2 - 150x_1 + 650$

Знайти оптимальну площу посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Нехай x_1 — площа ріллі, відведена під сотні га озимої пшениці; x_2— площа ріллі, відведена під цукрові буряки, сотні га.

Зауважимо, що собівартість однієї тони пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель. За критерій оптимальності візьмемо максимізацію валового прибутку:

$$f = 4\left(800 - 12,5x_1^2 + 200x_1 - 1200\right)x_1 + 35\left(300 - 12,5x_2^2 + 150x_2 - 650\right)x_2 =$$

$$= 4\left(-12,5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12,5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right)$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = 4\left(-12,5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12,5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right) +$$

$$+\lambda_1\left(12 - x_1 - x_2\right) = 0.$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4\left(-37,5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 35\left(-37,5x_2 + 300x_2 - 350\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи визначимо сідлову точку. З першої та другої рівностей знайдемо вирази для λ_1 і прирівняємо їх:

$$4\left(-37,5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) = 35\left(-37,5x_2 + 300x_2 - 350\right),$$

або

$$-150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = -1312,5x_2^2 + 10500x_2 - 12250. \quad (10.5)$$

Із останнього рівняння цієї системи маємо:

$x_1 = 12 - x_2$

Підставивши значення x_1 у (10.5), дістанемо:

$$-150(12-x_2)^2 + 1600(12-x_2)^2 - 1600 = -1312,5_2^2 + 10500x_2 - 12250,$$

або $1162_2^2 - 8500x_2 + 11450 = 0.$

Розв'язавши це квадратне рівняння, дістанемо

$x_2^{(1)} \approx 1,78$ $\quad(178$ га$)$; $\quad x_2 \approx 5,53 \quad$ (553 га).

Відповідно дістанемо: $x_1^{(1)} \approx 10,22$ (1022 га); $\quad x_1^2 \approx 6,47$ (647 га)

Тобто сідловими точками є такі:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 10,22 \\ x_2^{(1)} = 1,78 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 6,47 \\ x_2^{(2)} = 5,53 \end{cases}$$

Обчислимо значення цільової функції у цих точках:

$$f(x_1 = 10,22; x_2 = 1,78) = 4(800 - 1305,61 + 2044 - 1200)1022 +$$
$$+35(300 - 39,615 + 267 - 650)178 = -236247;$$
$$f(x_1 = 6,47; x_2 = 5,53) = 4(800 - 523,26 + 1294 - 1200)647 +$$
$$+35(300 - 382,26 + 829,5 - 650)553 = 4\ 625\ 863.$$

Отже, цільова функція набуває максимального значення, якщо озима пшениця вирощується на площі 647 га, а цукровий буряк — на площі 553 га.

10.3. Опукле програмування. Необхідні та достатні умови існування сідлової точки. Теорема Куна-Такера.

Попит на продукцію, що виготовляється на двох видах обладнання, становить 120 одиниць. Собівартість, тис. грн., виробництва одиниці продукції на обладнанні кожної групи залежить від обсягу такого виробництва — відповідно x_1 і x_2 — та подається у вигляді для першої групи: $3x_1 + 4x_1^2$; для другої групи: $5x_2^2$.

Знайти оптимальний план виробництва продукції на кожній групі обладнання, який за умови задоволення попиту потребує найменших витрат, пов'язаних із собівартістю продукції.

Розв'язування. Математична модель задачі:

$$Z = 3x_1 + 4x_1^2 + 5x_2^2 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 120, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Згідно з методом множників Лагранжа складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 + 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(120 - x_1 - x_2).$$

Прирівнявши до нуля частинні похідні цієї функції за невідомими параметрами X_1, X_2 і λ, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 3 + 8x_1 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 10x_2 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial} = 120 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо:

$x_1 = 66,5; \qquad x_2 = 53,5; \qquad \lambda = 535.$

Отже, на першій групі обладнання необхідно випускати 66,5, а на другій 53,5 одиниць продукції. При цьому мінімальні витрати, тис. грн., становитимуть:

$Z = 3 \cdot 66,5 + 4(66,5)^2 + 5(53,5)^2 = 32199,75 \to \min$.

ТЕМА 11.
ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

11.1. Економічна сутність динамічного програмування. Основні типи задач та моделі ДП.

Усі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі.

Народне господарство, його галузі, регіони чи окремі підпри ємства мають розробляти стратегічні і тактичні плани. Перші виз начаються з допомогою динамічних моделей, розв'язки яких знаходять методами динамічного програмування. Зауважимо, що сума оптимальних планів на окремих відрізках планового періоду Т не завжди являє собою план, оптимальний на всьому такому періоді.

Розглянемо задачу оптимального розподілу капітальних вкладень, які можуть бути використані двома способами: з метою розвитку рослинництва або тваринництва. Відомо, що за першого способу отримаємо прибуток $g(x)$, а за другого — $h(y)$.

У такому разі однокрокову задачу можна подати у вигляді:

$$Z = g(x) + h(y) \to \max \qquad (11.1)$$

за умов

$$\begin{aligned} x + y &= b, \\ x \ge 0, \quad y &\ge 0. \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Нехай

$Z = Z_1, b = b_1, \ x = x_1, \ y = b_1 - x_1.$

Тоді дану задачу можна записати так:

$Z = g(x) + h(b_1 - x_1) \to \max$

Розглянемо її як задачу оптимального використання капітальних вкладень за окремими інтервалами планового періоду *T*, маючи на меті розподілити залишок капітальних вкладень на кінець *j*-го інтервалу $(j = 1, 2, \dots n)$ двома зазначеними способами. При цьому критерій оптимізації не змінюється: максимізуємо обсяг прибутку за весь плановий період *T*.

Якщо на першому інтервалі використано b_1 капітальних вкладень, то на його кінець залишилося їх:

$b_2 = cx_1 + d(b_1 - x_1),$

де c, d — коефіцієнти пропорційності, що характеризують використання капітальних вкладень першим і другим способами:

$\dfrac{x}{b_1 - x_1} = \dfrac{c}{d}$.

Задачу для другого інтервалу подамо так:

$Z_2 = \left[g(x_2) + h(b_2 - x_2) \right] \to \max$

за умов

$0 \le x_2 \le b_2.$

Звідси для будь-якого j–гоінтервалу маємо:

$Z_j = \left[g\left(x_j \right) + h\left(b_j - x_j \right) \right] \to \max$

за умов

$0 \le x_j \le b_j$.

Загальна задача набирає вигляду:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{j=1}^{n} \left[g\left(x_j \right) + h\left(b_j - x_j \right) \right] \to \max \quad (11.3)$$

за умов $0 \le x_j \le b_j \qquad \left(j = \overline{1,n} \right)$,

$b_j = cx_{j-1} + d\left(b_{j-1} - x_{j-1} \right), \qquad \left(j = \overline{1,n} \right)$.

Таку задачу розв’язують спеціальними методами [4, 10] .

11.2. Задачі про заміну основного капіталу обладнання підприємства. Багатокроковий процес.

Динамічний процес розбивається на сукупність послідовних етапів, або кроків. Кожний крок оптимізується окремо, а рішення (розв'язок), згідно з яким система переходить із поточного стану до нового, вибирається з урахуванням його майбутніх наслідків і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі. На останньому кроці приймається рішення (відшукується розв'язок), яке забезпечує максимальний ефект. З огляду на сказане, оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця: насамперед планується останній крок. Спираючись на відому інформацію про закінчення передостаннього кроку, на підставі різних гіпотез щодо його закінчення, вибирають управління на останньому кроці. Таке управління називають умовно оптимальним, оскільки знаходять його за припущення, що попередній крок було здійснено згідно з однією з можливих гіпотез.

Нехай аналізується деякий керований процес, перебіг якого можна розбити на послідовні етапи (кроки), що задаються. Ефективність всього процесу Z є сумою ефективностей $Z_j \qquad \left(j = \overline{1,n} \right)$ окремих кроків:

$Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j$ (адитивний критерій)

або

$Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j$ (мультиплікативний критерій).

З кожним кроком задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого ***крокового управління*** $X_j \left(j = \overline{1,n} \right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всієї операції в цілому.

У задачі динамічного програмування знаходять таке управління $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n \right)$ всією операцією, яке максимізує загальну її ефективність:

$Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j \to \max.$

Оптимальним розв’язком цієї задачі є управління X^*, що складається із сукупності оптимальних покрокових управлінь

$X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$

і забезпечує максимальну ефективність Z^*

$Z^* = \max\limits_{\chi \in X} \left\{ Z\left(x \right) \right\}.$

Усі класи задач динамічного програмування розв'язують, керуючись основним принципом: яким би не був стан системи S перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибрати так, щоб ефективність розглядуваного кроку плюс оптимальна ефективність на всіх наступних кроках була максимальною.

Отже, маємо алгоритм розв'язування задач динамічного програмування.

1. Специфікуємо стан заданої керованої системи та множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи обираємо, маючи на меті забезпечити зв'язок між послідовними етапами перебігу процесу і знайти допустимий розв'язок задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо. При цьому оптимальні рішення на наступних етапах приймаємо, нехтуючи впливом подальших рішень на прийняті раніше.

2. Розбиваємо динамічний процес (операцію) на кроки, що відповідають, як правило, часовим періодам планування або окремим об'єктам (підприємствам, видам продукції, устаткування і т. ін.), стосовно яких розробляються управлінські рішення.

3. Подаємо перелік управлінських рішень $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначаємо ефект, що його забезпечує управлінське рішення x_j, на $j-$му кроці, якщо перед тим система була у стані S, як функцію ефективності:

$$Z=\left\{g\left(x\right)+h\left(b_1-x_1\right)\right\}\rightarrow \max.$$

5. Досліджуємо, як змінюється стан S системи під впливом управлінського x_j на $j-$му кроці, переходячи до нового стану:

$$S'=\varphi_j\left(s,x_j\right).$$

6. Будуємо для розглядуваної задачі рекурентну залежність, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j\left(s\right)$, починаючи з $j-$ го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}\left(s'\right)$:

$$Z_j\left(s\right)=\max_{X_j}\left\{f_j\left(s,x_j\right)+Z_{j+1}\left(s,x_j\right)\right\}$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на $j-$ му кроці $\left(x_j\left(s\right)\right)$. Зауважимо, що за аргумент функції $Z_{j+1}\left(s\right)$ беремо не s, а змінений стан системи, тобто $s'=\varphi_j\left(s,x_j\right)$.

7.Здійснюємо умовну оптимізацію останнього n-го кроку, розглядаючи множину станів s, що на один крок віддалені від кінцевого стану, і визначаємо умовний оптимальний ефект на n-му кроці:

$$Z_n\left(s\right)=\max_{X_n}\left\{f_n\left(s,x_n\right)\right\}$$

Далі знаходимо умовне оптимальне управлінське рішення $x_n\left(s\right)$, завдяки якому цей максимум досягається.

8. Виконуємо умовну оптимізацію $\left(n-1\right)-$ го, $\left(n-2\right)-$ го і т. д., тобто всіх попередніх кроків за рекурентними залежностями п.6, і для кожного кроку знаходимо умовне оптимальне управління:

$$Z^*=Z_1\left(s_0\right)$$

9. Здійснюємо безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямі — від початкового стану s_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці $x_1^*=x_1\left(s\right)$ змінюємо стан системи згідно з п. 5. Далі для цього нового стану знаходимо оптимальне управління на другому кроці x_2^* і діємо так до останнього кроку.

11.3. Метод рекурентних співвідношень. Використання принципу Беллмана і алгоритму Джонсона.

Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного з підприємств розроблено інвестиційні проекти, які відбивають прогнозовані сумарні витрати ***C*** та доходи ***D***, пов'язані з реалізацією кожного проекту. Зміст цих проектів ілюструє таблиця:

Проєект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект передбачає відмовитися від розширення підприємства, а тому має нульові витрати і доходи. Розробити план І інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язування. Спрощеним і найменш ефективним способом розв'язування таких задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв'язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про неприпустимі розв'язки, а також немо жливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв'яжемо цю задачу за алгоритмом (методом) ***зворотного прогону***. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підпри ємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програ мування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженнями на загальний обсяг виділених коштів — 4 млн грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1—4;

x_2 — те саме на кроках 2—4;

x_3 — те саме на кроках 3 і 4;

x_4 — те саме на кроці 4.

$k_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ — обсяги інвестицій на г'-му підприємстві $\left(k_i=0,1,2,3,4\right)$.

$k_i^*\left(i=\overline{1,n}\right)$ — оптимальні обсяги інвестицій на $i-$му підприємстві.

Рекурентне співвідношення для зворотного прогону від кроку 4-го до 1-го (від четвертого підприємства до першого) подається у вигляді:

$$f_i^*\left(x_5\right)=0,$$

$$f_i^*\left(x_j k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i-C_i\left(k_i\right)\right)\right\}\quad\left(i=\overline{1,4}\right),\qquad C_j\left(k_i\right)\le X_i,$$

де $f_i^*\left(x_j;k_i\right)$ — сумарна ефективність інвестицій з $i-$го кроку до останнього.

Тут $f^*\left(x_5\right)=0$, оскільки п'ятого підприємства не існує. Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

Етап 4.

$$f_4^*\left(x_j k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i-C_i\left(k_i\right)\right)\right\}$$

Результати розрахунків подамо табицею:

x_4	Дохід $f_4\ \left(x_4;k_4\right)=D_4\left(k_4\right)+f_5^*\left(x_5\right)$					Оптимальний розв'язок	
	$k_4=0$	$k_4=1$	$k_4=2$	$k_4=3$	$k_4=4$	$f_4^*\left(x_4\right)$	k_4^*
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1
2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

Етап 3.

$$f_3^*\left(x_3\right)=\max_{k_3}\left\{D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)\right\}$$

за умов

$C_3\left(k_3\right)\le X_3,\quad k_3=0,1,2,3,4.$

Результати розрахунків відбиває таблиця:

x_3	Дохід $f_3\ \left(x_3;k_3\right)=D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)$				Оптимальний розв'язок	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$k_3=4$	$f_3^*\left(x_3\right)$	k_3^*
0	$0+f_4^*\left(0-0\right)=$ $=0+0=0$				0	0
1	$0+f_4^*\left(1-0\right)=$ $=0+2=2$				2	0
2	$0+f_4^*\left(2-0\right)$ $=0+8=8$	$4+f_4^*\left(2-2\right)$ $=4+0=4$			8	0
3	$0+f_4^*\left(3-0\right)$ $=0+8=8$	$4+f_4^*\left(3-2\right)$ $=4+2=6$	$9+f_4^*\left(3-3\right)=$ $=9+0=9$		9	3
4	$0+f_4^*\left(4-0\right)$ $=0+8=8$	$4+f_4^*\left(4-2\right)$ $=4+8=12$	$9+f_4^*\left(4-3\right)$ $=9+2=11$	$12+f_4^*\left(4-4\right)$ $=12+0=12$	12	2 або 4

Розрахунки виконуються так. Нехай потрібно знайти $f_3^*\left(x_3=3\right)$. Обчислюємо

$f_3\left(x_3;k_3\right)=D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right).$

Отже,

$f_3(x_3=3;k_3=1)=0+f_4^*(3-0)=0+f_4^*(3)=0+8=0,$

$f_3(x_3=3;k_3=2)=4+f_4^*(3-2)=4+2=6,$

$f_3(x_3=3;k_3=3)=9+f_4^*(3-3)=9+0=9.$

Запишемо, що $C_3(k_3=1)=0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн грн. Значення $f_4^*(x_3-C_3(k_3))$ беремо з попередньої таблиці. Далі маємо:

$$f_3^*(x_3)=\max_{K_3=1,2,3}\left\{D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))\right\}=\max\{0,6,9\}=9.$$

Етап 2.

$$f_2^*(x_2)=\max_{k_2}\left\{D_2(k_2)+f_3^*(x_2-C_2(k_2))\right\}$$

за умов

$C_2(k_2)\le x_2,\quad k_2=0,1,2,3,4.$

Результати розрахунків подаємо таблицею:

x_2	Дохід $\{f_2(x_2;k_2)=D_2(k_2)+f_3^*(x_3-C_2(k_2))\}$					Оптимальний розв'язок	
	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$	$f_2^*(x_2)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

Етап 1.

$$f_1^*(x_1)=\max_{k_1}\left\{D_1(k_1)+f_2^*(x_1-C_1(k_1))\right\}$$

за умов

$C_1(k_1)\le x_1,\quad k_1=0,1,2,3,4.$

Виконуємо розрахунки лише для $x_1=4$, подаючи їх у вигляді таблиці:

x_1	Дохід $f_1(x_1;k_1)=D_1(k_1)+f_2^*(x_1-C_1(k_1))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$k_1=4$	$f_1^*(x_1)$	k_1^*
4	$3+f_2^*(4-1)=$ $=3+12=15$	$5+f_2^*(4-2)=$ $=5+6=11$	$7+f_2^*(4-3)=$ $=7+4=11$		15	1

Знайдемо оптимальний план. Із таблиці першого кроку випливає, що $k_1^*=1$, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, який використовує 1 млн грн. інвестицій з ефективністю 3 млн грн. Отже, $x_3=3-1=2$ для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4–1=3 млн грн. інвестицій. Із таблиці другого кроку маємо, що за умов $x_2=3$ максимальний ефект настає в разі реалізації для другого підприємства першого проекту $(k_2=1)$ ефективність становить 4 млн грн. Отже, $x_3=3-1=2$, тобто для третього і чет вертого підприємств слід використати 2 млн грн. інвестицій. Із таблиці третього кроку за умов $x_3=2$ маємо, що $k_3=0$. Отже, $x_4=2$, а йому відповідають капітальні вкладення $k_4=2$, ефективність яких 8 млн грн. Остаточно маємо: ефективність 4 млн грн. інвестицій становить 3+4 + 8=15 (млн грн.).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бугір М.К. Математика для економістів: посібник. / М.К. Бугір – К.: ВЦ «Академія», 2003. – 520 с.
2. Глушик М.М. Математичне програмування: навч. посіб. / М.М. Глушик, І.М. Копич, О.С. Пенцак – Львів: «Новий світ-2000», 2006. – 216 с.
3. Дацко М.В. Дослідження операцій: навч. посіб. / М.В. Дацко, М.М. Карбовник – Львів, 2009. – 288 с.
4. Катренко А.В. Дослідження операцій: підручник. / А.В. Катренко – Львів: «Магнолія Плюс», 2005. – 549 с.
5. Тарасюк Г. М. Шваб Л. І. Планування діяльності підприємства. навч. посіб. /Г. М. Тарасюк, Л. І. Шваб – «Каравела», 2003 – 432с.
6. Тарасюк Г.М. Планова діяльність як системний процес управління підприємством: монографія / Г. М. Тарасюк. – Житомир : ЖДТУ, 2006. – 469 с.
7. Швайка Л. А. Планування діяльності підприємства: навч. посіб. / Л. А. Швайка – Львів : «Новий Світ - 2000», 2004. – 268 с.
8. Мазник Л.В. Оптимізаційні методи та моделі: навчально-методичний посібник до вивчення дисципліни, виконання лабораторних та контрольних робіт для студентів напряму підготовки 6.030505 «Управління персоналом та економіка праці», 6.030508 «Фінанси і кредит», 6.030509 «Облік і аудит», 6.030507 «Маркетинг» всіх форм навчання / Укл.: Л.В. Мазник, Ю.М. Гринюк – К.: НУХТ, 2013. – 100 с.
9. Лавренчук В.П., Готинчак Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. Вища математика Частина 3.-Чернівці , в-во Рута, 2007.
10. Збірник задач з курсу “Математичне програмування” /Укл. С.І. Наконечний, В.В. Вітлінський та ін. – К.:КНЕУ, 1998. – Ч.2.
11. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001.
12. Цегелик. Г.Г. Математичне програмування. Львів, 1995.

ЗМІСТ.