МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ
Кафедра комп’ютерних систем та мереж

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

по проведенню лабораторних робіт
з дисципліни
„Алгоритми та методи обчислень”
для студентів денної форми навчання
за напрямом
6.050102 „Комп’ютерна інженерія”

Тернопіль, 2015

Методичні вказівки розроблені у відповідності з навчальним планом напрямку 6.050102 „Комп’ютерна інженерія ”

Укладач: к.т.н. Тиш Є.В.

Рецензент:

Відповідальний за випуск:
в.о.зав. каф. КС, к.т.н, доц. Осухівська Г.М.

Затверджено на засіданні кафедри комп’ютерних систем та мереж, протокол №____ від «___» ____________2015р.

Схвалено та рекомендовано до друку методичною комісією факультету комп’ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, протокол №____ від «___» _________201_ р.

Посібник складений з врахуванням методичних розробок інших вищих закладів освіти, а також матеріалів літературних джерел, перелічених в списку.

ЗМІСТ

Лабораторна робота № 1

Методи розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета роботи: ознайомитися з алгоритмами та методами розв’язання систем лінійних рівнянь та навчитись реалізовувати їх для конкретних задач.

Теоретичні відомості

До розв’язку систем лінійних рівнянь зводиться велика кількість практичних задач. Можна стверджувати, що розвязок лінійних систем є одною з самих поширених та важливих задая обчислювальної математики.

Запишемо *систему n лінійних алгебраїчних рівнянь рівнянь з n невідомими:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

необхідно знайти такі значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які перетворюють рівняння системи (1.1) в тотожності. Таким чином розв’язком системи рівнянь (1.1) є множина $\left\{x_i : i = \overline{1,n}\right\}$.

Методи розв’язку систем лінійних рівнянь поділяються на дві групи – прямі та ітераційні. *Прямі методи* використовують скінченні співвідношення (формули) для розрахунку невідомих. Вони дають розв'язок після виконання завчасно відомої кількості операцій. Ці методи порівняно прості та більш універсальні, тобто можуть застосовуватися до розв’язання широкого класу лінійних систем.

Разом з тим ці методи мають й низку недоліків. Як правило, вони потребують зберігання в оперативній пам’яті ЕОМ одразу всієї матриці, та при великих значеннях *n* витрачається багато місця в пам’яті. Далі, прямі методи зазвичай не враховують структуру матриці – при великій кількості нульових елементів в розріджених матрицях ці елементи займають місці в пам'яті машини, та над ними проводяться арифметичні дії. Суттєвим недоліком прямих методів є також накопичення похибок в процесі розв’язання, оскільки розрахунки на будь-якому етапі використовують результати попередніх операцій.

Прямі методи лінійних систем також називають *точними*, оскільки розв'язок виражається у вигляді точних формул через коефіцієнти системи. Але точний розв'язок може бути отриманий лише при виконанні розрахунків з нескінченим числом розрядів. На практиці при використанні ЕОМ розрахунки проводяться з обмеженим числом знаків, що визначаються розрядом машини. Тому не можливо уникнути похибок в кінцевому результаті.

Ітераційні методи – це методи послідовних наближень. В них необхідно задати деякий наближений розв'язок – початкове наближення. Після цього за допомогою деякого алгоритму проводиться один цикл розрахунків, що називають *ітерацією*. Ітерації проводять до отримання розв’язку з заданою точністю.

Хоча ітераційні методи зазвичай біль складні за прямі, в ряді випадків їм надається перевага. Вони потребують зберігання в пам'яті машини не всієї матриці системи, а лише декілька векторів з n компонентами. Деколи елементи матриці можна зовсім не зберігати, а розраховувати їх по мірі необхідності. Похибки остаточних результатів при використанні ітераційних методів не накопичуються, оскільки точність розрахунків в кожній ітерації визначається лише результатами попередніх ітерацій і практично не залежать від раніше виконаних розрахунків. Ці переваги ітераційних методів роблять їх особливо корисними в випадку великої кількості рівнянь, а також погано обумовлених систем. Необхідно відмітити, що при цьому збіжність ітерацій може бути дуже повільною; тому відшукуються ефективні шляхи її прискорення.

Прямі методи

Метод Крамера. Система рівнянь (1.1) має один розв’язок, якщо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля. Розв’язок системи (1.1) можна шукати за правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b_n\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\, b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, b_2 \ldots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}\, b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots b_1 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots b_n \end{vmatrix}.$$

Цей метод має недолік, що полягає в обмеженні кількості рівнянь системи (1.1).

Метод Гауса. Нехай дано систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}, \end{cases} \tag{1.2}$$

визначник якої відмінний від нуля $\Delta \neq 0$. Вибираємо рівняння із системи таке в якому $a_{i1} \neq 0$, де $i = \overline{1,3}$. Нехай таким є перше рівняння, тобто $a_{11} \neq 0$, його будемо називати ведучим елементом.

Розділимо коефіцієнти першого рівняння системи (1.2) на a_{11}, отримаємо рівняння

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14}, \tag{1.3}$$

де

$$b_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad k = \overline{2,4}.$$

Помножимо рівняння (1.3) на $-a_{21}$ та додамо його до другого рівняння системи (1.2), отримаємо

$$a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = a_{24}^{(1)}, \qquad (1.4)$$

аналогічно повторимо цю ж операцію, тобто помножимо рівняння (1.3) на $-a_{31}$ і додамо до третього рівняння системи (1.2), в результаті отримаємо

$$a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = a_{34}^{(1)}. \qquad (1.5)$$

Запишемо систему з рівнянь (1.4) та (1.5)

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = a_{24}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = a_{34}^{(1)}. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Таким чином загальний вигляд для коефіцієнтів $a_{ik}^{(1)}$ системи (1.6) буде наступним:

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{i1} b_{1k}, \qquad \left(i = \overline{2,3}, k = \overline{2,4}\right).$$

Розділивши на $a_{22}^{(1)} \neq 0$, де $a_{22}^{(1)}$ - ведучий елемент системи (1.6), коефіцієнти першого рівняння системи (6), отримаємо рівняння

$$x_2 + b_{23}^{(1)} x_3 = b_{24}^{(1)}, \qquad (1.7)$$

де

$$b_{2k}^{(1)} = \frac{a_{2k}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ \left(k = \overline{3,4}\right).$$

Використовуючи рівняння (1.7) виключимо з системи (1.6) змінну x_2, що приведе до одного рівняння

$$a_{33}^{(2)} x_3 = a_{34}^{(2)},$$

де $a_{3k}^{(2)} = a_{3k}^{(1)} - a_{32}^{(1)} b_{2k}^{(1)} \quad \left(k = \overline{3,4}\right)$. Якщо $a_{33}^{(2)} \neq 0$, отримаємо

$$x_3 = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_{34}^{(2)}. \qquad (1.8)$$

Об’єднуючи рівняння (1.3), (1.7) та (1.8) отримуємо

$$\begin{cases} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 = b_{14}, \\ \qquad x_2 + b_{23}^{(1)} x_3 = b_{24}^{(1)}, \\ \qquad\qquad x_3 = b_{34}^{(2)}. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Процес перетворення системи (1.2) до трикутного виду (1.9) називається *прямим ходом.*

Невідомі x_1, x_2 та x_3 можна знайти із системи (1.9) за формулами *зворотнім ходом*

$$\begin{cases} x_3 = b_{34}^{(2)}, \\ x_2 = b_{24}^{(1)} - b_{23}^{(1)} x_3, \\ x_1 = b_{14} - b_{13} x_3 - b_{12} x_2. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Блок-схему алгоритму розв’язання системи лінійних рівнянь методу Гауса подано на рисунку 1.1.

Застосування методу Гауса для розв’язування систем лінійних рівнянь з великою кількістю невідомих досить громіздке. Крім того, кількість невідомих може бути така велика, що коефіцієнт системи не завжди можна розмістити в оперативній пам’яті ЕОМ. Тоді застосувати для її розв’язування метод гауса взагалі не можна. У цих випадках розв’язують систему ітераційними методами.

Ітераційні методи

Метод простої ітерації. Нехай задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_{1n}, \end{cases} \tag{1.11}$$

або в матричному вигляді

$$AX = B, \tag{1.12}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Нехай діагональні елементи a_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, n$) матриці A відмінні від нуля. Тоді, розв’язавши перше рівняння системи (1.11) відносно x_1, а друге – відносно x_2 й т.д., дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 = a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_1 = a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} + \beta_n, \end{cases} \tag{1.13}$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases} \qquad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Ввівши до розгляду матриці

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

систему (1.13) запишемо у вигляді

$$x = \alpha x + \beta. \tag{1.14}$$

Систему (1.14) називають системою *нормального виду*.

Розв'яжемо її методом послідовних наближень. За початкове наближення візьмемо, наприклад, стовпець вільних членів, тобто $x^{(0)} = \beta$.

Тоді послідовно знаходимо

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{1.15}$$

або в розгорнутому вигляді

$$x_i^{(0)} = \beta_i,$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i, \quad i = 1,2,\dots,n; \quad k = 0,1,2,\dots \tag{1.16}$$

Якщо послідовність наближень $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ має границю $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$, то ця границя і буде розв'язком системи (1.14).

Справді, перейшовши до границі, коли $k\to\infty$, у рівності (1.15), маємо

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} (\alpha x^{(k)} + \beta) = \alpha \lim_{k\to\infty} x^{(k)} + \lim_{k\to\infty} \beta,$$

або

$$x^* = \alpha\, x^* + \beta.$$

Таким чином, вектор

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix},$$

є розв'язком системи (1.14), а отже, та системи (1.11).

Метод послідовних наближень, який визначається формулами (1.15) або (1.16), називається методом *простої ітерації* або просто *методом ітерацій*.

Метод ітерацій легко реалізується на ЕОМ. Алгоритм розв'язування систем виду (1.13) передбачає:

1. Обчислення величин $l = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |$.

2. Перевірку умови $l < 1$. Якщо ця умова не виконується, то процес обчислень закінчуються та видається повідомлення про те, що метод застосувати не можна.

3. Обчислення допустимої похибки $\varepsilon_1 = \dfrac{1-l}{l}\varepsilon$.

4. Вибір початкового наближення $x_i^{(0)} = \beta_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$.

5. Обчислення наступного наближення y_i $(i = 1,2,\dots,n)$ через попередні x_i $(i = 1,2,\dots,n)$.

6. Перевірку умови $\max\limits_{1\le i\le n} | y_i - x_i | < \varepsilon_1$. Якщо ця умова виконується, то процес ітерацій завершується, інакше переходять до виконання п.5.

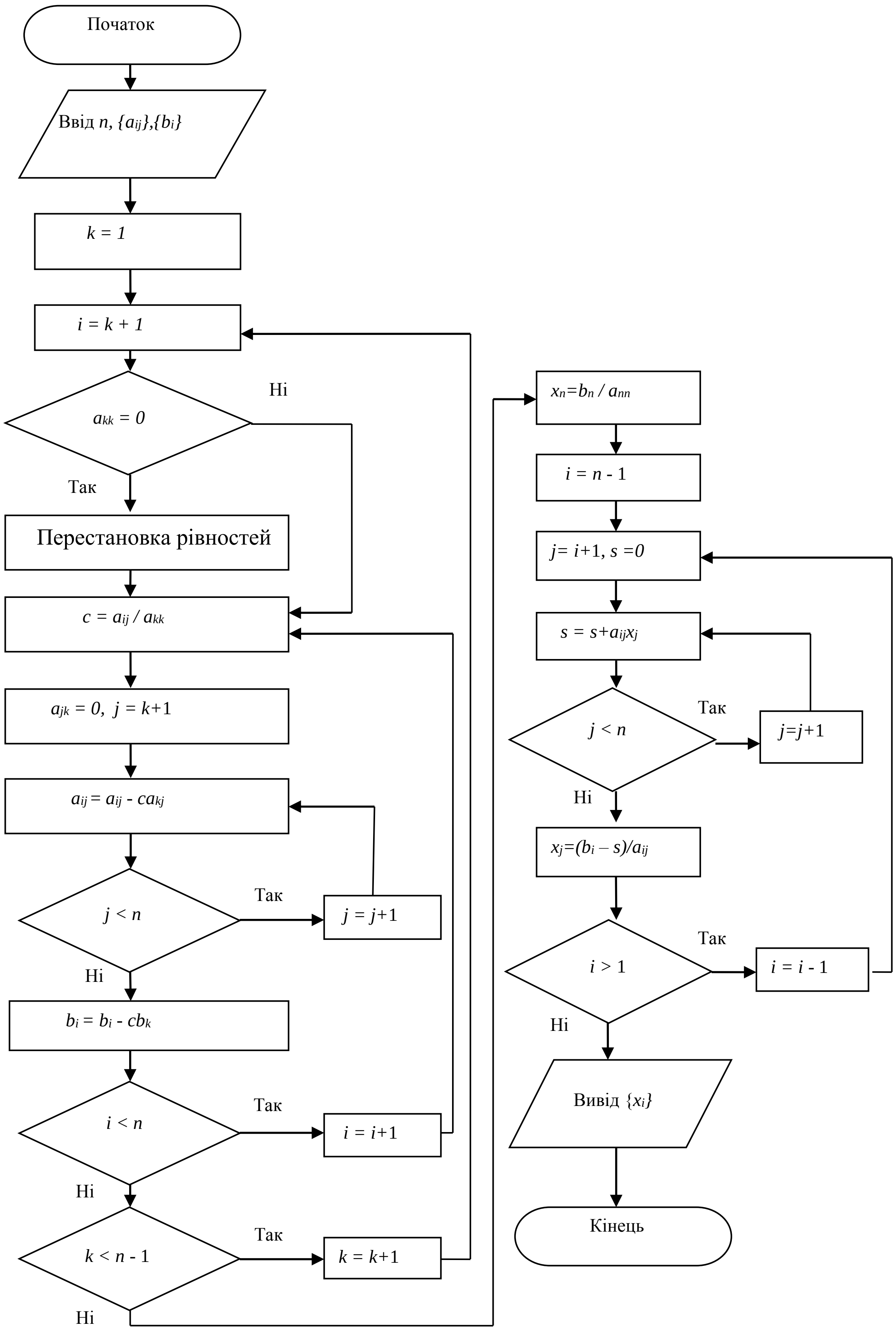

Рисунок 1.1 – Блок-схема розв’язання системи лінійних рівнянь методом Гауса

Хід роботи

1. Знайти розв'язок системи рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

використавши три методи: Гауса, Крамера та простої ітерації з точністю $\varepsilon=0{,}5\cdot 10^{-6}$. Значення коефіцієнтів схеми та вільні члени взяти згідно варіанту з Таблиці 1.1.

2. Порівняти між собою розв'язки системи, знайдені заданими методами. Визначити кількість ітерацій, потрібних для досягнення заданої точності розв'язку в методі простої ітерації.

Таблиця 1.1 – Варіанти завдання для виконання лабораторної роботи

Варіант	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	3,90	1,25	-0,98	4,905
	2	0,74	3,45	-0,84	6,031
	3	-0,65	1,18	2,38	10,134
2	1	2,68	-0,68	0,48	3,868
	2	-0,73	2,92	-0,39	4,329
	3	-0,58	-1,12	3,12	7,532
3	1	2,50	-0,91	-0,32	0,287
	2	-0,91	3,64	-0,48	5,418
	3	0,48	-0,98	2,14	5,908
4	1	2,78	0,38	-0,43	3,261
	2	-0,78	3,14	-0,81	3,295
	3	-0,45	-0,86	2,48	6,072
5	1	3,96	-0,78	-0,35	2,525
	2	1,18	3,78	-0,87	7,301
	3	-0,96	-1,02	3,68	9,190
6	1	3,48	1,12	-0,94	4,158
	2	1,08	3,67	-0,87	6,908
	3	-1,21	-1,43	4,14	9,507
7	1	2,75	1,12	-0,6	3,066
	2	1,06	2,98	-0,86	5,328
	3	-1,18	-1,36	3,02	5,790
8	1	3,45	0,78	-0,97	3,229
	2	0,78	2,63	-0,89	4,026
	3	-0,97	-0,89	2,41	5,030
9	1	3,21	0,81	-0,93	3,102
	2	0,81	2,49	-0,94	3,571
	3	-0,93	-0,94	2,53	5,391
10	1	3,67	0,68	-1,21	2,467
	2	0,68	2,71	-0,96	3,825
	3	-1,21	-0,96	2,69	5,513
11	1	3,78	0,67	-0,83	3,928
	2	0,67	2,76	-0,69	4,871
	3	-0,83	-0,69	2,39	5,616

12	1 2 3	4,05 -0,93 -0,41	-0,93 3,46 0,25	-0,41 0,25 3,2	2,096 8,221 11,201
13	1 2 3	3,74 1,12 -1,03	1,12 2,43 -1,07	-1,03 -1,07 2,7	4,207 3,412 5,547
14	1 2 3	3,91 0,88 -1,13	0,88 2,77 -0,98	-1,13 -0,98 2,41	3,543 4,173 4,599
15	1 2 3	3,80 0,75 0,60	1,10 2,96 1,20	0,98 0,92 3,20	10,716 11,023 13,900
16	1 2 3	2,40 0,98 0,56	1,10 2,60 1,10	0,60 1,20 2,70	7,680 11,354 12,008
17	1 2 3	2,50 0,95 0,68	1,05 2,60 1,05	0,75 0,85 2,15	8,170 10,195 10,284
18	1 2 3	2,60 0,92 0,48	1,10 2,70 0,88	0,70 0,65 1,98	8,260 9,756 9,072
19	1 2 3	2,70 0,86 1,05	1,15 2,60 0,74	0,48 0,32 2,10	7,806 8,382 9,861
20	1 2 3	2,80 0,96 0,76	1,02 2,40 0,98	0,32 0,46 2,02	7,112 8,480 9,804
21	1 2 3	2,90 0,82 0,38	1,08 2,50 0,96	0,43 0,64 1,80	7,738 9,114 8,558
22	1 2 3	3,10 1,12 0,82	1,20 2,60 1,20	0,62 0,85 2,54	8,894 10,416 12,074
23	1 2 3	3,75 0,89 0,79	1,20 3,50 1,71	1,07 1,52 3,20	11,355 13,245 14,376
24	1 2 3	4,20 1,32 0,98	1,50 4,50 1,45	0,92 1,20 3,50	12,210 15,030 15,015
25	1 2 3	3,50 2,10 0,87	1,20 4,30 1,70	0,96 1,02 3,20	10,650 15,240 14,538
26	1 2 3	2,70 0,91 0,64	0,81 2,92 0,93	0,56 0,98 1,96	7,431 10,437 8,793
27	1 2 3	3,02 1,12 0,29	1,20 2,70 0,99	0,47 0,90 1,88	8,460 10,050 8,432
28	1 2 3	4,50 1,40 0,56	1,20 3,70 1,23	0,64 0,92 2,00	11,190 12,630 9,423

29	1	2,50	0,94	0,36	6,804
	2	0,87	2,30	0,76	8,415
	3	0,26	0,97	2,15	8,877
30	1	3,75	1,05	0,63	9,720
	2	0,28	1,47	0,35	4,557
	3	1,12	0,75	3,15	12,705

Контрольні запитання

1. Матриці: означення, квадратна, прямокутна, трикутна матриця, основні дії з матрицями, елементарні перетворення матриць, знаходження визначників.
2. Назовіть точні та наближені методи розв’язку систем рівнянь.
3. Які функції MatLab використовуються для їх реалізації?
4. В чому суть методу Крамера?
5. В чому суть методу Гауса?
6. В чому суть методу простої ітерації?
7. Побудуйте блок-схеми зазначених методів.
8. Сформулюйте достатню умову збіжності методу ітерації для системи рівнянь.

Лабораторна робота № 2

Наближені методи розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь

Мета роботи: Засвоїти наближені методи розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь, реалізувати їх у вигляді програми на ЕОМ та розв'язати типове нелінійне рівняння одним із цих методів.

Теоретична частина

Наближене знаходження дійсних коренів рівняння складаються з двох етапів.

1.Визначення відрізків $[a,b]$, які містять лише один корінь рівняння. Відрізки повинні бути як найменшими. Вибір відрізку $[a,b]$ здійснюється графічно, або методом перебору.

2. Уточнення наближеного кореня шляхом застосування одного із чисельних методів (метод бісекції, метод хорд, метод дотичних, метод простої ітерації, тощо).

Чисельні методи розв'язання алгебраїчних рівнянь

Метод ділення відрізка навпіл (метод бісекції). ***Це один з найпростіших методів знаходження коренів нелінійних рівнянь. Він полягає в наступному.***

Нехай задано на відрізку $[a,b]$ ***неперервну функцію*** $y = f(x)$***, яка приймає на його кінцях різні знаки (рисунок 2.1).***

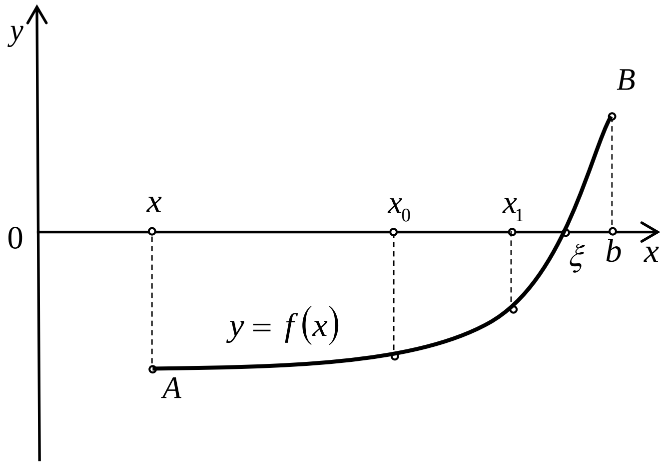

Рисунок 2.1 - Геометричний зміст методу поділу відрізку навпіл

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ навпіл. В наслідок чого отримаємо точку x_0:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Знаходимо значення $f(x_0)$ та перевіряємо чи $f(x_0) = 0$. Для цього визначаємо в якому із відрізків ($[a, x_0]$ чи $[x_0, b]$) значення функції на її кінцях різного знаку. Згідно з рисунку 2.1 вибирається сегмент $[x_0, b]$, оскільки $f(b) f(x_0) \langle 0$. Після чого ділимо відрізок $[x_0, b]$ навпіл та отримуємо точку x_1 ($x_1 = \frac{x_0 + b}{2}$), перевіряємо знаки функцій на кінцях відрізків та

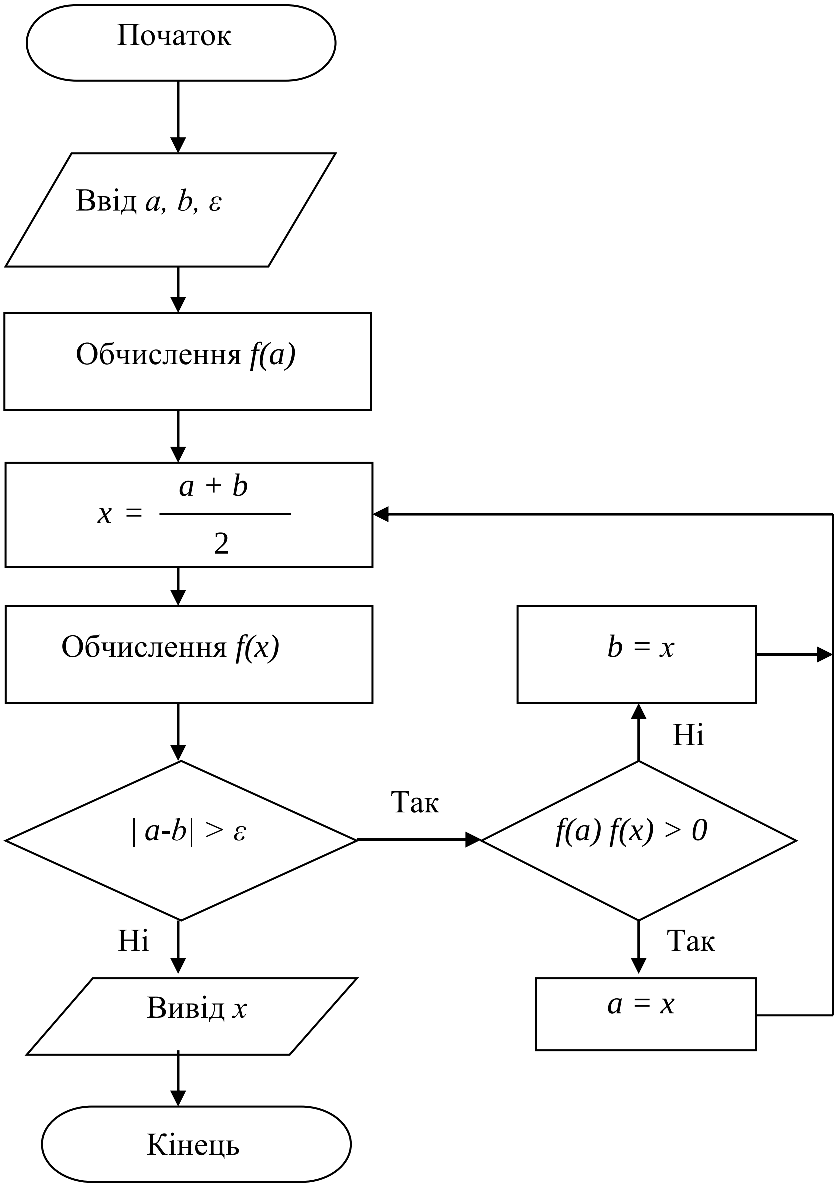

Рисунок 2.2 Блок-схема ітераційного алгоритму методу поділу відрізка навпіл

вибираємо новий відрізок й т.д.. Так продовжується до тих пір, поки відрізок в якому знаходиться корінь рівняння $f(x)=0$ не стане знайденим з точністю до $\varepsilon > 0$, тобто

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon,$$

де n - кількість ітерацій.

Кінці даного відрізку і будуть давати шукане наближення кореня рівняння (лівий з недостачею, правий — з перебільшенням).

Можна також оцінювати довжину отриманого відрізка: якщо вона стає меншою допустимої похибки, то алгоритм зупиняється.

На рисунку 2.2 подано блок-схему ітераційного процесу знаходження кореня рівняння методом ділення відрізка навпіл. Тут звуження відрізку відбувається шляхом заміни границь a або b на поточне значення кореня *x*.
При цьому значення $f(a)$ визначається лише один раз, оскільки нам потрібний тільки знак функції $f(x)$ на лівій гранці, а він в ітераційному процесі не змінюється.

Метод поділу відрізка навпіл відносно повільний, але він завжди збігається.

Метод лінійної апроксимації або метод хорд

Суть методу полягає в заміні графіка функції $y = f(x)$ хордою, тобто відрізком, який з'єднує кінцеві точки графіку функції $y = f(x)$: точки $(a, f(a))$

та $(b, f(b))$ (рисунок 2.3 а,б).

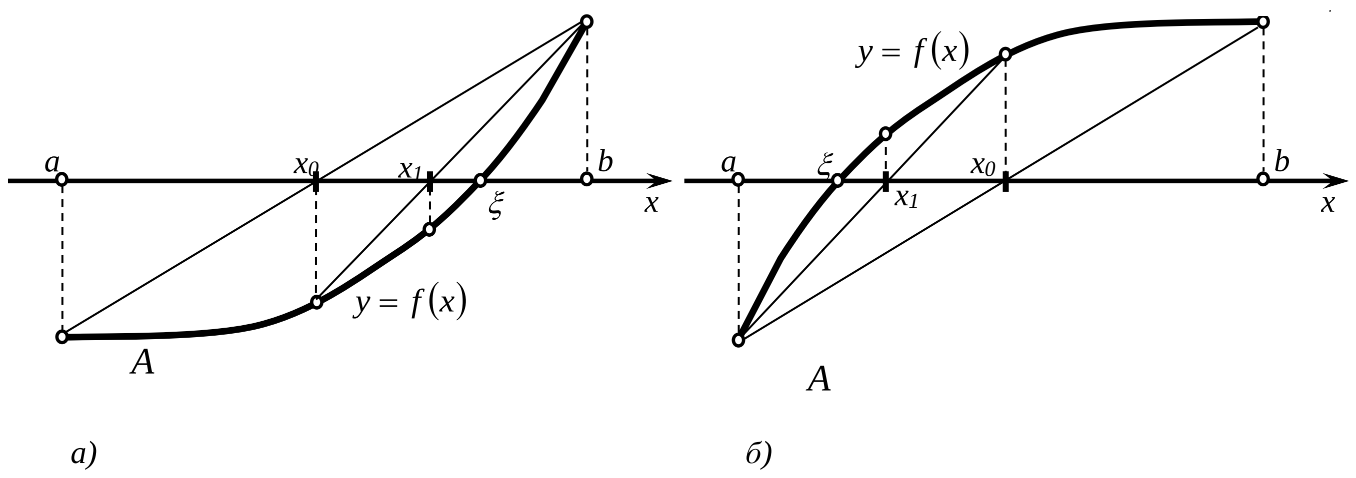

Рисунок 2.3 – Геометричний зміст методу хорд

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$, має вигляд

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}. \quad (2.1)$$

Підставляючи $y = 0$ в (2.1) знаходимо абсцису x_0 точки перетину хорди з віссю абсцис:

$$x_0 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a). \quad (2.2)$$

З рисунку 2.3 а,б видно, що $x_0 \in [a, b]$. Порівнюючи знаки $f(a)$, $f(x_0)$ та $f(b)$ вибираємо один з відрізків $[a, x_0]$, $[x_0, b]$. Якщо $f(a)$ та $f(x_0)$ різних знаків вибираємо $[a, x_0]$ та навпаки, якщо $f(x_0)$ та $f(b)$ різних знаків — то вибираємо інтервал $[x_0, b]$. Якщо розглядати рисунок 2.3,а, то вибирається інтервал $[x_0, b]$. Далі проводиться хорда через точки $(x_0, f(x_0))$ та $(b, f(b))$ та шукається абсциса x_1 точки перетину хорди з віссю Ox. Таким чином отримується одностороння збіжна послідовність $\{x_n; n = \overline{0, \infty}\}$, границя якої $\lim_{n \to \infty} x_n$ і є коренем рівняння $f(x) = 0$.

Ітераційний процес продовжується до тих пір, поки значення $f(x_n)$ не стане за модулем менше заданого числа ε.

Блок-схема метода хорд аналогічна наведеній на рисунку 2.2 для методу поділу відрізка навпіл з тією лише різницею, що замість розрахунку наближеного кореня за формулою $x = \dfrac{b - a}{2}$ потрібно використовувати формулу (2.2). Крім того, в блок-схему необхідно ввести оператори розрахунку значень $f(x)$ на границях нових відрізків.

Як можна помітити, алгоритми методів ділення відрізка пополам та методу хорд схожі, але другий з них в ряді випадків дає більш швидку збіжність ітераційного процесу. При цьому успіх його використання, як і методу поділу відрізку навпіл є гарантованим.

Метод дотичних або метод Ньютона

Його відмінність від попереднього методу полягає в тому, що на n –ій ітерації замість хорди проводиться дотична до кривої $y = f(x)$ при $x = z_n$ та шукається точка її перетину з віссю абсцис. При цьому не обов'язково задавати відрізок $[a,b]$, що має корінь рівняння, а достатньо знайти деяке початкове наближення $x = z_0$ (рисунок 2.4).

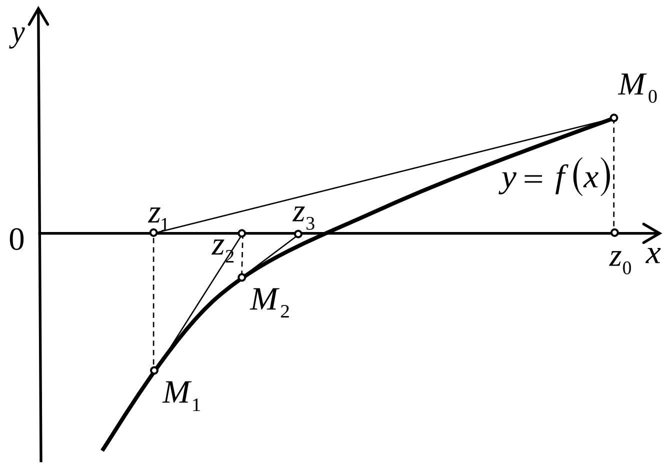

Рисунок 2.4 – Геометричний зміст методу дотичних

Рівняння дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ в точці M_0 з координатами $(z_0, f(z_0))$, має вигляд:

$$y - f(z_0) = f'(z_0)(x - z_0)\,. \qquad (2.3)$$

Звідси знайдемо наступне наближення кореня z_1 як абсцису точки перетину дотичної з віссю Ox ($y = 0$):

$$z_1 = z_0 - \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Аналогічно можуть бути знайдені й наступні наближення як точки перетину з віссю абсцис дотичних, проведених в точках M_1, M_2 , тощо. Формула для *n+1*-го наближення має вигляд

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}. \qquad (2.4)$$

При цьому необхідно, щоб $f'(z_n)$ не дорівнювала нулеві. Для закінчення ітераційного процесу може бути використане або умова $|f(z_n)|\langle\varepsilon$, або умова близькості двох послідовних наближень: $|z_{n+1} - z_n|\langle\varepsilon$.

З (2.4) випливає, що на кожній ітерації об’єм розрахунків в методі дотичних більший, ніж в розглянутих раніше методах, оскільки необхідно знаходити не тільки функції $f(x)$, але й її похідні. Але швидкість збіжності тут значно вища, ніж в інших методах.

Хід роботи

1. Відокремити корені даного рівняння $f(x) = 0$ одним з методів: графічним, аналітичним або методом послідовного перебору (відрізок ізоляції кореня бажано звузити до довжини, яка не перевищує одиниці).

2. Уточнити один з відокремлених коренів рівняння, вказаним в Табл.1., методом з точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Таблиця 2.1 – Варіанти завдання для виконання лабораторної роботи

Варіант	Рівняння	Метод
1.	$2^x + 5x - 3 = 0$	хорд
2.	$\ln(1{,}5x) - 1{,}7x + 3 = 0$	ділення відрізку навпіл
3.	$x^3 - 3x^2 + 2{,}5 = 0$	дотичних
4.	$x^2 + 4\sin x = 0$	хорд
5.	$\sin x - x - \ln(1 + x) + 1 = 0$	хорд
6.	$x^3 - 3x^2 - 3{,}5 = 0$	ділення відрізку навпіл
7.	$x^2 + 20\sin x = 0$	хорд
8.	$2 - x - \ln x = 0$	хорд
9.	$- \cos x - 1 = 0$	ділення відрізку навпіл
10.	$x^2 - \ln(1 + x) - 3 = 0$	дотичних
11.	$2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$	хорд
12.	$2e^x + 2x - 3 = 0$	хорд
13.	$x\sqrt{x+1} - 1 = 0$	ділення відрізку навпіл
14.	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$	дотичних
15.	$\mathrm{ctg}\, x - 0{,}5x = 0$	хорд
16.	$2\sin(x - 0{,}6) + x - 1{,}5 = 0$	ділення відрізку навпіл
17.	$2^x(x - 2)^2 - 1 = 0$	хорд
18.	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$	дотичних
19.	$x^3 - \sin x = 0$	хорд
20.	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$	хорд
21.	$3\sin\sqrt{x} + 0{,}35x - 3{,}8 = 0$	хорд
22.	$x^2 - \cos x = 0$	ділення відрізку навпіл

23.	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$	ділення відрізку навпіл
24.	$3^x + 5x - 2 = 0$	хорд
25.	$(x - 3)\cos x - 1 = 0$	хорд
26.	$x - (3 + \sin 3{,}6x)^{-1} = 0$	дотичних
27.	$x^2 + 4x - 6 = 0$	хорд
28.	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$	ділення відрізку навпіл
29.	$x - \sqrt{\ln(x+2)} = 0$	ділення відрізку навпіл
30.	$2x\sin x - \cos x = 0$	ділення відрізку навпіл

Контрольні запитання

1. Які методи розв’язку нелінійних рівнянь вам відомі?
2. В яких випадках необхідно використовувати ітераційні методи?
3. Яким умовам повинна відповідати функція $f(x)$?
4. Що значить розв’язати рівняння ітераційним методом?
5. З яких етапів складається задача знаходження нуля функції $f(x)$ ітераційним методом?
6. Назвіть способи відокремлення коренів?
7. В чому сутність ітераційного процесу?
8. В чому сутність методу половинного поділу?
9. В чому сутність методу хорд?
10. Який з кінців відрізку $[a, b]$ в методі хорд рахується нерухомим?
11. Умова закінчення ітераційного процесу в методі хорд?
12. В чому сутність методу Ньютона?
13. Як вибрати початкове наближення для методу Ньютона?
14. Як в MatLab організувати ітераційний процес?
15. Що впливає на швидкість збіжності ітераційного процесу?

Лабораторна робота № 3

Інтерполювання функцій

Мета роботи: навчитися застосовувати локальне (лінійне та параболічне) та глобальне (за допомогою поліномів Лагранжа та Ньютона) інтерполювання для апроксимації функцій.

Теоретичні відомості

Задача інтерполяції функції формулюється наступним чином. Нехай на сегменті $[a,b]$ задані значення функції $f(x)$в точках x_j, $j=\overline{0,n+1}$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = b.$$

Необхідно відшукати многочлен (поліном) $P(x)$ не вище заданого степеня m, який при значеннях аргументу $x = x_j$, $j=\overline{0,n+1}$, що називаються **вузлами інтерполяції**, приймав тіж значення, що і дана функція $f(x)$, тобто

$$f(x_j) = P(x_j), \quad j=\overline{0,n+1}.$$

Многочлен (поліном) $P(x)$ називається **інтерполяційним многочленом** (**інтерполяційним поліномом**), інтерполюючий функцію $f(x)$ в даних вузлах інтерполяції.

Лінійна інтерполяція

В якості інтерполяційного полінома використовується інтерполяційний многочлен першої степені $P(x) = ax + b$.

Розглянемо інтерполюючу функцію $y = f(x)$ в інтервалі $(x_j < x < x_{j+1})$ Нехай її можна замінити в даному інтервалі (x_j, x_{j+1}), з достатньою точністю хордою. Рівняння хорди, яка проходить через точки (x_j, y_j) і (x_{j+1}, y_{j+1}) має вигляд

$$\frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}. \tag{3.1}$$

За формулою (3.1) можна розрахувати значення хорди в точці x у інтервалі (x_j, x_{j+1}), тобто розрахувати наближені значення функції $f(x)$ в інтервалі $\lfloor x_j, x_{j+1} \rfloor$.

Параболічна інтерполяція

За інтерполяційну функцію на відрізку $\lfloor x_{j-1}, x_{j+1} \rfloor$ приймається квадратний тричлен. Рівняння квадратного тричлена $P(x) = ax_j{}^2 + bx_j + c$, $\quad x_j - 1 \le x \le x_{j+1}$ має три невідомих коефіцієнти a,b,c. Їх знаходять з системи рівнянь

$$\begin{cases} ax_{j-1}^2 + bx_{j-1} + c = y_{j-1} \\ ax_j^2 + bx_j + c = y_j \\ ax_{j+1}^2 + bx_{j+1} + c = y_{j+1} \end{cases}$$

Таким чином, інтерполяція для будь-якої точеи проводиться за трьома ближніми до неї вузлами.

Інтерполяційний поліном Лагранжа

Якщо задано значення функції $f(x)$ у вузлах інтерполяції $\{x_j : \quad j=\overline{0,n}\}$, то інтерполяційний поліном Лагранжа для відновлення даної функції $f(x)$ буде мати вид

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\ldots(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot(x_j-x_1)\cdot(x_j-x_2)\ldots(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}.$$

Якщо продовжити інтерполяцію відомої функції $f(x)$ інтерполяційним поліномом Лагранжа, то можна ввести поняття оцінки похибки інтерполяції. Величина

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$$

називається залишковим членом інтерполяції. При умові, що $f(x)$ диференційовна $n+1$ роду, модульне значення $R_n(x)$ є обмеженим, а саме

$$|R_n(x)|\le M_{n+1}(\alpha;\beta)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!},$$

де

$$M_{n+1}(\alpha;\beta)=\max_{\alpha\le x\le\beta}\left|f^{(n+1)}(x)\right|,$$

а α і β найменше і найбільше з $n+2$ чисел

$$x_j \quad (j=0,1,2,\ldots n) \text{ і } x.$$

Якщо розглядати значення функції інтерполяційного поліному Лагранжа в точці x, що не належить ні одному з відрізків $[x_0,x_1)$, $[x_1,x_2)$, ..., $[x_{n-1},x_n]$, то таку задачу називають задачею екстраполяції.

Інтерполяційний поліном Ньютона

Нехай задано значення функції $f(x)$ у вузлових точках $\{x_j : \quad j=\overline{0,n}\}$. Будемо розглядати таке сімейство вузлових точок $\{x_j : \quad j=\overline{0,n}\}$ віддаль між якими одинакова і рівна h тобто

$$x_{j+1}-x_j=h,\quad j=\overline{0,n}.$$

Інтерполяційним поліном Ньютона записують у вигляді

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{\Delta f(x_0)}{h}(x-x_0)+$$

$$\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!\,h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots.+$$

$$+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}), \tag{3.2}$$

Формулу (3.2) називають інтерполяційним поліномом Ньютона для інтерполяції вперед, оскільки кінцеві різниці знаходяться із значень функції в лівому вузлі. Формула, де кінцеві різниці визначаються за допомогою правих вузлів називається формулою Ньютона для інтерполяції назад:

$$P_n(x) = f(x_n) + \frac{\Delta f(x_{n-1})}{h}(x - x_n) +$$

$$+ \frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1). \quad (4.3.4)$$

Хід роботи

1. За допомогою лінійної та параболічної інтерполяції знайти наближене значення функції, що задана таблично (таблиця 3.1), при $x1$.
2. Для таблично заданої функції побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа. Обчислити значення заданої функції в точці $x2$.
3. Обчислити значення заданої функції в точці $x3$, використовуючи інтерполяційний поліном Ньютона. Оцінити похибку результату.

Таблиця 3.1 – Варіанти завдання для виконання лабораторної роботи

i	Варіант / *x*(*i*)	1	2	3	4	5
0	0,1	0,0998334	0,995004	1,10517	0,904837	0,100167
1	0,5	0,479426	0,877583	1,64872	0,606531	0,521095
2	0,8	0,717356	0,696707	2,22554	0,449329	0,888106
3	1,3	0,963558	0,267499	3,6693	0,272532	1,69838
4	1,8	0,973848	-0,227202	6,04965	0,165299	2,94217
5	2,6	0,515501	-0,856889	13,4637	0,0742736	6,69473
x1 = 0,2, x2 = 1,4, x3 = 2,5						
i	Варіант / *x*(*i*)	6	7	8	9	10
0	0,1	0,0998334	0,995004	1,10517	0,904837	0,100167
1	0,6	0,564542	0,825336	1,82212	0,548812	0,636654
2	1,2	0,932039	0,362358	3,23012	0,301194	1,50946
3	1,8	0,973848	-0,227202	6,04965	0,165299	2,94217
4	2,6	0,515501	-0,856889	13,4637	0,0742736	6,69473
5	3	0,14112	-0,989992	20,0855	0,0497871	10,0179
x1 = 0,2, x2 = 1,5, x3 = 2,8						
I	Варіант / *x*(*i*)	11	12	13	14	15
0	0,3	0,29552	0,955336	1,34986	0,740818	0,30452
1	0,9	0,783327	0,62161	2,4596	0,40657	1,02652
2	1,5	0,997495	0,707372	4,48169	0,22313	2,12928
3	2	0,909297	-0,416147	7,38906	0,135335	3,62686
4	2,5	0,598472	-0,801144	12,1825	0,082085	6,0502
5	3,1	0,0415807	-0,999135	22,198	0,0450492	11,0765
x1 = 0,5, x2 = 1,7, x3 = 2,9						
i	Варіант / *x*(*i*)	16	17	18	19	20
0	1	0,841471	0,540302	2,71828	0,367879	1,1752

1	1,5	0,997495	0,0707372	4,48169	0,22313	2,12928
2	2,3	0,745705	-0,666276	9,97418	0,100259	4,93696
3	3	0,14122	-0,989992	20,0855	0,0497871	10,0179
4	3,6	-0,44252	-0,896758	36,5982	0,273237	18,2855
5	4,5	-0,97753	-0,210796	90,0171	0,011109	45,003
x1 = 1,2, x2 = 2,7, x3 = 4,3						
i	Варіант / *x*(*i*)	21	22	23	24	25
0	1	0,841471	0,540302	2,71828	0,367879	1,1752
1	1,6	0,999574	-0,0291995	4,95303	0,201897	2,37557
2	2,5	0,598472	-0,801144	12,1825	0,082085	6,0502
3	3,1	0,0415807	-0,999135	22,198	0,0450492	11,0765
4	3,8	-0,61858	-0,790968	44,7012	0,0223708	22,3364
5	4,5	-0,97753	-0,210769	90,0171	0,11109	45,003
x1 = 1,3, x2 = 2,7, x3 = 4,3						
i	Варіант / *x*(*i*)	26	27	28	29	30
0	1	0,841471	0,540302	2,71828	0,367879	1,1752
1	1,5	0,997495	0,0707372	4,48169	0,22313	2,12928
2	2,4	0,675463	-0,737394	11,0232	0,090718	5,46623
3	3	0,14112	-0,989992	20,0855	0,0497871	10,0179
4	3,9	-0,687766	-0,725932	49,4024	0,0202419	24,6911
5	4,5	-0,97753	-0,210796	90,0171	0,011109	45,003
x1 = 1,2, x2 = 2,8, x3 = 4,3						

Контрольні запитання

1. Що розуміють під "інтерполюванням" функції?
2. Постановка задачі інтерполяції.
3. Лінійна та параболічна інтерполяція.
4. Що таке "поліноміальне" інтерполювання? За допомогою яких методів можна здійснювати поліноміальне інтерполювання? Коли його застосовують?
5. Інтерполяційний поліном Лагранжа.
6. Інтерполяційний поліном Ньютона.
7. Похибка інтерполяції.
8. Які засоби інтерполювання і апроксимування функцій є у сучасних мовах програмування?
9. Як здійснюється інтерполювання таблично заданої функції у системі MatLAB?

Лабораторна робота № 4

Оцінювання параметрів лінійної регресії методом найменших квадратів

Мета роботи: навчитися підбирати емпіричні формули за допомогою методу найменших квадратів.

Теоретичні відомості

Предметом регресійного аналізу є математичне моделювання залежності результативної ознаки від факторних ознак з наступним статистичним аналізом моделі. Математична модель регресії – це аналітичний вираз для рівняння регресії. Вибір математичної моделі регресії визначається формою емпіричної лінії регресії та попередніми дослідженнями, професійною інтуїцією, що базується на знаннях фізичної сутності досліджуваного явища.

Нехай кореляційний зв'язок між досліджуваною ознакою та фактором *X* описується лінійним рівнянням регресії. Для кожного запланованого вимірювання на певному рівні фактора можна записати рівняння

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i, \tag{4.1}$$

де E_i – випадкова похибка *i*-го вимірювання.

На випадкові похибки накладаються такі умови: $\mathrm{E}(E_i)=0$ – випадкова похибка є центрованою випадковою величиною; $\mathrm{D}(E_i)=\sigma^2$ – дисперсія не залежить від значень факторної ознаки; послідовні значення незалежні (автокореляція відсутня).

Математичне сподівання запланованого вимірювання

$$E(Y_i) = E(Y \mid X = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i.$$

Дисперсія запланованого вимірювання дорівнює

$$D(Y_i) = D(Y \mid X = x_i) = D(E_i) = \sigma^2.$$

Дисперсія є однаковою на всіх рівнях факторної ознаки.

Лінійне рівняння регресії визначають за коефіцієнтами β_0 та β_1, які є невідомими. Оцінювання цих коефіцієнтів здійснюють на основі даних вибірки. Оцінку рівняння регресії представимо таким виразом:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x. \tag{4.2}$$

Відхилення фактичного значення результативної ознаки від визначеного рівнянням називають *залишковим відхиленням*

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_s. \tag{4.3}$$

Залишкові відхилення чисельно дорівнюють довжинам вертикальних відрізків, які з'єднують точки з лінією регресії. Величину

$$SS_e = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_0 - b_1 x_i\right)^2 \tag{4.4}$$

називають *сумою квадратів залишкових відхилень.*

Величини b_0 та b_1 визначають методом найменших квадратів (МНК). Суть МНК полягає в тому, що обирають лінію з такими значеннями коефіцієнтів b_0 та b_1, щоб сума квадратів залишкових відхилень була мінімальною.

Лінію регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ називають ще *лінією найменших квадратів.* Умова мінімальності визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial SS_e}{\partial b_0} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left(y_i - b_0 - b_1 x_i\right)(-1) = 0, \\ \dfrac{\partial SS_e}{\partial b_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left(y_i - b_0 - b_1 x_i\right)\left(-x_i\right) = 0. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Якщо розкрити дужки й спростити, то одержимо систему нормальних рівнянь для визначення параметрів b_0 та b_1:

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Розв'язок системи такий

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}; \qquad b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x}. \qquad (4.7)$$

Лінію найменших квадратів, можна записати у вигляді

$$y = \overline{y} + b_1\left(x - \overline{x}\right). \qquad (4.8)$$

Доведено, що параметри b_0 та b_1 є оптимальними точковими оцінками коефіцієнтів регресії.

В рівнянні (4.2) коефіцієнт b_1 називають *коефіцієнтом регресії.* Він показує середню зміну залежностої величини при зміні на одиницю незалежної величини. Коефіцієнт регресії завжди число імовірне. Якщо $b_1>0$, то зв'язок між y та x прямий, якщо $b_1<0$, то зв'язок обернений, якщо $b_1=0$, то зв'язку немає, тобто залежність між y та x функціональна. Коефіцієнт b_0 – *початок відліку*, тобто є значенням y, коли $x=0$.

2. Хід роботи

1. Звести задану таблично залежність до лінійної та провести регресійний аналіз. Для цього:

   1.1 визначити коефіцієнти b_0 та b_1 ;

   1.2 записати рівняння лінійної регресії.

2. Побудувати точки залежності значень x_i та y_i (згідно завдання), а також знайдене рівняння лінійної регресії на одному графіку.

Таблиця 4.1 – Варіанти завдання для виконання лабораторної роботи

Варіант		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	0,7	2,4	3	0,3	-0,8	7	1,42	1	7	0,5	1,05
2	0,9	2,7	3,5	0,4	0,6	4,1	0,76	1,05	6,5	0,5	1,09
3	1,1	2,9	4,1	0,5	1,6	2,6	0,52	1,09	6,14	0,6	1,12
4	1,3	3,1	4,8	0,6	2,4	1,5	0,4	1,12	5,87	0,6	1,15
5	1,5	3,3	5,6	07	3	0,8	0,32	1,15	5,66	0,7	1,17
6	1,7	3,4	6,5	0,9	3,6	0,3	0,27	1,17	5,5	0,8	1,19
7	1,9	3,6	7,6	1,1	4,1	-0,1	0,23	1,19	5,36	0,8	1,21
8	2,1	3,8	8,9	1,3	4,6	-0,4	0,2	1,29	5,25	0,9	1,22
9	2,3	3,9	10,5	1,6	5	-0,6	0,18	1,21	5,21	1	1,23
10	2,5	4	12,3	2	5,3	-0,8	0,16	1,22	2,15	1,1	1,25
11	2,7	4,2	14,4	2,4	5,7	-1	0,14	1,23	5,07	1,2	1,26
12	2,9	4,3	16,8	3	6	-1,1	0,13	1,25	5	1,3	1,26
13	3,1	4,4	19,7	3,6	6,3	-1,3	0,12	1,26	4,93	1,5	1,27
14	3,3	4,5	23	4,4	6,5	-1,4	0,11	1,26	4,88	1,6	1,28
15	3,5	4,6	27	5,4	6,7	-1,5	0,11	1,27	4,83	1,8	1,29

Продовження таблиці 4.1

Варіант		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
i	x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	1	2,4	3	0,3	-0,8	7	1,42	1	7	0,5	1,05
2	1.3	2,7	3,5	0,4	0,6	4,1	0,76	1,05	6,5	0,5	1,09
3	1.6	2,9	4,1	0,5	1,6	2,6	0,52	1,09	6,14	0,6	1,12
4	1.9	3,1	4,8	0,6	2,4	1,5	0,4	1,12	5,87	0,6	1,15
5	2.2	3,3	5,6	07	3	0,8	0,32	1,15	5,66	0,7	1,17
6	2.5	3,4	6,5	0,9	3,6	0,3	0,27	1,17	5,5	0,8	1,19
7	2.8	3,6	7,6	1,1	4,1	-0,1	0,23	1,19	5,36	0,8	1,21
8	3.1	3,8	8,9	1,3	4,6	-0,4	0,2	1,29	5,25	0,9	1,22
9	3.4	3,9	10,5	1,6	5	-0,6	0,18	1,21	5,21	1	1,23
10	3.7	4	12,3	2	5,3	-0,8	0,16	1,22	2,15	1,1	1,25
11	4	4,2	14,4	2,4	5,7	-1	0,14	1,23	5,07	1,2	1,26
12	4.3	4,3	16,8	3	6	-1,1	0,13	1,25	5	1,3	1,26
13	4.6	4,4	19,7	3,6	6,3	-1,3	0,12	1,26	4,93	1,5	1,27
14	4.9	4,5	23	4,4	6,5	-1,4	0,11	1,26	4,88	1,6	1,28
15	5.2	4,6	27	5,4	6,7	-1,5	0,11	1,27	4,83	1,8	1,29

Продовження таблиці 4.1

Варіант		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
i	x_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i	y_i
1	2	2,4	3	0,3	-0,8	7	1,42	1	7	0,5	1,05
2	2,5	2,7	3,5	0,4	0,6	4,1	0,76	1,05	6,5	0,5	1,09
3	3	2,9	4,1	0,5	1,6	2,6	0,52	1,09	6,14	0,6	1,12
4	3,5	3,1	4,8	0,6	2,4	1,5	0,4	1,12	5,87	0,6	1,15
5	4	3,3	5,6	07	3	0,8	0,32	1,15	5,66	0,7	1,17
6	4,5	3,4	6,5	0,9	3,6	0,3	0,27	1,17	5,5	0,8	1,19
7	5	3,6	7,6	1,1	4,1	-0,1	0,23	1,19	5,36	0,8	1,21
8	5,5	3,8	8,9	1,3	4,6	-0,4	0,2	1,29	5,25	0,9	1,22
9	6	3,9	10,5	1,6	5	-0,6	0,18	1,21	5,21	1	1,23
10	6,5	4	12,3	2	5,3	-0,8	0,16	1,22	2,15	1,1	1,25
11	7	4,2	14,4	2,4	5,7	-1	0,14	1,23	5,07	1,2	1,26
12	7,5	4,3	16,8	3	6	-1,1	0,13	1,25	5	1,3	1,26
13	8	4,4	19,7	3,6	6,3	-1,3	0,12	1,26	4,93	1,5	1,27
14	8,5	4,5	23	4,4	6,5	-1,4	0,11	1,26	4,88	1,6	1,28
15	9	4,6	27	5,4	6,7	-1,5	0,11	1,27	4,83	1,8	1,29

Контрольні запитання

1. Що розуміють під "апроксимуванням" функції? Коли його застосовують?
2. Метод найменших квадратів. Загальна постановка.
3. Метод найменших квадратів з лінійним базисом.
4. Метод найменших квадратів з поліноміальним базисом. Вигляд основної системи рівнянь.
5. Від яких чинників залежить точність апроксимування заданої (таблично) функції?

Лабораторна робота № 5

Чисельне інтегрування

Мета роботи: навчитися застосовувати методи чисельного інтегрування функцій для обчислення інтегралів.

Теоретичні відомості

Дамо означення інтегралу. Нехай на відрізку $[a,b]$ задана функція $y=f(x)$. За допомогою точок $x_0, x_1, ..., x_n$ розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n елементарних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,...,n)$, причому $x_0=a,\quad x_n=b$. На кожному з цих відрізків виберемо довільну точку ξ_i $(x_{i-1}\le \xi_i \le x_i)$ та знайдемо добуток s_i значення функції в цій точці $f(\xi_i)$ на довжину елементарного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$:

$$s_i = f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (6.1)$$

Складемо суму всіх таких добутків:

$$S_n = s_1 + s_2 + ... + s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (6.2)$$

Сума S_n називається інтегральною сумою. Означеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається границя інтегральної суми при необмеженому збільшенні кількості точок розбиття; при цьому довжина найбільшого з елементарних відрізків прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{mam\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (6.3)$$

В багатьох випадках, коли підінтегральна функція задана в аналітичному вигляді, означений інтеграл вдається визначити безпосередньо за допомогою невизначеного інтеграла (вірніше, первісної) за формулою Ньютона-Лейбніца. Вона полягає в тому, що означений інтеграл дорівнює приросту первісної $F(x)$ на відрізку інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (6.4)$$

Але на практиці цією формулою часто не можна скористатися за двома основними причинами:

1. вигляд функції $f(x)$ не дозволяє безпосереднього інтегрування, тобто первісну неможливо виразити через елементарні функції.
2. значення функції $f(x)$ задані лише на фіксованій скінченій множині точок x_i, тобто функція задана у вигляді таблиці.

У цих випадках використовують методи чисельного інтегрування. Вони основані на апроксимації підінтегральної функції деяким більш простішим виразом, наприклад многочленами.

Метод прямокутників

Найпростішим методом чисельного інтегрування є метод прямокутників. В ньому здійснюється заміна означеного інтеграла інтегральною сумою (6.2). За точки ξ_i можуть вибиратися ліві ($\xi_i = x_{i-1}$) або праві ($\xi_i = x_i$) границі елементарних відрізків. Позначивши $f(x_i) = y_i$, $\Delta x_i = h_i$, отримаємо наступні формули метода прямокутників відповідно до цих двох випадків:

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_0 + h_2 y_1 + ... + h_n y_{n-1}, \qquad (6.5)$$

$$\int_a^b f(x)dx = h_1 y_1 + h_2 y_2 + ... + h_n y_n. \qquad (6.6)$$

Широко поширеним та найбільш точним є вигляд формули прямокутників, що використовує значення функції в середніх точках елементарних відрізків (метод середніх прямокутників):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right), \qquad (6.7)$$

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} - x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, \quad i = 1,2,...,n.$$

Важливим частинним випадком розглянутих формул є їх застосування при чисельному інтегруванні з постійним кроком $h_i = h = const$ $(i = 1,2,...,n)$. Формула середніх прямокутників в цьому випадку приймають відповідно вигляд

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}). \qquad (6.8)$$

Метод трапецій

Метод трапецій використовує лінійну інтерполяцію, тобто графік функції $y = f(x)$ подається у вигляді ламаної, що з'єднує точки (x_i, y_i). В цьому випадку площа всієї фігури (криволінійної трапеції) складається з площ елементарних прямолінійних трапецій. Площа кожної такої трапеції рівна:

$$s_i = \frac{y_{i-1} - y_i}{2} h_i, \quad i = 1,2,...,n.$$

Додаючи всі ці рівності, отримуємо формулу трапецій для чисельного інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i). \qquad (6.9)$$

Для $h_i = h = const$ $(i = 1,2,...,n)$ формула (5.9) набуде вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \qquad (6.10)$$

Метод парабол (метод Сімпсона)

Розіб'ємо відрізок інтегрування $[a,b]$ на парне число рівних частин з кроком h. На кожному відрізку $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ... , $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, ... ,

$[x_{n-2}, x_n]$ підінтегральну функцію $f(x)$ замінимо інтерполяційним многочленом другого степеня:

$$f(x) \approx \phi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i,$$
$$x_{i-1} \le x \le x_{i+1}.$$

Коефіцієнти цих квадратних тричленів можуть бути знайдені з умов рівності многочлена в точках x_i відповідним табличним даним y_i. За $\phi_i(x)$ можна прийняти інтерполяційний многочлен Лагранжа другого степеня, що проходить через точки (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}):

$$\phi_i(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} y_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} y_{i+1}.$$

Елементарна площа s_i може бути знайдена за допомогою означеного інтеграла. Враховуючи рівність $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = h$, отримаємо

$$s_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)dx = \frac{1}{2h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [(x - x_i)(x - x_{i+1})y_{i-1} - 2(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})y_i + (x - x_{i-1})(x - x_i)y_{i+1}]dx =$$
$$= \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

Провівши такі розрахунки для кожного елементарного відрізку $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, просумуємо отримані вирази:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Дані вирази для S приймається за значення означеного інтегралу:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n]. \quad (6.11)$$

Отримане співвідношення називається формулою Сімпсона.

Блок-схема обчислення інтегралу за методом Сімпсона представлена на рисунку 6.1. В якості вихідних даних задаються границі відрізку інтегрування a, b, похибка ε, а також формула обчислення значень підінтегральної функції $y = f(x)$. Спочатку відрізок $[a,b]$ розбивається на чотири частини з кроком $h = \dfrac{b-a}{4}$. Обчислюється значення інтегралу I_1. Потім кількість кроків подвоюється, обчислюється значення I_2 з кроком $\dfrac{h}{2}$. Умова закінчення обрахунку приймається у вигляді $|I_1 - I_2| < \varepsilon$. Якщо ця умова не виконується, відбувається новий поділ кроку навпіл й т.д.

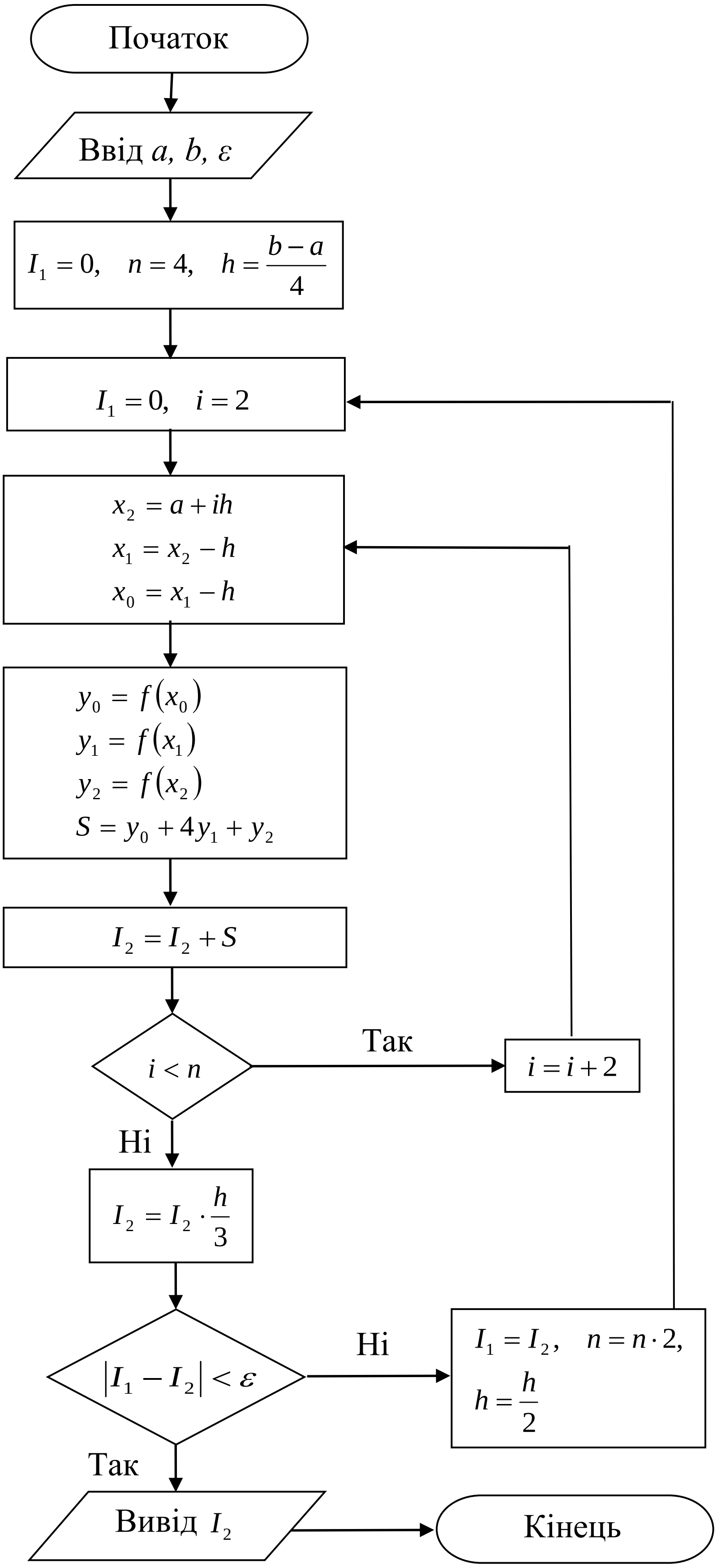

Рисунок 6.1 – Блок-схема обчислення інтегралу за методом Сімпсона

Хід роботи

1. За формулою середніх прямокутників, формулами трапецій та парабол обчислити значення інтеграла за вказаним розбиттям відрізка інтегрування *[a,b]* на N_0 рівних частин. Обчислити точнее значення інтегралу за допомогою формули Ньютона-Лейбніца. Порівняти між собою отримані результати.

2. Оцінити залишковий член для методу середніх прямокутників за формулою:

$$|R_2(f)| < h^2 \frac{b-a}{24} M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$$

де

$$M_2 = \max_{[a;b]} |f''(x)|$$

3. За формулою

$$\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2} < \varepsilon \Leftarrow\Rightarrow n > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}}$$

із точністю $\varepsilon>0$ знайти значення n і обчислити наближене значення інтеграла для $N>n$ (N вибрати так, якщо це дозволяють умови задачі, щоб $(b-a)$ ділилося на нього точно).

Таблиця 6.1 – Варіанти завдання для виконання лабораторної роботи

Варіант	$F(x)$	a	b	N_0	ε
1	$e^x cosx$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
2	$x^2 e^{-x}$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
3	$x^2 arctgx$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
4	$e^{sinx} sinx$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
5	$e^x/(1+x)$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
6	$e^{cosx}(1+x)$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
7	$(1+x^2)e^{arctgx}$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
8	$Xsinx^2$	0	1	6	$0.5 \cdot 10^{-8}$
9	$5xsinx^2$	0	2	10	$0.5 \cdot 10^{-8}$
10	$3xcosx^3$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
11	$(1+x^2)e^{arctgx}$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
12	$e^x cosx$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
13	$x^2 e^{-x}$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
14	$x^2 arctgx$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
15	$e^{sinx} sinx$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
16	$e^x/(1+x)$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$
17	$e^{cosx}(1+x)$	0	1	5	$0.5 \cdot 10^{-8}$

18	$(1+x^2)e^{arctgx}$	0	1	5	$0.5\cdot 10^{-8}$
19	$6xsinx^3$	0	2	10	$0.5\cdot 10^{-8}$
20	$e^{-x}/(1+x)$	0	2	10	$0.5\cdot 10^{-8}$
21	$Arctgx/(1+x)$	0	1	10	$0.5\cdot 10^{-8}$
22	xln^2x	2	3	8	$0.5\cdot 10^{-8}$
23	$e^{cosx}(1+x)$	0	1	5	$0.5\cdot 10^{-8}$
24	$(1+x^2)e^{arctgx}$	0	1	5	$0.5\cdot 10^{-8}$
25	$xsinx^2$	0	1	6	$0.5\cdot 10^{-8}$
26	$5xsinx^2$	0	2	10	$0.5\cdot 10^{-8}$
27	$3xcosx^3$	0	1	5	$0.5\cdot 10^{-8}$
28	$(1+x^2)e^{arctgx}$	0	1	5	$0.5\cdot 10^{-8}$
29	e^xcosx	0	1	5	$0.5\cdot 10^{-8}$
30	x^2e^{-x}	0	1	5	$0.5\cdot 10^{-8}$

Контрольні запитання

1. Суть методу прямокутників. Геометрична інтерпретація. Порядок похибки.
2. Суть методу трапецій. Геометрична інтерпретація. Порядок похибки.
3. Суть методу парабол. Геометрична інтерпретація. Порядок похибки.
4. Побудуйте блок-схеми методів прямокутників та трапецій.

Лабораторна робота № 6

Чисельне диференціювання

Мета роботи: навчитися застосовувати методи чисельного диференціювання функцій для обчислення похідних функцій.

Теоретичні відомості

Задача чисельного диференціювання ставиться так. Заданий масив (вектор) значень x_i функції $x(t)$, виміряних (можливо, з похибками) за значень t_i аргументу, заданих іншим вектором. Треба обчислити (оцінити якомога точніше) чисельне значення похідної від $x(t)$ у деякій точці усередині заданого діапазону змінювання аргументу.

Очевидно, цю задачу можна розв'язати лише за умови проведення через задані точки неперервної (або диференційовної) кривої. Тільки у цьому випадку задача відшукання похідної стає визначеною. Тому чисельне диференціювання тісно пов'язане з наближенням (інтерполюванням).

Найпростіший (і найменш точний) варіант відшукання похідної всередині інтервалу $t_i \le t \le t_{i+1}$ - використання поліноміальної *інтерполяції за двома точками*.

Для цього спочатку здійснюється *лінійна інтерполяція* кривої за двома точками - (x_i, t_i) і (x_{i+1}, t_{i+1}). В результаті одержується рівняння прямої, що проходить через ці точки:

$$X(t) = x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i).$$

Якщо узяти похідну від цієї функції, одержимо:

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

Як бачимо, у цьому випадку *похідна в усьому діапазоні* $t_i \le t \le t_{i+1}$ *є однією й тією самою величиною*

$$\frac{dX}{dt}(t_i) = \frac{dX}{dt}(t_{i+1}) = \frac{dX}{dt}(t_i \le t \le t_{i+1}) = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} + \frac{h}{2} X''(\xi).$$

Тут h - крок змінювання аргументу.

Перейдемо до побудови формул за трьома точками.

Тепер через три точки проводиться інтерполююча парабола

$$X(t) = x_i + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2.$$

З умови проходження цієї параболи через другу та третю точки одержуються значення коефіцієнтів a_1 та a_2. В результаті рівняння параболи набуде, за умови рівновіддаленості сусідніх точок за аргументом, вигляду

$$X(t) = x_i + \frac{4x_{i+1} - 3x_i - x_{i+2}}{2h}(t - t_i) + \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{2h^2}(t - t_i)^2.$$

Похідна від цієї параболи є наступною функцією аргументу

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{4x_{i+1} - 3x_i - x_{i+2}}{2h} + \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^2}(t - t_i) \ .$$

Тепер можна записати формули для визначення похідної:

- у першій точці

$$\frac{dX}{dt}(t_i) = \frac{4x_{i+1} - 3x_i - x_{i+2}}{2h} + \frac{h^2}{3} X'''(\xi);$$

- у другій точці

$$\frac{dX}{dt}(t_{i+1}) = \frac{x_{i+2} - x_i}{2h} - \frac{h^2}{6} X'''(\xi);$$

- у третій точці

$$\frac{dX}{dt}(t_{i+2}) = \frac{x_i - 4x_{i+1} + 3x_{i+2}}{2h} + \frac{h^2}{3} X'''(\xi).$$

Тут другі складові формул дають змогу оцінити величини похибок, що вносяться у визначення відповідної похідної за відповідною формулою. При цьому ξ - деяке значення аргументу всередині інтервалу.

Інтерполювання по трьох точках дозволяє також обчислити й другу похідну всередині даного інтегралу. Для цього досить узяти похідну від першої похідної

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t) = \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^2} \ .$$

Друга похідна у цьому випадку є однаковою в усіх точках інтервалу, але похибка визначення в усіх точках є різною:

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t_i) = \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^2} - hX'''(\xi);$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t_{i+1}) = \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^2} - \frac{h^2}{12} X^{IV}(\xi);$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t_{i+1}) = \frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^2} + hX'''(\xi).$$

Аналогічно виводяться формули чисельного диференціювання по чотирьох точках:

- у першій точці

$$\frac{dX}{dt}(t_i) = \frac{-11x_i + 18x_{i+1} - 9x_{i+2} + 2x_{i+3}}{6h} + \frac{h^3}{4} X^{IV}(\xi);$$

- у другій точці

$$\frac{dX}{dt}(t_{i+1}) = \frac{-2x_i - 3x_{i+1} + 6x_{i+2} - x_{i+3}}{6h} + \frac{h^3}{12} X^{IV}(\xi);$$

- у третій точці

$$\frac{dX}{dt}(t_{i+2}) = \frac{x_i - 6x_{i+1} + 3x_{i+2} + 2x_{i+3}}{6h} - \frac{h^3}{12} X^{IV}(\xi);$$

- у четвертій точці

$$\frac{dX}{dt}(t_{i+3}) = \frac{-2x_i + 9x_{i+1} - 18x_{i+2} + 11x_{i+3}}{6h} + \frac{h^3}{4} X^{IV}(\xi).$$

Другі похідні у цьому випадку визначаються співвідношеннями:

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t_i) = \frac{2x_i - 5x_{i+1} + 4x_{i+2} - x_{i+3}}{h^2} + \frac{11h^2}{12} X^{IV}(\xi);$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t_{i+1}) = \frac{x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}}{h^2} - \frac{h^2}{12} X^{IV}(\xi);$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t_{i+2}) = \frac{x_{i+1} - 2x_{i+2} - x_{i+3}}{h^2} - \frac{h^2}{12} X^{IV}(\xi);$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t_{i+3}) = \frac{-x_i + 4x_{i+1} - 5x_{i+2} + 2x_{i+3}}{h^2} + \frac{11h^2}{12} X^{IV}(\xi).$$

Як випливає з наведених формул, зі зменшенням величини кроку h для досить гладких функцій величина залишкового члену, тобто похибка методу, зменшується. При цьому значення похідних є більш точними у вузлах, що розташовані усередині рівномірної сітки.

Але якщо значення x_i відомі не точно (з похибками вимірювання), то *обчислювальна похибка*, як це випливає з одержаних формул, навпаки, *збільшується зі зменшенням кроку і ростом порядка похідної*. Отже, *чисельне диференціювання є* за своєю природою *нестійкою процедурою*.

Якщо абсолютна похибка вимірювання ε є відомою, можна для конкретної формули чисельного диференціювання вказати оптимальну величину кроку, за якої сумарна похибка визначення похідної є мінімальною.

Наприклад, для формули (3) похибку метода можна оцінити так

$$\frac{h^2}{6} M; \qquad \text{де } M = \max_{t_i \le t \le t_{i+2}} |X'''(t)|.$$

Похибка, спричинена похибкою вимірювання, у відповідності з тією ж формулою, дорівнюватиме $\frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h}$. Оптимальний крок досягається при такому значенні кроку, коли ці два види похибок дорівнюють один одному:

$$\frac{h^2}{6} M = \frac{\varepsilon}{h},$$

тобто при

$$h_{опт} = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M}}.$$

Сумарна похибка при цьому оптимальному кроці дорівнюватиме

$$(\Delta_{X'})_{\min} = 2\frac{\varepsilon}{h_{опт}} = 2\varepsilon\sqrt[3]{\frac{M}{6\varepsilon}}.$$

У випадку, коли потрібно знайти похідну не в одній точці, а у всіх багатьох виміряних точках, тобто коли потрібно одержати криву залежності похідної від аргументу у заданому діапазоні, раціональніше користуватися сплайновою кубічною інтерполяцією. Бажана функція похідної одержуватиметься як похідна від сплайна.

Хід роботи

Обчислити значення першої та другої похідних функції $f(x)$ в точці $X = c$:

- за допомогою операторів диференціювання MatLab;
- методом невизначених коефіцієнтів для чисельного диференціювання. Обчислити функцію $f(x)$ таблично, знайшовши значення $y_i = f(x_i)$ в точках $x_i = c + h/ i$, $i = 0, 1, ..., 10$, $h = 0.01$ на відрізку $[c, d]$.

Варіанти завдань взяти згідно таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Варіанти завдання для виконання лабораторної роботи

№ варианта	$f(x)$	$[a, b]$	$[c, d]$
1	$1/(\mathrm{tg}2x+1)$	[0.4, 0.8]	[2, 2.1]
2	$\cos 3x/(1-\cos 3x)\ 2$	[0.8, 1.6]	[-1, -0.9]
3	$1/(x\sqrt{x^3+4})$	[0.18, 0.98]	[0.5, 0.6]
4	$\sin x/(1+\sin x)$	[0.8, 1.6]	[2, 2.1]
5	$x^2\ \ \lg(x+2)$	[0, 0.4]	[1.5, 1.6]
6	$x^2\ \ \mathrm{arctg}(x/3)$	[0.8, 1.6]	[1, 1.1]
7	$e^{2x}\sin 3x$	[0.4, 1.2]	[2, 2.1]
8	$\mathrm{ctg}2x/(\sin 2x)\ 2$	[0.8, 1.2]	[1, 1.1]
9	$(x + 1)\sin x$	[1, 5]	[1, 1.1]
10	$5x + x\lg x$	[0.2, 1]	[1.3, 1.4]
11	$(2x + 3)\sin x$	[0.4, 1.2]	[0.5, 0.6]
12	$\cos x/(2x+5)$	[0.4, 1.2]	[1, 1.1]
13	$1/(1 + x + x^2)$	[0, 4]	[2, 2.1]
14	$(1+x)/(2+x)$	[0.4, 0.8]	[1.5, 1.6]
15	$\sqrt{1+e^{-x}}$	[0.4, 1.2]	[0.5, 0.6]

Контрольні запитання

1. Чисельне диференціювання. Перша різницева похідна "вперед".
2. Чисельне диференціювання. Перша різницева похідна "назад".
3. Чисельне диференціювання. Перша центральна різницева похідна.
4. Чисельне диференціювання. Друга різницева похідна.

Лабораторна робота № 7

Чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної однокроковими методами. Розв'язок задачі Коші

Мета роботи: навчитися чисельно інтегрувати звичайне диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної однокроковим методом при розв'язанні задачі Коші.

Теоретичні відомості

Часто інженерні задачі зводяться до відшукання розв'язку певного диференціального рівняння (або системи таких рівнянь), який задовольняє певні початкові умови (задача Коші). Проінтегрувати таке рівняння аналітичними методами вдається не завжди. При цьому дістають здебільшого такий вираз, до якого шукана функція входить неявно, а тому користуватися ним незручно.

На практиці застосовують здебільшого наближене інтегрування диференціальних рівнянь. Воно дає змогу знайти наближений розв'язок задачі Коші або у вигляді певного аналітичного виразу (наприклад, ряду Тейлора), або у вигляді деякої таблиці значень.

ЗАДАЧА КОШІ. Нехай задано диференціальне рівняння першого порядку з відокремленою похідною

$$y' = f(x, y). \tag{7.1}$$

Необхідно знайти наближений розв'язок даного диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам, тобто при $x = x_0$ значення наближеного розв'язку $y(x_0) = y_0$, де x_0 та y_0 задані числа.

Геометрично це означає, що треба знайти ту інтегральну криву $y(x)$ рівняння (7.1), яка проходить через точки (x_0, y_0).

Метод Ейлера

Найпростішим чисельним методом розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння є метод Ейлера. Суть методу в тому, що на малому проміжку зміни аргументу

$$x_0 \le x \le x_0 + h = x_1$$

інтегральна крива диференціального рівняння

$$y' = f(x, y)$$

заміняється відрізком прямої (дотичної)

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Звідси $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ та такий процес можна повторювати так далі, тобто

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \tag{7.2}$$

де $x_k = x_0 + kh$, а h – крок дискретизації аргументу x.

Блок-схема алгоритму розв'язання задачі Коші методом Ейлера зображена на рисунку 7.1. Задаються початкові значення x_0, y_0, а також величина кроку h та кількість розрахункових точок k. Розв'язок отримується у вузлах $x+h$, $x+2h$, ..., $x+kh$. Вивід результатів передбачено на кожному кроці. Якщо знайдені значення необхідно зберігати в пам'яті машини, то необхідно ввести масив значень y_0, y_1, ..., y_k.

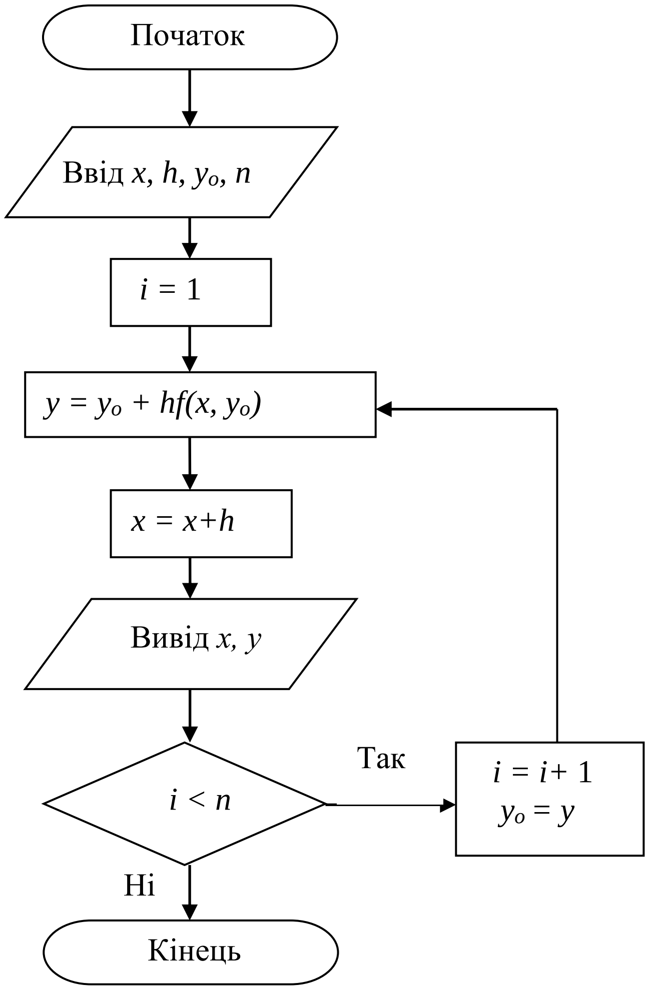

Рисунок 7.1 – Блок-схема алгоритму розв'язання задачі Коші методом Ейлера

Удосконалений метод Ейлера

В удосконаленому методі Ейлера спочатку за методом Ейлера обчислюють наближений розв'язок $y_{k+\frac{1}{2}}$ задачі (7.1) в точці $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h$:

$$y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{1}{2}hf\left(x_k, y_k\right), \tag{7.3}$$

а потім за формулою

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right) \tag{7.4}$$

наближений розв'язок y_{k+1} у точці x_{k+1}; на кожному кроці інтегрування праву частину рівняння (7.1) обчислюють двічі (у точках (x_k, y_k) та ($x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}$)).

Удосконалений метод Ейлера-Коші.

В цьому методі на кожному кроці інтегрування праву частину рівняння (7.1) обчислюють двічі: спочатку за методом Ейлера обчислюється наближене значення шуканого розв'язку $\tilde{y}_{k+1}$ у точці x_{k+1}

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \tag{7.5}$$

яке потім уточнюється за формулою

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})). \tag{7.6}$$

Оцінка похибки наближеного розв'язку задачі Коші

Для оцінки похибки наближений розв'язок задачі Коші (1) у кожній вузловій точці обчислюють двічі: з кроком h та $h/2$. Позначають їх відповідно y_k та y_k. Десяткові розряди наближень y_k та y_k, які збігаються між собою, вважають точними цифрами наближеного розв'язку в точці x_k.

Оцінка похибки методу визначається за формулою

$$\varepsilon_k = y_k - y(x_k), \tag{7.7}$$

де $y(x_k)$ – точний розв'язок задачі у вузловій точці x_k.

Щоб вивести таку оцінку похибки, припустимо, що виконуються такі умови:

1. на кожному кроці інтегрування h похибка методу приблизно пропорційна $h^{s+1}(s \geq 1)$, де s – порядок точності методу;
2. похибка методу на кожному кроці інтегрування однакова;
3. на кожному наступному кроці інтегрування сумарна похибка методу включає також усі похибки, зроблені на попередніх кроках. Тому, якщо $y_1 - y(x_1) = Mh^{s+1}$, де M – невідомий коефіцієнт пропорційності, то

$$y_2 - y(x_2) = 2Mh^{s+1},$$
$$y_3 - y(x_3) = 3Mh^{s+1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n - y(x_n) = nMh^{s+1}.$$

Отже, для похибки в точці x_k при інтегруванні з кроком h маємо рівність

$$y_k - y(x_k) = kMh^{s+1}, \tag{7.8}$$

а при інтегруванні з кроком $h/2$ – рівність:

$$y_k - y(x_k) = 2kM\left(\frac{h}{2}\right)^{s+1}. \tag{7.9}$$

Віднявши почленно (7.9) від рівності (7.8) та розв'язавши отриману рівність відносно невідомого коефіцієнта M, знайдемо

$$M = \frac{2^s(\tilde{y}_k - y_k)}{kh^{s+1}(2^s - 1)}.$$

Підставивши ці значення (7.9), маємо

$$y_k - y(x_k) = \frac{\tilde{y}_k - y_k}{2^s - 1}.$$

Звідси для абсолютної похибки в точці остаточно дістанемо таку рівність:

$$|\varepsilon_k| = |y_k - y(x_k)| = \frac{|\tilde{y}_k - y_k|}{2^s - 1}. \qquad (7.10)$$

Хід роботи

3. Методом Ейлера, уточненим методом Ейлера та уточненим методом Ейлера-Коші на відрізку [x_0,b] знайти розв'язок задачі Коші: *y'=f(x,y), y(x₀)=y₀* з кроками *h=(b-x₀)/N* і *h/2* та визначити правильні цифри наближених розв'язків.
4. Порівняти розв'язки між собою.
5. Оцінити абсолютні похибки ров'язку кожного методу в будь-якій точці x_k є [x_0,b].

Таблиця 7.8 – Завдання для лабораторної роботи

Варіант	*f(x,y)*	x_0	b	y_0	*N*
1	$x+1+2y^2$	1	2	0.5	5
2	$1.4x-\sin(x+2y^2)$	1	2	1.2	5
3	$2x+\cos(x^2+y)$	2	3	1.4	5
4	$1.5y+\sin(y^2+1-0.7x)$	1	2	1.6	5
5	$\exp(-x-y)+0.5y^2$	0.5	1	2	5
6	$x+\sqrt{y^2+1.5x^2}$	0	1	0.5	5
7	$0.5x+\sqrt[3]{2x+y^3}$	0	1	0.4	5
8	$xy+\sqrt[3]{x^2+0.125y}$	0	1	1	5
9	$2x+\sqrt{1+y^2+x^2}$	0	1	2	5
10	$(1-y^2)\cos x+0.5xy$	0	1	0	5
11	$1+(1-x)\cos y-(2+x)y$	0	1	0	5
12	$y\cos^2(y-0.1x)+0.5(x^2+1)$	0	1	0	5
13	$\cos(0.5x+y)+x-y$	0	1	0	5
14	$\frac{\cos y}{1+x}+xy^2$	0	1	0	5
15	$\exp(-1-xy)+x^2+y$	0	1	0	5
16	$xy+\frac{1}{\sqrt{x+y}}$	1	2	1	5
17	$xy\ln(x-0.5)$	1	1.5	0.5	5
18	$2+0.1y\sin x-0.5y^2$	0	1	0	5

19	$xy + y^2 + \sin(2 - x)$	0	1	0.1	5
20	$x^2 + 0.1y^2 + \cos xy$	0	1	0.2	5
21	$xy + x^2 + \cos y$	0	1	0.3	5
22	$2\exp(-x^2 - 4x) - 2y(x - 2)$	1	3	10	5
23	$3\exp(-x^2 + 2x) - 3y(x - 3)$	1	4	10	5
24	$1 + x\ln y - y\ln x$	1	2	1	5
25	$(1 + y^2)\exp(-0.8x) + x$	0	1	0	5
26	$0.25\exp(-\cos(x+1)) - 2y(x-1)$	1	3	4	5
27	$1 + \frac{0.6y}{2 + x} - \sin(y + 2x + 0.5)$	0	1	0	5
28	$\sin^2(0.6x)\exp(-x^2 + 2x) - 2y(x - 2)$	1	5	8	5
29	$1 + y\sin x - 0.8y^2$	0	1	0	5
30	$\cos(0.8x)\exp(-x^2) - 4y(x - 3)$	1	5	8	5

Контрольні запитання

1. Постановка задачі Коші.
2. Метод Ейлера (метод Ейлера, удосконалений метод Ейлера, удосконалений метод Ейлера-Коші). Геометрична інтерпретація методу.
3. Метод складання початку таблиці.
4. Метод Бубнова-Гальоркіна
5. Формула Адамса.
6. Які функції MatLab використовуються для реалізації чисельного інтегрування звичайного диференціального рівняння першого порядку?

Лабораторна робота № 9

Розв’язання задачі лінійного програмування графічним методом

Мета роботи: отримати розв’язок задачі лінійного програмування з використанням графічного методу.

Теоретичні відомості

Математично в загальному вигляді задачі лінійного програмування формують так.

Задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{1n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{9.1}$$

та лінійну функцію (цільову функцію)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{9.2}$$

Треба знайти такий невід’ємний розв'язок системи (9.1), при якому лінійна функція (9.2) набуває найбільшого (найменшого) значення.

Система (9.1) може мати один невід'ємний розв'язок, не мати жодного невід'ємного розв'язку, або мати нескінченну множину невід’ємних розв’язків. Для останнього випадку задача лінійного програмування полягає в тому, щоб з цієї множини знайти той розв'язок, при якому цільова функція набуває максимуму (мінімуму).

Якщо кількість змінних цільової функції не перевищує трьох, то можна дати геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.

Нехай необхідно знайти мінімум або максимум лінійної функції:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{9.3}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{9.4}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{9.5}$$

Введемо на площині декартову прямокутну систему координат та співставимо кожній парі чисел (x_1, x_2) точку площини з координатами. Обмежуючі співвідношення (9.4) - (9.5) визначають на площині півплощини, що породжуються внаслідок розбиття площини лініями типу $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = \overline{i,m}.$

Щоб знайти розв’язок задачі лінійного програмування, треба спочатку знайти множину точок на площині, що задовольняють умови (9.4) - (9.5). Для цього в площині x_1Ox_2 проведемо прямі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m; \end{cases} \qquad (9.6)$$

Кожна пряма поділяє площину на дві півплощини. Щоб дізнатися, точки якої півплощини задовольняють нерівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$, необхідно в цю нерівність підставити координати точки О, тобто початку координат (x_1=0, x_2=0). Якщо координати цієї точки задовольняють нерівність, то нерівність будуть задовольняти всі точки півплощини, яка містить початок координат. Якщо координати цієї точки не задовольняють нерівність, то нерівність будуть задовольняти всі точки півплощини, яка не містить початку координат.

Нехай першу нерівність системи (9.4) задовольняють точки півплощини P_1, другу-точки півплощини P_2 й т. д., останню – точки півплощини P_m. Перетином півплощин $P_1, P_2, \dots, P_m$ є деяка опукла многокутна область К, множина точок якої є множиною розв'язків системи (9.4). Нехай К не є порожньою множиною. Множина точок, які задовільняють умові (9.5) утворює першу четверть площини x_1Ox_2. Тому множиною точок, які одночасно задовільняють умовам (9.4) - (9.5), є та частина області К, яка лежить у першій чверті площини x_1Ox_2. Позначимо цю площину буквою М. В загальному випадку М може бути або порожньою множиною, або опуклим многокутником, або необмеженою опуклою многокутною областю. В першому випадку умови задачі є суперечливими, задача не має розв'язку; в другому-завжди існують точки, в яких функція набуває мінімального та максимального значень; у третьому-лінійна функція на множині М, як правило є необмеженою або знизу, або зверху та знизу, тому ця функція може недосягати або максимуму, або мінімуму, або максимуму та мінімуму.

Геометричне місце точок, в яких лінійна функція (9.3) набуває фіксованого значення с, є прямою лінією, перпендикулярною до вектора N=(c_1,c_2), і визначається рівнянням: $c_2x_1 + c_2x_2 + c$

Надавши параметру с всіх можливих значень від $-\infty$ до ∞, одержимо сімейство паралельних прямих, які займуть всю площину. Перехід віл однієї прямої до іншої у напрямку вектора N веде до збільшення значення лінійної функції, у протилежному напрямку – до його зменшення.

Відкладемо в площині x_1Ox_2 вектор N з координатами x_1=c_1, x_2=c_2 та перетнемо область прямою l, перпендикулярно до вектора N (рисунок 9.1).

Щоб знайти точку області М, в якій лінійна функція досягає максимуму, зміщуємо пряму l паралельно самій собі у напрямку вектора N доти, доки пряма l не стане опорною до М (пряма називається опорною до опуклої області, якщо область лежить по один бік прямої та пряма має з нею хоча б одну спільну точку). Спільна точка l та М буде тією точкою, в якій досягається максимум лінійної функції. Для знаходження точки області М, де лінійна функція (3) досягає мінімуму, зміщуємо пряму l паралельно самій собі у протилежному напрямку доти, доки пряма l не стане опорною до М. Спільна точка l та М буде тією точкою, в якій досягається мінімум лінійної функції. Так на рисунку 9.1 лінійна функція досягає максимуму в точці A, а мінімуму – в точці B.

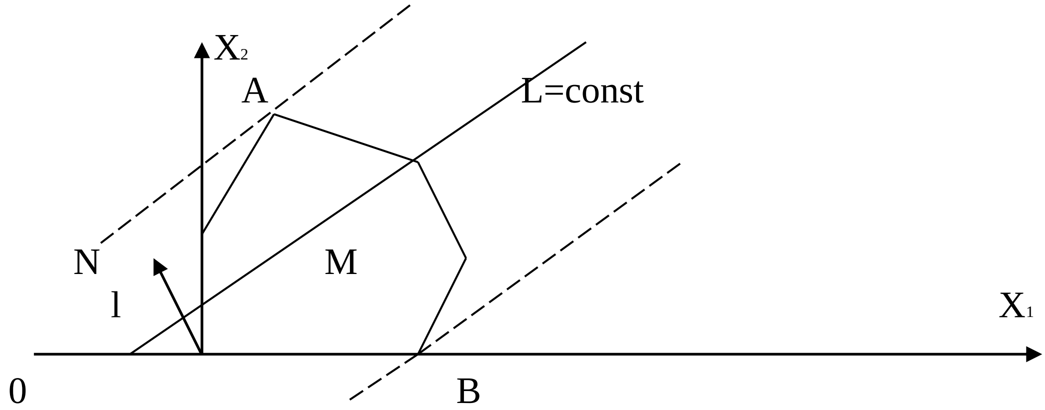

Рисунок 9.1

Якщо M – опуклий многокутник, то оптимальне значення лінійної функції завжди досягається в його вершині. Якщо оптимальне значення досягається в двох вершинах, то L набуває його в будь-якій точці, що лежить на відрізку, що з’єднує їх.

Якщо область M необмежена, то мінімум чи максимум лінійної функції може не досягатися, тобто при зміщенні прямої l у тому чи іншому напрямку весь час будуть траплятися точки області M.

Хід роботи

Розв’язати задачі (таблиця 9.1) або переконатися в неможливості знаходження їх розв'язку, виходячи з геометричної інтерпретації задачі лінійного програмування.

Таблиця 9.1 – Варіанти завдань для виконання лабораторної роботи

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$Z = x_1 + 2x_2 \to \max,$ $x_1 + x_2 \le 1,$ $x_1 - x_2 \le 1,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	16	$Z = -2x_1 + 5x_2 \to \min,$ $7x_1 + 2x_2 \ge 14,$ $5x_1 + 6x_2 \le 30,$ $3x_1 + 8x_2 \ge 24,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
2	$Z = x_1 + 2x_2 \to \max,$ $x_1 - x_2 \le 1,$ $x_1 - 2x_2 \le 1,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	17	$Z = x_1 - 10x_2 \to \min,$ $x_1 - \frac{1}{2}x_2 \ge 0,$ $x_1 - 5x_2 \ge -5,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

3	$Z = x_1 + x_2 \to \max,$ $x_1 + 2x_2 \le 1,$ $2x_1 + x_2 \le 1,$ $x_1 - x_2 \le 1,$ $x_1 - 2x_2 \le 1,$ $2x_1 - x_2 \le 1,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	18	$Z = x_1 + 4_2 \to \min,$ $x_1 - 5x_2 \le 3,$ $x_1 - x_2 \ge -1,$ $x_1 + x_2 \le 9,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
4	$Z = x_1 - x_2 \to \min,$ $x_1 + x_2 \le 1,$ $x_1 - 2x_2 \le 1,$ $2x_1 + 3x_2 \le 2,$ $3x_1 + 2x_2 \le 3,$ $x_1 + x_2 \ge 1/2,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	19	$Z = 2x_1 + 3_2 \to \max,$ $x_1 + x_2 \le 4,$ $6x_1 + 2x_2 \ge 8,$ $x_1 + 5x_2 \ge 4,$ $x_1 \le 3, \quad x_2 \le 3,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
5	$Z = x_1 + x_2 \to \min,$ $0 \le x_1 \le 1,$ $0 \le x_2 \le 2,$ $0 \le x_1 + x_2 \le 3,$ $-1 \le x_1 - x_2 \le 0.$	20	$Z = x_1 + 2_2 \to \min,$ $x_1 - 5x_2 \le 5,$ $x_1 - x_2 \ge -4,$ $x_1 + x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
6	$Z = x_1 - x_2 \to \max,$ $1 \le x_1 + x_2 \le 2,$ $2 \le x_1 - 2x_2 \le 3,$ $1 \le 2x_1 - x_2 \le 2,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	21	$Z = -2x_1 - 3x_2 \to \max,$ $2x_1 + x_2 \ge 2,$ $x_1 + 3x_2 \ge 3,$ $x_1 - x_2 \ge -1,$ $3x_1 - x_2 \le 6,$ $x_1 + x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
7	$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$ $-1 \le -x_1 + x_2 \le 1,$ $x_1 + 2x_2 \ge -1,$ $-x_1 + 2x_2 \le 2,$ $2x_1 - x_2 \le 2,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	22	$Z = -x_1 - x_2 \to \min,$ $3x_1 - 2x_2 \ge -15,$ $4x_1 - x_2 \ge 20,$ $3x_1 + x_2 \ge 30,$ $x_1 - 2x_2 \le 20,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
8	$Z = x_1 + x_2 \to \max,$ $2x_1 + x_2 \ge 1,$ $x_1 - x_2 \le 0,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	23	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$ $-x_1 + x_2 \le 2,$ $x_1 + x_2 \ge 3,$ $x_1 + 3x_2 - 12 \le 0,$ $4x_1 - x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

9	$Z = x_1 + 4x_2 \to \max,$ $x_1 - 5x_2 \le 3,$ $x_1 - x_2 \ge -1,$ $x_1 + x_2 \le 9,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	24	$Z = 2x_1 - 5x_2 \to \min,$ $4x_1 + 3x_2 \le 12,$ $3x_1 + 4x_2 \ge 24,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
10	$Z = 2x_1 + 3_2 \to \min,$ $x_1 + x_2 \le 4,$ $6x_1 + 2x_2 \ge 8,$ $x_1 + 5x_2 \ge 4,$ $x_1 \le 3, \quad x_2 \le 3,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	25	$Z = -2x_1 + 5x_2 \to \max,$ $7x_1 + 2x_2 \ge 14,$ $5x_1 + 6x_2 \le 30,$ $3x_1 + 8x_2 \ge 24,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
11	$Z = x_1 + 2_2 \to \max,$ $x_1 - 5x_2 \le 5,$ $x_1 - x_2 \ge -4,$ $x_1 + x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	26	$Z = x_1 - 10x_2 \to \min,$ $x_1 - \frac{1}{2} x_2 \ge 0,$ $x_1 - 5x_2 \ge -5,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
12	$Z = -2x_1 - 3x_2 \to \min,$ $2x_1 + x_2 \ge 2,$ $x_1 + 3x_2 \ge 3,$ $x_1 - x_2 \ge -1,$ $3x_1 - x_2 \le 6,$ $x_1 + x_2 \le 5,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	27	$Z = x_1 - x_2 \to \max,$ $x_1 + x_2 \le 1,$ $x_1 - 2x_2 \le 1,$ $2x_1 + 3x_2 \le 2,$ $3x_1 + 2x_2 \le 3,$ $x_1 + x_2 \ge \frac{1}{2},$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
13	$Z = -x_1 - x_2 \to \max,$ $3x_1 - 2x_2 \ge -15,$ $4x_1 - x_2 \ge 20,$ $3x_1 + x_2 \ge 30,$ $x_1 - 2x_2 \le 20,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	28	$Z = x_1 + x_2 \to \max,$ $0 \le x_1 \le 1,$ $0 \le x_2 \le 2,$ $0 \le x_1 + x_2 \le 3,$ $-1 \le x_1 - x_2 \le 0.$
14	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$ $-x_1 + x_2 \le 2,$ $x_1 + x_2 \ge 3,$ $x_1 + 3x_2 - 12 \le 0,$ $4x_1 - x_2 \le 8,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	29	$Z = x_1 - x_2 \to \min,$ $1 \le x_1 + x_2 \le 2,$ $2 \le x_1 - 2x_2 \le 3,$ $1 \le 2x_1 - x_2 \le 2,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

15	$Z = 2x_1 - 5x_2 \to \max,$ $4x_1 + 3x_2 \le 12,$ $3x_1 + 4x_2 \ge 24,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	30	$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \min,$ $-1 \le -x_1 + x_2 \le 1,$ $x_1 + 2x_2 \ge -1,$ $-x_1 + 2x_2 \le 2,$ $2x_1 - x_2 \le 2,$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Контрольні запитання

1. Математичне програмування. Основні класи задач математичного програмування.
2. Математичне програмування. Основні класи задач математичного програмування.
3. Зробіть постановку задачі лінійного програмування в канонічній формі.
4. Методи зведення задачі лінійного програмування в неканонічній формі до канонічної форми.
5. Допустима область розв’язків задачі лінійного програмування (графічна інтерпретація).
6. Суть графічного методу розв’язку задачі лінійного програмування.

Лабораторна робота № 10

Пошук початкового опорного плану

Мета роботи: знайти початковий опорний план симплекс-методу розв'язання задачі лінійного програмування.

Теоретичні відомості

Щоб застосувати симплекс-метод для знаходження оптимального розв'язку задачі лінійного програмування, треба знайти відправну точку – початковий опорний план. Якщо обмеження задачі лінійного програмування задано в канонічному вигляді

$$AX = A_0,\ A_0 \ge 0,\ X \ge 0 \qquad (10.1)$$

та серед векторів $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є одиничний базис, то початковим опорним планом буде вектор $X = (0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)$. У деяких випадках одиничний базис у системі обмежень (10.1) легко виділити. Наприклад, нехай маємо систему обмежень

$$\begin{cases} 3x_1 - x_4 - 2x_6 = 6, \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 = 8 \\ x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 5 \\ x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,\ldots,6). \end{cases}$$

Якщо перше рівняння системи поділити на 3, а друге – на 2, то дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_6 = 2, \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 4 \\ x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 5 \\ x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,\ldots,6). \end{cases}$$

У ній вектори A_1, A_2, A_3 утворюють одиничний базис та всі вільні члени додатні. Поклавши $x_4 = x_5 = x_6$, знайдемо опорний план $X = (2,4,5,0,0,0)$.

Якщо система (10.1) не містить у явному вигляді одиничного базису, то його у деяких випадках можна виділити методом повного виключення Гауса.

Якщо обмеження задачі лінійного програмування задано у вигляді нерівностей

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n \le A_0,\ A_0 \ge 0,\ X \ge 0 \qquad (10.2)$$

то, додавши до лівої частини кожної нерівності системи (10.2) по невід'ємній змінній $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$, дістанемо розширену систему лінійних обмежень

$$A_1x_1 + \ldots + A_nx_n + A_{n+1}x_{n+1} + \ldots + A_{n+m}x_{n+m} = A_0,\ A_0 \ge 0,\ X \ge 0 \qquad (10.3)$$

Змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ називають *додатковими змінними*. В лінійну функцію вони входять з нульовими коефіцієнтами. Отже, початкова задача лінійного програмування перетворилася у розширену: знайти оптимальне значення лінійної функції

$$L = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m}$$

за обмежень (10.2). Додаткові вектори $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$ утворюють одиничний базис m-вимірного векторного простору, а вектор $X = (x_1 = 0, \ldots, x_m = 0, x_{m+1} = b_1, \ldots, x_{n+m} = b_{n+m})$ є опорним планом розширеної задачі.

Зазначимо, що розв'язок розширеної задачі (якщо він існує) буде також розв'язком початкової задачі. Якщо розширена задача розв'язку не має, то не має розв'язку й початкова задача.

Застосовуючи симплексний метод до розширеної задачі, поступово замінюють у системі базисних векторів додаткові вектори $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$ векторами початкової системи обмежень. Якщо лінійна функція досягла свого оптимального значення, а в системі базисних векторів є хоча б один додатковий вектор, наприклад A_{n+i}, то це означає, що i-те обмеження в початковій задачі має смисл строгої нерівності. Отже, початкова задача матиме оптимальний розв'язок (якщо його має розширена задача) й тоді, коли не всі додаткові вектори виведено з базису.

Часто, виділивши з системи обмежень одиничний базис та базисний розв'язок, який йому відповідає, можна впевнитися, що знайдений розв'язок не є опорним планом системи обмежень, бо серед базисних змінних є й від'ємні. З метою цілеспрямованого пошуку опорного плану треба від знайденого одиничного базису перейти до іншого. Для цього застосовують метод *симплексного перетворення*. Оскільки симплексні перетворення виконують над векторами $A_1, A_2, \ldots, A_n$, A_0 системи обмежень, то ці вектори зведемо в таблицю 10.1.

Нехай вектор $A_0 \geq 0$, тобто всі $b_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$. Цього можна досягти, помноживши рівняння з від'ємними членами на -1. Тепер задача полягає в тому, щоб у таблиці 10.1 виділити одиничний базис, не порушивши невід'ємність компонент вектора A_0. Перетворюють таблицю за таким алгоритмом:

1. З неодиничних векторів $A_1, A_2, \ldots, A_n$ взяти той, у якого є хоча б один додатний елемент. Нехай таким вектором буде A_j. Якщо такого вектора в таблиці немає, то це означає, що система обмежень несумісна та процес симплексного перетворення завершено.
2. Знайти відношення θ_i елементів вектора A_0 до відповідних додатних елементів вектора A_j, записати їх у відповідному рядку стовпця θ та взяти з цих відношень найменше. Нехай таким буде відношення $\theta = \dfrac{b_i}{a_{ij}}$. Тоді елемент a_{ij} - ведучий, а рядок та стовпець таблиці, на перетині яких лежить a_{ij}, відповідно ведучі рядок та стовпець.
3. Коефіцієнти ведучого рядка (крім θ_i) таблиці поділити на ведучий

елемент та записати у відповідному рядку нової таблиці.

4. Елементи кожного наступного рядка нової таблиці дістають шляхом додавання відповідного рядка початкової таблиці та рядка, записаного в п.3, помноженого на таке число, щоб у ведучому стовпці при додаванні дістати нулі. На цьому заповнення нової таблиці завершується та перетворення нової таблиці починають з п.1.

Таблиця 10.1 – Таблиця симплексного перетворення

№ рядка	A_0	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n	$\sum$	θ
1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}		
2	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}		

Такі перетворення продовжують доти, поки в таблиці не буде виділено одиничний базис, якому відповідає опорний план, або ж не буде встановлено, що система обмежень несумісна. Стовпець $\sum$ в таблиці призначений для контролю обчислень, його елементи обчислюють так, як і за методом повного виключення Гауса.

Зазначимо, що при виборі вектора A_j треба стежити за тим, щоб не повернутися до попереднього базису. Ця умова додатково обмежує вибір ведучого елемента.

Хід роботи

Знайти початковий опорний план системи згідно варіанту (таблиця 10.2)

Таблиця 10.2 – Варіанти завдань для виконання лабораторної роботи

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$ $x_1 - x_4 - 2x_6 = 5,$ $x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3,$ $x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5,6).$	16	$Z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max,$ $x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5,$ $2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3,$ $2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3).$
2	$Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min,$ $x_1 + x_4 + 6x_6 = 9,$ $3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2,$ $x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5,6).$	17	$Z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \min,$ $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \le 1,$ $5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \le 3,$ $4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4).$

3	$Z=-x_1+3x_2+2x_3\to\min,$ $x_1+x_2+2x_3\ge -5,$ $2x_1-3x_2+x_3\le 3,$ $2x_1-5x_2+6x_3\le 5,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3).$	18	$Z=2x_1+4x_2+12x_4\to\max,$ $x_1+2x_2+x_3+4x_4\ge 10,$ $2x_1+x_2-2x_3+3x_4\ge 4,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4).$
4	$Z=x_1+5x_2+4x_3-6x_4\to\max,$ $2x_1+3x_2-4x_3-5x_4\le 1,$ $5x_1-6x_2+x_3-x_4\le 3,$ $4x_1+x_2-2x_3+3x_4\le 2,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4).$	19	$Z=x_1+x_2+x_3\to\max,$ $x_1-x_4-2x_6=5,$ $x_2+2x_4-3x_5+x_6=3,$ $x_3+2x_4-5x_5+6x_6=5,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4,5,6).$
5	$Z=2x_1+x_2-x_3-x_4\to\min,$ $x_1-x_2+2x_3-x_4=2,$ $2x_1+x_2-3x_3+x_4=6,$ $x_1+x_2+x_3+x_4=7,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4).$	20	$Z=x_1-x_2+x_3+x_4+x_5-x_6\to\max,$ $x_1+x_4+6x_6=9,$ $3x_1+x_2-4x_3+2x_6=2,$ $x_1+2x_3+x_5+2x_6=6,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4,5,6).$
6	$Z=5x_1+2x_2-x_3\to\max,$ $2x_1+x_2+x_3\le 5,$ $3x_1+2x_2+x_3=6,$ $5x_1+3x_2+4x_3\ge 1,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3).$	21	$Z=2x_1-2x_2+3x_3+4x_4\to\max,$ $x_1+2x_2+x_3+x_4\le 2,$ $2x_1-x_2+2x_3-3x_4\ge 3,$ $3x_1+4x_2-5x_3+2x_4\le 2$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4).$
7	$Z=x_4-x_5\to\max,$ $x_2-x_3-x_4+x_5\ge 0,$ $-2x_1+2x_3-x_4+x_5=0,$ $x_1-2x_2-x_4+2x_5\ge 0,$ $x_1+x_2+x_3=1,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4,5).$	22	$Z=x_1+2x_2+3_3-x_4\to\min,$ $x_1+2x_2+3x_3=15,$ $2x_1+x_2+5x_3=20,$ $x_1+2x_2+x_3+x_4=10,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4).$
8	$Z=x_1-2x_2+3x_3\to\min,$ $-2x_1+x_2+3x_3=2,$ $2x_1+3x_2+4x_3=1,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3).$	23	$Z=x_1-x_2+x_3-3x_4+x_5-x_6-3x_7\to\min$ $3x_3+x_5+x_6=6,$ $x_2+2x_3-x_4=10,$ $-x_1+x_6=0,$ $x_3+x_6+x_7=6,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,\dots,7).$
9	$Z=x_1+2x_2+3_3-x_4\to\max,$ $x_1+2x_2+3x_3=15,$ $2x_1+x_2+5x_3=20,$ $x_1+2x_2+x_3+x_4=10,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4).$	24	$Z=x_1-x_2+x_3\to\min,$ $x_1+2x_2-x_3+x_4=3,$ $x_1-4x_2+x_3=-2,$ $x_j\ge 0\quad (j=1,2,3,4).$

10	$Z = x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7 \to \max,$ $3x_3 + x_5 + x_6 = 6,$ $x_2 + 2x_3 - x_4 = 10,$ $-x_1 + x_6 = 0,$ $x_3 + x_6 + x_7 = 6,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,...,7).$	25	$Z = x_1 + 2x_3 + x_5 \to \max,$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$ $x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2,$ $x_3 - x_4 + x_5 = 1,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5).$
11	$Z = -x_4 + x_5 \to \min,$ $x_1 + x_4 + x_5 = 2,$ $x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7,$ $x_3 - x_4 - 3x_5 = 2,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5).$	26	$Z = x_1 + x_2 \to \max,$ $x_1 + x_3 = 2,$ $x_2 - x_3 + x_4 = 1,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4).$
12	$Z = x_4 - x_5 \to \min,$ $x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \ge 0,$ $-2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0,$ $x_1 - 2x_2 - x_4 + 2x_5 \ge 0,$ $x_1 + x_2 + x_3 = 1,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5).$	27	$Z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$ $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2,$ $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6,$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4).$

13	$Z = 2x_1 + 4x_2 + 12x_4 \to \min,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \ge 10,$ $2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 4,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4).$	28	$Z = 5x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min,$ $2x_1 + x_2 + x_3 \le 5,$ $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$ $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 1,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3).$
14	$Z = -x_4 + x_5 \to \max,$ $x_1 + x_4 + x_5 = 2,$ $x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7,$ $x_3 - x_4 - 3x_5 = 2,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5).$	29	$Z = x_1 + 2x_3 + x_5 \to \min,$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5,$ $x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2,$ $x_3 - x_4 + x_5 = 1,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5).$
15	$Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max,$ $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$ $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1,$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3).$	30	$Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2,$ $2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3,$ $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 2$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4).$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте загальну постановку задачі математичного програмування.
2. Класифікація задач математичного програмування.
3. Наведіть приклади задач математичного програмування.

4. Дайте постановку задачі лінійного програмування в канонічній формі.
5. Множина допустимих розв’язків та оптимальний розв’язок задачі лінійного програмування.
6. Графічна інтерпретація області допустимих розв’язків задачі лінійного програмування.
7. В чому суть графічного методу розв’язку задачі лінійного програмування.
8. Алгоритм симплекс-методу розв’язування задач лінійного програмування.
9. Метод штучного базису для пошуку початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

Лабораторна робота № 11

Симплексний метод розв'язання задачі лінійного програмування

Мета роботи: отримати розв'язок задачі лінійного програмування з використанням симплекс-методу.

Теоретичні відомості

Нехай $X = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ...0)$ - початковий опорний розв'язок канонічної задачі лінійного програмування, а базис, що йому відповідає, складається з векторів $p_1, p_2, ..., p_m$. Знайдемо розклад векторів $p_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ через вектори базису: $p_j = x_{1j} p_1 + x_{2j} p_2 + ... + x_{mj} p_m \left(j = 1,2,...,n\right)$.

Обчислимо різниці $\Delta_j = z_j - c_j$ для всіх j, де $z_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + ... + c_m x_{mj}$ та значення цільової функції Z_0 для плану X. $Z_0 = c_1 x_1 + ... + c_m x_m$

Можливі три такі випадки:

1. Для всіх індексів $j(j = \overline{1,n})$ виконується умова $\Delta_j = Z_j - c_j \le 0$.
2. Існує такий індекс j, для якого $\Delta_j = Z_j - c_j > 0$ і всі коефіцієнти розкладу вектора P_j через вектори базису $x_{ij} \le 0 (i = 1,..,m)$
3. Для кожного індексу j, для якого $\Delta_j = z_j - c_j > 0$, серед коефіцієнтів $x_{ij} (i = \overline{1,m})$ розкладу вектора P_j через вектори базису є хоч би один додатній.

У першому випадку розв'язування задачі припиняється, X - опорно оптимальний розв'язок. У другому випадку цільова функція на множині планів є необмеженою, і, відповідно, задача не має розв'язку.

У третьому випадку, якщо X - невироджений опорний розв'язок, можна перейти до нового опорного розв'язку з меншим значенням цільової функції.

Нехай виконується умова третього випадку. Перейдемо до нового опорного розв'язку. Для цього виключимо один вектор, який не належить до базису. На практиці у новий базис вводять той вектор P_j, який відповідає максимальній різниці $\Delta_j = \mathrm{Z}_j - C_j$. Якщо $\max \Delta_j = \Delta_k$, то вектор P_k будемо вводити в новий базис.

Якщо $\min \dfrac{x_i}{x_k} = \dfrac{x_l}{x_{lk}}$, де мінімум береться по тих i, для яких $x_{ik} > 0$, то вектор P_l необхідно ввести із базису. Елемент x_{lk} прийнято називати розв'язком.

Отже, у третьому випадку переходимо до нового опорного розв'язку $\mathrm{X}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, де $x_i' = 0 (i \ne 1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m,k)$, якому відповідатиму базис, що складається з векторів $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{l-1}, \mathrm{P}_{l+1}, \ldots, \mathrm{P}_m, \mathrm{P}_k$.

Обчислимо компоненти нового опорного плану X', коефіцієнти розкладу векторів P_j через вектори нового базису, значення цільової функції Z_0' і різниці

$\Delta'_j = Z'_j - C_j$ для нового опорного плану. Оскільки:

$$P_k = x_{1k}P_1 + x_{2k}P_2 + \ldots + x_{l-1,k}P_{l-1} + x_{lk}P_l + x_{l+1,k}P_{l+1} + \ldots + x_{mk}P_m$$

та $x_{lk} \neq 0$, то з цієї рівності знаходимо розклад вектора P_l через вектори нового базису:

$$P_l = -\frac{x_{1k}}{x_{lk}} \cdot P_1 - \frac{x_{2k}}{x_{lk}} \cdot P_2 - \ldots - \frac{x_{l-1,k}}{x_{lk}} \cdot P_{l-1} - \frac{x_{l+1,k}}{x_{lk}} \cdot P_{l+1} - \frac{x_{mk}}{x_{lk}} \cdot P_m + \frac{1}{x_{lk}} \cdot P_k .$$

Підставляючи замість P_l його розклад через вектори нового базису в рівність:

$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_{l-1}P_{l-1} + x_lP_l + x_{l+1}P_{l+1} + \ldots + x_mP_m = P_0$ одержуємо:

$x'_1P_1 + x'_2P_2 + \ldots + x'_{l-1}P_{l-1} + x'_lP_l + x'_{l+1}P_{l+1} + \ldots + x'_mP_m = P_0$ де

$$x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} \cdot x_{ik}\,(i = 1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m)$$

$$x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}}$$

Підставляючи замість P_l його розклад через вектори нового базису в рівність:

$$P_j = x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + \ldots + x_{l-1,j}P_{l-1} + x_{lj}P_l + x_{l+1,j}P_{l+1} + \ldots + x_{mj}P_m ,$$

знаходимо розклад векторів P_j через вектори нового базису:

$$P_j = x'_{1j}P_1 + x'_{2j}P_2 + \ldots + x'_{l-1,j}P_{l-1} + x'_{l,j}P_l + x'_{l+1,j}P_{l+1} + \ldots + x'_{m,j}P_m + x'_{k,j}P_k$$

де

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \cdot x_{ik}\,(i = 1,2,\ldots,l-1,l+1,\ldots,m)$$

$$x'_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{ik}}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\Delta'_j = Z'_j - C_j = C_1x'_{1j} + C_2x'_{2j} + \ldots + C_{i-1}x'_{l-1,j} + C_{l+1}x'_{l+1,j} + \ldots +\\ + C_m x'_{mj} + C_k x'_{kj} - C_j\,(j = 1,2,\ldots,n)\end{aligned},$$

то підставляючи замість x_{ij} їх значення з формул, одержимо:

$$Z'_0 = Z_0 - \frac{x_l}{x_{ik}} \cdot \Delta_k .$$

Знайшовши компоненти нового опорного плану X', коефіцієнти розкладу векторів P_j через вектори нового базису, значення цільової функції Z'_0 і різниці $\Delta_j = Z_j - c_j$ для нового опорного плану, складено нову сиплекс таблицю.

Хід роботи

Серед невід'ємних розв'язків системи обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

знайти розв'язок, який надасть найменшого (або найбільшого) значення лінійній функції $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. Значення коефіцієнтів та вільні члени системи подано в таблиці 11.1, а вид екстремуму та значення коефіцієнтів лінійної функції – в таблиці 11.2.

Таблиця 11.1 – Варіанти завдань для виконання лабораторної роботи

Варіант	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	b_i
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	-3,78	3,37	-4,88	3,81	0,43
	2	-4,35	3,71	4,48	0,36	-4,33	0
	3	4,32	-3,38	4,29	3,87	2,73	4,87
2	1	2,57	-12,61	0	0,2	2,83	3,18
	2	0	3,19	0	0,81	1,27	1,86
	3	0	-0,02	3,87	0	-18,25	1,32
3	1	5,87	-2,37	0	2,28	23,64	0,56
	2	0	12,03	-28,73	33,17	6,28	27,43
	3	6,73	24,17	1,89	-1,74	0	30,07
4	1	47,25	0	-0,2	-7,63	24,21	5,84
	2	28,17	0	19,23	0	19,47	4,67
	3	-1,87	5,73	0	0	38,74	3,73
5	1	16,23	-38,02	0	6,45	22,87	0,31
	2	6,02	-32,74	0	-0,78	27,22	0,14
	3	-28,12	21,75	-2,16	2,17	2,76	3,22
6	1	-17,28	0	19,28	25,43	0	6,38
	2	41,64	0	0,1	26,82	6,28	32,17
	3	38,22	0,52	0	-14,17	0,12	44,22
7	1	12,34	22,56	-33,74	0	1,41	30,37
	2	0	0,73	3,21	32,29	1,01	21,74
	3	-27,38	16,21	0,68	-27,61	1,43	0
8	1	0,1	-7,45	0	18,43	11,41	16,78
	2	0	19,97	47,64	0	17,29	19,24
	3	-2,74	2,02	0	0	44,47	2,23
9	1	0	0	38,73	-11,65	24,74	2,49
	2	34,04	0	10,08	0	17,59	33,41
	3	0	1,73	24,47	0,02	6,23	34,56
10	1	-2,67	0	1,17	15,83	0	6,78
	2	8,74	36,2	0	-5,87	0	31,24
	3	11,73	0	0	12,8	18,83	19,47
11	1	4,05	-2,82	0	10,85	10,16	21,28
	2	-2,37	0	16,27	1,18	10,78	3,94
	3	12,28	18,02	-11,37	12,34	0	32,73
12	1	24,37	-2,28	49,93	0	2,87	17,28
	2	-2,34	16,83	0	29,3	17,21	22,27
	3	0	6,84	2,87	-6,19	24,45	23,17

13	1	0	6,08	-5,54	16,22	33,17	0
	2	25,07	0	3,17	44,47	19,83	17,24
	3	-8,39	0	38,24	16,51	32,17	3,07
14	1	10,08	-2,25	1,65	24,01	26,21	0,1
	2	16,27	0	30,23	11,37	3,28	2,29
	3	0	17,38	2,91	-2,83	18,87	2,92
15	1	-16,02	28,24	0	32,29	0	10,06
	2	0,27	-30,74	0	1,07	3,87	10,53
	3	4,47	-32,29	27,01	-3,84	-3,26	21,66
16	1	2,34	2,21	0,73	-3,85	0	2,74
	2	0	0,97	11,03	17,87	0	16,24
	3	-1,37	3,29	0	1,12	3,56	2,68
17	1	0,53	1,24	-0,12	3,11	0	1,74
	2	0	-3,78	1,17	0	3,24	4,37
	3	-2,04	0	1,25	2,64	20,83	3,28
18	1	0,63	32,16	-16,28	0	22,57	-2,28
	2	-17,22	0	3,24	21,86	2,16	1,05
	3	0	2,79	-2,28	3,37	1,77	1,03
19	1	6,74	12,17	-2,26	0	21,51	10,54
	2	0	-4,13	7,28	1,55	10,37	21,32
	3	-6,26	6,57	0	10,58	3,42	12,26
20	1	8,23	14,11	22,14	0	0,93	20,02
	2	0	0,37	2,13	21,38	0,74	13,47
	3	-17,54	11,23	0,63	-16,87	0,98	0
21	1	31,24	0	0,1	-4,78	14,35	3,87
	2	18,43	0	13,2	0	13,87	3,12
	3	-1,25	3,92	0	0	37,24	2,51
22	1	11,32	-24,83	0	2,71	13,84	10,4
	2	4,02	-22,34	0	-0,47	18,47	0,18
	3	19,24	14,37	-1,13	1,48	1,73	2,21
23	1	4,68	10,46	2,84	-12,39	0	10,96
	2	0	3,74	42,37	70,24	0	64,83
	3	-4,87	12,35	0	4,67	14,23	10,69
24	1	-8,01	14,12	0	16,3	0	5,03
	2	0,54	-61,28	0	2,14	6,92	21,35
	3	9,08	-64,25	54,37	-6,48	-6,53	42,87
25	1	4,08	4,28	1,63	-6,93	0	5,27
	2	0	1,85	23,06	34,58	0	32,18
	3	-2,18	6,48	0	2,25	6,83	5,36
26	1	8,12	-19,23	0	3,22	11,65	0,66
	2	3,07	-16,36	0	0,35	13,52	0,07
	3	-14,05	10,67	-1,15	1,08	1,39	1,66
27	1	-8,56	0	9,58	12,36	0	3,25
	2	20,76	0	0,2	13,32	3,21	16,21
	3	19,11	0,25	0	-7,13	0,09	22,11
28	1	0,2	-14,35	0	39,25	22,83	33,14
	2	0	38,35	60,28	0	34,17	38,24
	3	-4,47	4,12	0	0	48,32	4,87
29	1	23,12	0	-0,1	-3,83	12,11	2,93
	2	14,08	0	9,56	0	9,74	2,38
	3	-0,93	2,87	0	0	19,87	1,93

30	1	2,03	-1,41	0	5,93	5,18	11,35
	2	-1,19	0	8,14	0,7	5,37	1,86
	3	6,14	9,37	-5,83	6,74	0	16,36

Таблиця 11.2 – Варіанти завдань для виконання лабораторної роботи

Варіант	Екстремум	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	максимум	1	2	-3	4	-3
2	мінімум	2	-1	1	4	-3
3	мінімум	3	1	-2	-1	4
4	максимум	4	-2	4	-1	7
5	мінімум	2	1	-3	5	-1
6	максимум	3	-2	5	-1	4
7	максимум	2	3	-1	4	-5
8	мінімум	-1	3	4	-1	2
9	мінімум	2	3	-3	1	-4
10	максимум	3	-1	-2	3	4
11	мінімум	1	1	-3	2	-4
12	мінімум	3	-2	1	-5	1
13	максимум	-2	1	-1	3	5
14	максимум	-1	3	-2	1	4
15	мінімум	1	-3	4	-5	2
16	максимум	3	2	-1	4	-7
17	мінімум	2	-3	4	-3	2
18	максимум	1	-1	3	4	-2
19	мінімум	3	4	-5	-1	3
20	мінімум	5	7	-2	1	-1
21	максимум	7	-1	3	-4	-5
22	мінімум	3	4	-1	2	-4
23	максимум	2	3	-1	-2	1
24	максимум	1	5	6	-3	-1
25	мінімум	4	-3	2	1	-2
26	максимум	-2	5	-1	4	-3
27	мінімум	3	-1	5	2	-4
28	максимум	5	-3	2	-1	-4
29	мінімум	-2	4	6	-4	5
30	мінімум	1	-3	2	4	-6

Контрольні запитання

1. Математичне програмування. Основні класи задач математичного програмування.
2. Зробіть постановку задачі лінійного програмування в канонічній формі.
3. Методи зведення задачі лінійного програмування в неканонічній формі до канонічної форми.
4. Допустима область розв’язків задачі лінійного програмування.
5. Алгоритм симплекс-методу розв’язання задач лінійного програмування.