УДК: 537.8 (07) (043)
В.І. Кульчицький, канд. пед. наук, доц.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

ФОРМУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ФІЗИЧНИХ ПОНЯТЬ У СТУДЕНТІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ АТОМА ВОДНЮ У КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ

Kulchytskyi V.I., Ph.D., Assoc. Prof.

FORMATION OF BASIC FUNDAMENTAL NOTIONS IN THE PROCESS OF THE HYDROGEN ATOM STUDY IN QUANTUM MECHANICS.

Енергетичні рівні атома водню, згідно теорії Бора, знаходять на основі правил квантування координат та імпульсу електрона, які приводять до того, що для можливих значень енергії отримується вираз:

$$E = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2}, \tag{1}$$

де $\frac{m_e e^4}{2\hbar^3} = R$ - стала Рідберга, $\hbar$ - стала Планка, m_e - маса електрона, e - заряд електрона, Z - порядковий номер атома, $n = 1,2,3,...$ - головне квантове число [2, с. 59-61]. З точки зору квантової механіки розглянемо систему, що складається з нерухомого ядра із зарядом $Z|e|$ (Z – ціле число) і електрона, що рухається навколо нього. При $Z > 1$ така система - водневоподібний іон; при $Z = 1$ вона являє собою атом водню. Потенціальна енергія електрона у полі ядра дорівнює:

$$U = -\frac{e^2 Z}{r}, \tag{2}$$

де r - відстань електрона від ядра. Рівняння Шредінгера матиме вигляд:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2 Z}{r}\right)\psi = 0. \tag{3}$$

Підставимо у рівняння Шредінгера вираз оператора Лапласа у сферичних координатах, отримаємо [2, с. 93; 1, с. 326-330]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2 Z}{r}\right)\psi = 0.$$

(4)

Рівняння (4) розв'язуємо шляхом розділення змінних. Введемо $\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\cdot Y(\vartheta,\varphi)$ та підставимо це значення у (4), поділимо отриманий результат на добуток $R(r)\cdot Y(\vartheta,\varphi)$ та помножимо його на r^2 [2, с. 97-99]:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Y\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{Y\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{2m_e r^2}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2 Z}{r}\right) = 0.$$

Оскільки одна частина цього рівняння залежить тільки від r, а інша - тільки від ϑ,φ то їх сума може дорівнювати нулю тільки тоді, коли обидві частини дорівнюють одній і тій самій сталій величині λ, взятій з протилежним знаком:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2m_e r^2}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2 Z}{r}\right) = \lambda, \tag{5}$$

$$\frac{1}{Y\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{Y\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -\lambda. \tag{6}$$

Рівняння (5) та (6) мають скінченні, однозначні і неперервні розв'язки при визначених значеннях параметрів E та λ. Рівняння (6) розв'язується з допомогою сферичних функцій l -го порядку $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ при умові, що

$$\lambda = l(l+1), \text{ де } l = 0,1,2,... \qquad (7)$$

Існує $2l+1$ різних сферичних функцій l -го порядку, лінійно незалежних одна від одної, тому у виразі для $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ індекс m приймає $2l+1$ наступних значень:

$$m = l, l-1, l-2, ..., 0, ..., -(l-2), -(l-1), -l. \qquad (8)$$

Рівняння (5) при $\lambda = l(l+1)$, приймає вигляд:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2m_e r^2}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2 Z}{r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_e r^2}\right)R = 0. \qquad (5a)$$

При $E < 0$ останнє рівняння має скінченні розв'язки при $r \to \infty$ тільки тоді, коли E приймає значення:

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{2\hbar^2 (n' + l + 1)^2}, \qquad (9)$$

де n' - ціле число, а отже, $n' + l + 1$ є також ціле число n, що співпадає з (1), отриманим у теорії Бора [2, с. 60, 93; 1, с. 330]. Випадок $E > 0$ відповідає електрону, що пролітає поблизу ядра і віддаляється на нескінченність, а випадок $E < 0$ відповідає електрону, зв'язаному з ядром.

Отже, із рівняння Шредінгера випливає, що атом водню та подібні до нього іони можуть знаходитися лише у ряді дискретних енергетичних станів із значеннями енергії, які виражаються формулою (1). Кожен такий стаціонарний стан характеризується трьома цілими числами n', l, та m, причому енергія залежить тільки від $n' + l$ та не залежить від m. Оскільки $n' \geq 0$, то $n \geq l + 1$ і отже, l при даному n може приймати значення $l = 0,1,2,...,(n-1)$.

Ймовірність знаходження електрона в елементі об'єму $dV = r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = r^2 dr d\Omega$ визначається виразом $dP_{r,\vartheta,\varphi} = R_{nl}^2 r^2 dr Y_{lm}^* Y_{lm} d\Omega$.

Взявши інтеграл від цього виразу по повному тілесному куту 4π, знайдемо імовірність dP_r того, що електрон знаходиться у кульовому шарі радіусом r товщиною dr: $dP_r = R_{nl}^2 r^2 dr$, а вираз $R_{nl}^2 r^2$ є густина ймовірності знаходження електрона на відстані r від ядра [2, с. 98; 1, с 331-336]:

$$\psi\psi^* dV = RR^* r^2 \cdot YY^* \sin^2\vartheta \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi. \qquad (10)$$

Застосування запропонованого підходу із детальним аналізом фізичної природи хвильової функції для водневоподібних атомів сприяє не лише формуванню фундаментальних фізичних понять ***електромагнітне поле, електромагнітна взаємодія*** та ***спін електрона*** у відповідності до їх розуміння у сучасній фізичній науці, але й створює передумови для якісного засвоєння студентами технічних спеціальностей вузів змісту цих понять. Завдяки запропонованому підходу виникають перспективи подальших досліджень та розробки для студентів технічних спеціальностей вузів методики вивчення фізики твердого тіла на основі фундаментальних фізичних понять та принципів.

Література

1. Вихман Э. Квантовая физика Серия «Берклеевский курс физики»: [учеб. руководство; пер. с англ.] / Под ред. А.И. Шальникова, А.О. Вайсенберга. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – Т.4. – 392 с., ил.

2. Савельев И. В. Курс общей физики: [учеб. пособие. В 3 – х т.] / И. В. Савельев. – [3 – е изд., испр.]. – М.: Наука, 1987. – Т.3. – 320 с.