

УДК 517.9

О.І. Панчук

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

РОЗВ'ЯЗАННЯ інтегральНИХ РІВНЯНЬ В КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ теорії пружності

О.І. Panchuk

SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS IN CONTACT PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

Контактні задачі механіки деформівного твердого тіла в математичному плані зводяться до розв'язання інтегральних рівнянь. Багато із них, зокрема парні, потрібні інтегральні рівняння та їх системи, можна розв'язати наступним способом. Розглянемо для прикладу інтегральні рівняння

$$\int_0^{\infty} \alpha \varphi(\alpha) F_1(\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha = f_1(r), 0 \leq \rho < a; \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha \varphi(\alpha) F_2(\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha = f_2(r), a \leq \rho < b; \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} \alpha \varphi(\alpha) F_3(\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha = 0, b \leq r, \quad (3)$$

де $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $F_3(\alpha)$, $f_1(r)$ та $f_2(r)$ – відомі, а $\varphi(\alpha)$ – шукана функція.

За допомогою невідомих функцій $x(r)$ та $y(r)$ продовжимо інтегральне рівняння (3), визначене на нескінченному інтервалі, на всю додатну піввісь

$$\int_0^{\infty} \alpha \varphi(\alpha) F_3(\alpha) J_0(r\alpha) d\alpha = x(r)\eta(a-r) + y(r)[\eta(r-a) - \eta(r-b)], 0 \leq r < \infty,$$

та застосуємо до одержаної рівності інтегральне перетворення Ганкеля. У результаті отримаємо

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{F_3(\alpha)} \int_0^a r x(r) J_0(r\alpha) dr + \frac{1}{F_3(\alpha)} \int_a^b r y(r) J_0(r\alpha) dr, \quad (4)$$

де $\eta(r)$ – функція Гевісайда.

Функції $x(r)$ та $y(r)$ доцільно вибрати у вигляді рядів із невідомими коефіцієнтами c_n та d_n

$$x(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} \rho\right); \quad y(r) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n L(\lambda_n, r), \quad (5)$$

$$L(r, \lambda_n) = J_0\left(\frac{r}{a} \lambda_n\right) Y_0(\lambda_n) - Y_0\left(\frac{r}{a} \lambda_n\right) J_0(\lambda_n),$$

де γ_n та λ_n – додатні корені рівнянь $J_0(x) = 0$ та $L(b, x) = 0$, а $J_0(x)$ та $Y_0(x)$ – функції Бесселя та Неймана.

Для визначення c_n та d_n , що входять до представлень (5), необхідно підставити (4) у рівняння (1) та (2). У результаті отримаємо нескінчену систему лінійних рівнянь для їх відшукування. Маючи значення c_n та d_n із співвідношень (5) та (4) знаходимо вираз для шуканої функції $\varphi(\alpha)$.