УДК 539.3
М.С. Михайлишин, канд. фіз. – мат. наук, доц., В.М. Михайлишин
Тернопільський національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКИХ ДИСКІВ

M.S. Mykhailyshyn, Ph.D., Assoc. Prof., V.M. Mykhailyshyn

MATHEMATICAL MODELING THERMOELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF THIN DISKS

Для моделювання процесів термопружно-пластичного деформування використовуємо деформаційну теорію термопластичності, узагальнену на випадок врахування можливості розвантаження з виникненням повторних пластичних деформацій. Фізичні співвідношення, орієнтовані на випадок використання методу додаткових деформацій для лінеаризації фізичної нелінійності, можуть бути записані в такому вигляді [1]:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij}^{(k)} - \frac{3\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_0^{(k)}\right) + \delta_{ij}\varepsilon_T + \varepsilon_{ij}^{p(k-1)},$$

$$\varepsilon_{ij}^{p(k)} = \varepsilon_{ij}^{p'} + \frac{\overline{\psi}^{(k)} - 1}{\overline{\psi}^{(k)}}\left(\varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon_{ij}^{p'} - \delta_{ij}\varepsilon_0^{(k)}\right), \quad \overline{\psi}^{(k)} = 3G\frac{\overline{\varepsilon}_i^{(k)}}{\sigma_{id}^{(k)}},$$

$$\overline{\varepsilon}_i^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{3}\overline{e}_{ij}^{(k)}\overline{e}_{ij}^{(k)}}, \quad \overline{e}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{p'},$$

де σ_0, ε_0 – середні напруження і деформація, e_{ij} – компоненти девіатора тензора деформацій. Штрихом позначені величини, які були зафіксовані в момент початку розвантаження.

Для плоского напруженого стану фізичні залежності наступні

$$\sigma_r^{(k)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_r^{(k)} + \nu\varepsilon_\varphi^{(k)} - (1+\nu)\varepsilon_T - \left(\varepsilon_r^{p^{(k-1)}} + \nu\varepsilon_\varphi^{p^{(k-1)}}\right)\right],$$

$$\sigma_\varphi^{(k)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\varphi^{(k)} + \nu\varepsilon_r^{(k)} - (1+\nu)\varepsilon_T - \left(\varepsilon_\varphi^{p^{(k-1)}} + \nu\varepsilon_r^{p^{(k-1)}}\right)\right],$$

$$\varepsilon_z^{(k)} = -\frac{1}{1+\nu}\left[\nu\left(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}\right) - (1+\nu)\varepsilon_T + (1-2\nu)\left(\varepsilon_r^{p^{(k-1)}} + \varepsilon_\varphi^{p^{(k-1)}}\right)\right],$$

$$\varepsilon_r^{p^{(k)}} = \varepsilon_r^{p^1} + \frac{\overline{\psi}^{(k)} - 1}{\overline{\psi}^{(k)}}\left(\varepsilon_r^{(k)} - \varepsilon_r^{p^1} - \varepsilon_0^{(k)}\right),$$

$$\varepsilon_\varphi^{p^{(k)}} = \varepsilon_\varphi^{p^1} + \frac{\overline{\psi}^{(k)} - 1}{\overline{\psi}^{(k)}}\left(\varepsilon_\varphi^{(k)} - \varepsilon_\varphi^{p^1} - \varepsilon_0^{(k)}\right).$$

Рівняння рівноваги і геометричні співвідношення для тонких дисків в осесиметричному випадку мають вигляд

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{N_\varphi - N_r}{r}, \quad \frac{dM_r}{dr} = \frac{M_\varphi - M_r}{r},$$

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z dz,\ M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz,$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 + z\chi_r,\ \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + z\chi_\varphi,\ -h/2 \le z \le h/2,$$

$$\varepsilon_r^0 = \frac{du}{dr},\ \varepsilon_\varphi^0 = \frac{u}{r},\ \chi_r = \frac{d\theta}{dr},\ \chi_2 = \frac{\theta}{r},\ \frac{dw}{dr} = -\theta.$$

Враховуючи специфіку фізичних залежностей отримана повна система рівнянь задачі

$$\frac{dN_r^{(k)}}{dr} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\left(E_0 u^{(k)} + E_1 \vartheta^{(k)}\right) - (1-\nu) N_r^{(k)} - E_\varphi^{p^{(k-1)}} - \left(a_0 T_1^* + \frac{2a_1}{h} T_2\right)\right],$$

$$\frac{dM_r^{(k)}}{dr} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\left(E_1 u^{(k)} + E_2 \vartheta^{(k)}\right) - (1-\nu) M_r^{(k)} - K_\varphi^{p^{(k-1)}} - \left(a_1 T_1^* + \frac{2a_2}{h} T_2\right)\right],$$

$$\frac{du^{(k)}}{dr} = -\nu \frac{u^{(k)}}{r} + \frac{1}{E_0 E_2 - E_1^2}\left(E_2 \tilde{N}_r^{(k)} - E_1 \tilde{M}_r^{(k)}\right),\quad \frac{dw^{(k)}}{dr} = -\theta^{(k)},$$

$$\frac{d\theta^{(k)}}{dr} = -\nu \frac{\theta^{(k)}}{r} + \frac{1}{E_0 E_2 - E_1^2}\left(E_0 \tilde{M}_r^{(k)} - E_1 \tilde{N}_r^{(k)}\right),$$

$$\tilde{N}_r^{(k)} = E_0\left(\varepsilon_{r_0}^{(k)} + \nu \varepsilon_{\varphi_0}^{(k)}\right) + E_1\left(\chi_r^{(k)} + \nu \chi_\varphi^{(k)}\right),$$

$$\tilde{M}_r^{(k)} = E_1\left(\varepsilon_{r_0}^{(k)} + \nu \varepsilon_{\varphi_0}^{(k)}\right) + E_2\left(\chi_r^{(k)} + \nu \chi_\varphi^{(k)}\right),$$

$$N_\varphi^{(k)} = N_r^{(k)} + E_0 \varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + E_1 \chi_\varphi^{(k)} + \frac{1}{1+\nu}\left(E_r^{p^{(k-1)}} - E_\varphi^{p^{(k-1)}} - \tilde{N}_r^{(k)}\right),$$

$$M_\varphi^{(k)} = M_r^{(k)} + E_1 \varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + E_2 \chi_\varphi^{(k)} + \frac{1}{1+\nu}\left(K_r^{p^{(k-1)}} - K_\varphi^{p^{(k-1)}} + \tilde{M}_r^{(k)}\right),$$

де

$$t = T_1 + \frac{2z}{h} T_2,\ T_1 = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} t dz,\ T_2 = \frac{6}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2} t z dz,$$

$$a_j = \int_{-h/2}^{h/2} E\alpha_T z^j dz,\ \int_{-h/2}^{h/2} E z^j dz = E_j,\ j = 0,1,2$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} E\varepsilon_{r,\varphi}^{p^{(k-1)}} dz = E_{r,\varphi}^{p^{(k-1)}};\ \int_{-h/2}^{h/2} E\varepsilon_{r,\varphi}^{p^{(k-1)}} z dz = K_{r,\varphi}^{p^{(k-1)}}.$$

Отримана система рівнянь дозволяє моделювати термопружно-пластичне деформування тонких дисків в процесах термообробки, зварювання, формоутворення.

Література

1. *Михайлишин М.* Проблеми утворення залишкових напружень і деформацій при зварюванні. / М. Михайлишин // Вісник Тернопільського державного університету