# *МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА*

# *MATHEMATICAL MODELING. MATHEMATICS. PHYSICS*

*УДК 517.52/524: 517.58/589*

**М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська[2], кант. техн. наук**

*[1]Чернівецький факультет Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут"*
*[2]Тернопільський національний економічний університет*

## ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ $\left[R_0, R_2\right]$ ПОЛЯРНОЇ ВІСІ

*Методом порівняння розв'язків, побудованих на сегменті з однією точкою спряження для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя та Ейлера методом функцій Коші й методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення, підсумовано сім'ю поліпараметричних функціональних рядів.*

**M. Lenyuk, M. Shelestovska**

## SUMMARISING OF THE FUNCTIONAL SETS ACCORDING TO THE OWN ELEMENTS OF THE BESSEL-EILER HYBRID DIFFERENTIAL OPERATOR IN $\left[R_0, R_2\right]$ SEGMENT OF THE POLAR AXIS

*The family of the polyparametric functional sets was summarised using the method of solutions comparison, built in the single junction point segment for the separate system of the modificated Bessel-Eiler differential equations using the Caushier function method and the method of the definite finite hybrid integrated transformation.*

**Постановка проблеми.** Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасному стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, виражаються у вигляді поліпараметричного функціонального ряду, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Підсумовуванню однієї сім'ї функціональних рядів присвячена дана робота.

**Основна частина.** Розглянемо крайову задачу про побудову обмеженого на множині $\mathrm{I}_1 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2);\ R_0 > 0,\ R_2 < \infty\}$ розв'язку системи модифікованих диференціальних рівнянь Бесселя та Ейлера

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1} - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ &\left(\mathrm{B}^*_{\alpha_2} - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2) \end{aligned} \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \tfrac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \tfrac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) u_2(r)\right]\Big|_{r=R_1} = \omega_{j1}, \quad j = 1, 2 \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \left(\alpha_{22}^2 \tfrac{d}{dr} + \beta_{22}^2\right) u_2(r)\Big|_{r=R_2} = g_R\,. \tag{3}$$

У рівностях (1)-(3) $q_j > 0,\ \alpha_{jk}^m \ge 0,\ \beta_{jk}^m \ge 0,\ c_{11} \cdot c_{21} > 0,\ c_{j1} = \alpha_{2j}^1 \beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1 \beta_{2j}^1$, $\alpha_{11}^0 \le 0,\ \beta_{11}^0 \ge 0,\ \left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \ne 0,\ \alpha_{22}^2 + \beta_{22}^2 \ne 0;$ $\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_1 + 1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha_1^2}{r^2}$, $\mathrm{B}^*_{\alpha_2} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_2^2$, $2\alpha_1 + 1 \ge 0$, $\nu \ge \alpha_1 \ge -\frac{1}{2}$, $2\alpha_2 + 1 > 0$, $\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}$ – диференціальний оператор Бесселя [1], $\mathrm{B}^*_{\alpha_2}$ – диференціальний оператор Ейлера [2].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha} - q^2\right) v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $\mathrm{I}_{\nu,\alpha}(qr)$ та $\mathrm{K}_{\nu,\alpha}(qr)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(\mathrm{B}^*_{\alpha} - q^2\right) v = 0$ утворюють функції $r^{-\alpha-q}$ та $r^{-\alpha+q}$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати загальний розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [2, 3]:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= \mathrm{A}_1 \mathrm{I}_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) + \mathrm{B}_1 \mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) + \int_{R_0}^{R_1} \mathrm{E}_1(r,\rho) g_1(\rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho, \\ u_2(r) &= \mathrm{A}_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + \mathrm{B}_2 r^{-\alpha_2 + q_2} + \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{E}_2(r,\rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho. \end{aligned} \tag{4}$$

У рівностях (4) $\mathrm{E}_j(r,\rho)$ – функції Коші [2, 3]:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0} - \mathrm{E}_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0} = 0, \\ &\frac{d\mathrm{E}_j}{dr}\bigg|_{r=\rho+0} - \frac{d\mathrm{E}_j}{dr}\bigg|_{r=\rho-0} = -\left[\varphi_j(\rho)\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

де $\varphi_1(r) = r^{2\alpha_1+1}$, $\varphi_2(r) = r^{2\alpha_2+1}$.

Припустимо, що функція Коші

$$\mathrm{E}_1(r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{\mathrm{E}}_1 \equiv C_1 \mathrm{I}_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) + D_1 \mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_1 r), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \overset{+}{\mathrm{E}}_1 \equiv C_2 \mathrm{I}_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) + D_2 \mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_1 r), & R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$\begin{aligned} &(C_2 - C_1) \mathrm{I}_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho) + (D_2 - D_1) \mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho) = 0, \\ &(C_2 - C_1) \mathrm{I}'_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho) + (D_2 - D_1) \mathrm{K}'_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho) = -\frac{1}{q_1 \rho^{2\alpha_1+1}}. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -q_1^{2\alpha_1} \mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho), \quad D_2 - D_1 = q_1^{2\alpha_1} \mathrm{I}_{\nu,\alpha_1}(q_1\rho). \tag{6}$$

Доповнимо співвідношення (6) алгебраїчними рівняннями:

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)\bar{\mathrm{E}}_1(r,\rho)\right|_{r=R_0} = 0: \quad \left.\left(\alpha_{11}^1 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right)\overset{+}{\mathrm{E}}_1(r,\rho)\right|_{r=R_1} = 0: \quad \begin{cases} U_{\nu,\alpha_1;11}^{01}(q_1 R_0)C_1 + U_{\nu,\alpha_1;11}^{02}(q_1 R_0)D_1 = 0 \\ U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1 R_1)C_1 + U_{\nu,\alpha_1;11}^{12}(q_1 R_1)D_1 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Алгебраїчна система (7) внаслідок рівностей (6) набуває вигляду:

$$U_{\nu,\alpha_1;11}^{01}(q_1 R_0)C_1 + U_{\nu,\alpha_1;11}^{02}(q_1 R_0)D_1 = 0,$$

$$U_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(q_1 R_1)C_1 + U_{\nu,\alpha_1;11}^{12}(q_1 R_1)D_1 = q_1^{2\alpha_1}\Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1 R_1, q_1\rho).$$

За правилами Крамера маємо:

$$C_1 = -\frac{q_1^{2\alpha_1} U_{\nu,\alpha_1;11}^{02}(q_1 R_0)}{\Delta_{\nu,\alpha_1;11}(q_1 R_0, q_1 R_1)} \Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1 R_1, q_1\rho), \quad D_1 = \frac{q_1^{2\alpha_1} U_{\nu,\alpha_1;11}^{01}(q_1 R_0)}{\Delta_{\nu,\alpha_1;11}(q_1 R_0, q_1 R_1)} \Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1 R_1, q_1\rho).$$

Цим функція Коші $\mathrm{E}_1(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$\mathrm{E}_1(r,\rho) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu,\alpha_1;11}(q_1 R_0, q_1 R_1)} \begin{cases} \Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{0*}(q_1 R_0, q_1 r)\Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1 R_1, q_1\rho), & R_0 < r < \rho < R_1 \\ \Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{0*}(q_1 R_0, q_1\rho)\Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 r), & R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases}. \tag{8}$$

У рівностях (7), (8) беруть участь функції:

$$U_{\nu,\alpha_1;11}^{m1}(q_1 R_m, q_1 r) = \left(\alpha_{11}^m \frac{\nu-\alpha_1}{R_m} + \beta_{11}^m\right)\mathrm{I}_{\nu,\alpha_1}(q_1 R_m) + \alpha_{11}^m q_1^2 R_m \mathrm{I}_{\nu+1,\alpha_1+1}(q_1 R_m),$$

$$U_{\nu,\alpha_1;11}^{m2}(q_1 R_m, q_1 r) = \left(\alpha_{11}^m \frac{\nu-\alpha_1}{R_m} + \beta_{11}^m\right)\mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_1 R_m) - \alpha_{11}^m q_1^2 R_m \mathrm{K}_{\nu+1,\alpha_1+1}(q_2 R_m),$$

$$\Psi_{\nu,\alpha_1;11}^{m*}(q_1 R_m, q_1 r) = U_{\nu,\alpha_1;11}^{m1}(q_1 R_m)\mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_1 r) - U_{\nu,\alpha_1;11}^{m2}(q_1 R_m)\mathrm{I}_{\nu,\alpha_1}(q_1 r), \; m = 0,1,$$

$$\Delta_{\nu,\alpha_1;j1}(q_1 R_0, q_1 R_1) = U_{\nu,\alpha_1;11}^{01}(q_1 R_0)U_{\nu,\alpha_1;j1}^{12}(q_1 R_1) - U_{\nu,\alpha_1;11}^{02}(q_1 R_0)U_{\nu,\alpha_1;j1}^{11}(q_1 R_1), \; j = 1,2.$$

Припустимо, що функція Коші

$$\mathrm{E}_2(r,\rho) = \begin{cases} \bar{\mathrm{E}}_2(r,\rho) \equiv C_1 r^{-\alpha_2 - q_2} + D_1 r^{-\alpha_2 + q_2}, & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \overset{+}{\mathrm{E}}_2(r,\rho) \equiv C_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + D_2 r^{-\alpha_2 + q_2}, & R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha_2 - q_2} + (D_2 - D_1)\rho^{-\alpha_2 + q_2} = 0,$$

$$(\alpha_2 + q_2)(C_2 - C_1)\rho^{-\alpha_2 - q_2} + (\alpha_2 - q_2)(D_2 - D_1)\rho^{-\alpha_2 + q_2} = \rho^{-2\alpha_2}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = \frac{1}{2q_2}\rho^{-\alpha_2 + q_2}, \quad D_2 - D_1 = -\frac{1}{2q_2}e^{-\alpha_2 - q_2}. \tag{9}$$

Доповнимо рівності (9) алгебраїчними рівняннями:

$$\left.\left(\alpha_{12}^1 \tfrac{d}{dr} + \beta_{12}^1\right)\bar{\mathrm{E}}_2\right|_{r=R_1} = 0: \quad \left.\left(\alpha_{22}^2 \tfrac{d}{dr} + \beta_{22}^2\right)\overset{+}{\mathrm{E}}_2\right|_{r=R_2} = 0: \quad \begin{cases} Z_{\alpha_2,12}^{11}(q_2, R_1)C_1 + Z_{\alpha_2,12}^{12}(q_2, R_1)D_1 = 0 \\ Z_{\alpha_2,22}^{21}(q_2, R_2)C_2 + Z_{\alpha_2,22}^{22}(q_2, R_2)D_2 = 0 \end{cases}. \tag{10}$$

Внаслідок співвідношень (9) алгебраїчна система (10) набуває вигляду:

$$Z_{\alpha_2,12}^{11}(q_2, R_1)C_1 + Z_{\alpha_2,12}^{12}(q_2, R_1)D_1 = 0,$$

$$Z^{21}_{\alpha_2,22}\left(q_2,R_2\right)C_1+Z^{22}_{\alpha_2,22}\left(q_2,R_2\right)D_1=\frac{1}{2q_2}\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}\left(q_2,\rho\right).$$

Згідно правила Крамера маємо:

$$C_1=-\frac{Z^{12}_{\alpha_2,12}\left(q_2,R_1\right)\Psi^{2*}_{\alpha_2,22}\left(q_2,\rho\right)}{2q_2\Delta_{\alpha_2;12}\left(q_2,R_1,R_2\right)},\qquad D_1=\frac{Z^{11}_{\alpha_2,12}\left(q_2,R_1\right)\Psi^{2*}_{\alpha_2,22}\left(q_2,\rho\right)}{2q_2\Delta_{\alpha_2;12}\left(q_2,R_1,R_2\right)}.$$

Цим функція Коші $\mathrm{E}_2\left(r,\rho\right)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$\mathrm{E}_2\left(r,\rho\right)=-\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_2;12}}\begin{cases}\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}\left(q_2,r\right)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}\left(q_2,\rho\right), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Psi^{1*}_{\alpha_2;12}\left(q_2,\rho\right)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}\left(q_2,r\right), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases}. \tag{11}$$

У рівностях (10), (11) беруть участь функції:

$$Z^{m1}_{\alpha_2,j2}\left(q_2,R_m\right)=\left[\beta^m_{j2}-\left(\alpha_2+q_2\right)\alpha^m_{j2}R_m^{-1}\right]R_m^{-\alpha_2-q_2},$$

$$Z^{m2}_{\alpha_2,j2}\left(q_2,R_m\right)=\left[\beta^m_{j2}-\alpha^m_{j2}\alpha_2R_1^{-1}+\alpha^m_{j2}q_2R_m^{-1}\right]R_m^{-\alpha_2+q_2},\quad m,j=1,2,$$

$$\Psi^{m*}_{\alpha_2,j2}\left(q_2,r\right)=Z^{m2}_{\alpha_2,j2}\left(q_2,R_m\right)r^{-\alpha_2-q_2}-Z^{m1}_{\alpha_2,j2}\left(q_2,R_m\right)r^{-\alpha_2+q_2},$$

$$\Delta_{\alpha_2,j2}\left(q_2,R_1,R_2\right)=Z^{11}_{\alpha_2;j2}\left(q_2,R_1\right)Z^{22}_{\alpha_2;22}\left(q_2,R_2\right)-Z^{12}_{\alpha_2;j2}\left(q_2,R_1\right)Z^{21}_{\alpha_2;22}\left(q_2,R_2\right),\ j=1,2.$$

Повернемось до формул (4). Умови спряження (2) та крайові умови (3) для визначення величин $\mathrm{A}_j$, $\mathrm{B}_j$ $\left(j=1,2\right)$ дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{aligned}&U^{01}_{\nu,\alpha_1;11}\left(q_1R_0\right)\mathrm{A}_1+U^{02}_{\nu,\alpha_1;11}\left(q_1R_0\right)\mathrm{B}_1=g_0,\\&U^{11}_{\nu,\alpha_1;11}\left(q_1R_1\right)\mathrm{A}_1+U^{12}_{\nu,\alpha_1;11}\left(q_1R_1\right)\mathrm{B}_1-Z^{11}_{\alpha_2;12}\left(q_2,R_1\right)\mathrm{A}_2-Z^{12}_{\alpha_2;12}\left(q_2,R_1\right)\mathrm{B}_2=\omega_{11},\\&U^{11}_{\nu,\alpha_1;21}\left(q_1R_1\right)\mathrm{A}_1+U^{12}_{\nu,\alpha_1;21}\left(q_1R_1\right)\mathrm{B}_1-Z^{11}_{\alpha_2;22}\left(q_2,R_1\right)\mathrm{A}_2-Z^{12}_{\alpha_2;22}\left(q_2,R_1\right)\mathrm{B}_2=\omega_{21}+G_{12},\\&Z^{21}_{\alpha_2;22}\left(q_2,R_2\right)\mathrm{A}_2+Z^{22}_{\alpha_2;22}\left(q_2,R_2\right)\mathrm{B}_2=g_R.\end{aligned}\tag{12}$$

У системі (12) функція

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi^{0*}_{\nu,\alpha_1;11}\left(q_1R_0,q_1\rho\right)}{\Delta_{\nu,\alpha_1;11}\left(q_1R_0,q_1R_1\right)}g_1\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}\left(q_2,\rho\right)}{\Delta_{\alpha_2;12}\left(q_2,R_1,R_2\right)}g_2\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\left\{q_1;q_2\right\}$ визначник алгебраїчної системи (12)

$$\Delta_{\nu,(\alpha)}\left(q\right)\equiv\Delta_{\alpha_1;21}\left(q_1,R_1,R_2\right)\Delta_{\alpha_2,12}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)-\Delta_{\alpha_1;11}\left(q_1,R_1,R_2\right)\Delta_{\alpha_2;22}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)\neq0. \tag{13}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$\begin{aligned}&W_{\nu,(\alpha);11}\left(r,q\right)=\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}\left(q\right)}\left[\Delta_{\alpha_2;22}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;11}\left(q_1R_1,q_1r\right)-\Delta_{\alpha_2;12}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;21}\left(q_1R_1,q_1r\right)\right],\\&W_{\nu,(\alpha);12}\left(r,q\right)=-\frac{c_{11}}{b_1^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}\left(q\right)}\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}\left(q_2,r\right),\quad\left(\alpha\right)=\left(\alpha_1,\,\alpha_2\right);\end{aligned}\tag{14}$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_2$ функції Гріна

$$\begin{aligned}&W_{\nu,(\alpha);21}\left(r,q\right)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}\left(q\right)}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha_1;11}\left(q_1R_0,q_1r\right),\quad q=\left(q_1,q_2\right),\\&W_{\nu,(\alpha);22}\left(r,q\right)=\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}\left(q\right)}\left[\Delta_{\nu,\alpha_1;11}\Psi^{1*}_{\alpha_2;22}\left(q_2,r\right)-\Delta_{\nu,\alpha_1;21}\left(q_1R_0,q_1R_1\right)\Psi^{1*}_{\alpha_2,12}\left(q_2,r\right)\right],\end{aligned}\tag{15}$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\Re^1_{\nu,(\alpha);11}(r,q) = -\frac{\Delta_{\alpha_2,22}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r), \quad \Re^1_{\nu,(\alpha);21}(r,q) = \frac{\Delta_{\alpha_2,12}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$\Re^2_{\nu,(\alpha);11}(r,q) = -\frac{\Delta_{\nu,\alpha_1;21}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,r), \quad \Re^2_{\nu,(\alpha);21}(r,q) = \frac{\Delta_{\nu,\alpha_1;11}}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{2*}_{\alpha_2,22}(q_2,r), \quad (16)$$

4) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);11}(r,\rho,q) = -q_1^{2\alpha_1}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r)W_{\nu,(\alpha);11}(\rho,q), & R_0<r<\rho<R_1\\ \Psi^{0*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1\rho)W_{\nu,(\alpha);11}(r,q), & R_0<\rho<r<R_1\end{cases},$$

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1r)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,\rho),$$

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{\nu,(\alpha)}(q)}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_1R_0,q_1\rho)\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,r), \quad (17)$$

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);22}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_2}\begin{cases}\Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,\rho)W_{\nu,(\alpha);22}(r,q), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Psi^{2*}_{\alpha_2;22}(q_2,r)W_{\nu,(\alpha);22}(\rho,q), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (12), підстановки отриманих значень $\mathrm{A}_j, \mathrm{B}_j$ $(j=1,2)$ у формули (4) та низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W_{\nu,(\alpha);1j}(r,q)g_0 + W_{\nu,(\alpha);2j}(r,q)g_R + \Re^j_{\nu,(\alpha);11}(r,q)\omega_{11} + \Re^j_{\nu,(\alpha);21}(r,q)\omega_{21} +$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho, \quad j=1,2. \quad (18)$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині $\mathrm{I}_1$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\mathrm{B}^*_{\alpha_2}, \ (\alpha)=(\alpha_1,\,\alpha_2), \quad (19)$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Оператор $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений й на множині $\mathrm{I}_1$ немає особливих точок. Тому його спектр дискретний [4]: власні числа дійсні, різні, симетричні відносно нуля, утворюють за модулем монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою в нескінченності. При цьому кожному власному числу відповідає одна власна функція.

Власні елементи ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$ знайдемо як розв'язок відповідної спектральної задачі Штурма-Ліувілля: побудувати на множині $\mathrm{I}_1$ ненульовий розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя та Ейлера

$$\left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1} + b_1^2\right)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \quad r\in(R_0,R_1),$$
$$\left(\mathrm{B}^*_{\alpha_2} + b_2^2\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0, \quad r\in(R_1,R_2) \quad (20)$$

за однорідними крайовими умовами

$$\left(\alpha^0_{11}\, d/dr + \beta^0_{11}\right)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0} = 0, \quad \left(\alpha^2_{22}\, d/dr + \beta^2_{22}\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Big|_{r=R_2} = 0 \quad (21)$$

та однорідними умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \tfrac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^1 \tfrac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_1}=0,\ j=1,2, \tag{22}$$

$$b_j \equiv b_j(\beta)=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2},\quad k_j^2\ge 0,\quad j=1,2.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}+b_1^2\right)v=0$ утворюють функції Бесселя $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(\mathrm{B}^*_{\alpha_2}+b_2^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r)$ [2].

Визначимо функції:

$$u^{m1}_{\nu,\alpha_1;jk}(b_1R_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha_1}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)J_{\nu,\alpha_1}(b_1R_m)-\alpha^m_{jk}\,b_1^2R_m\,J_{\nu+1,\alpha_1+1}(b_1R_m),$$

$$u^{m2}_{\nu,\alpha_1;jk}(b_1R_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha_1}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)N_{\nu,\alpha_1}(b_1R_m)-\alpha^m_{jk}\,b_1^2R_m\,N_{\nu+1,\alpha_1+1}(b_1R_m),$$

$$\delta_{\nu,\alpha_1;j1}(\beta)=u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)\,u^{12}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)-u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)\,u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1),\ j=1,2,$$

$$Y^{m1}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_m)=\left[\left(\beta^m_{j2}-\alpha_2R_m^{-1}\alpha^m_{j2}\right)\cos(b_2\ln R_m)-\alpha^m_{j2}\,R_m^{-1}b_2\sin(b_2\ln R_m)\right]R_m^{-\alpha_2},$$

$$Y^{m2}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_m)=\left[\left(\beta^m_{j2}-\alpha_2R_m^{-1}\alpha^m_{j2}\right)\sin(b_2\ln R_m)+\alpha^m_{j2}\,R_m^{-1}b_2\cos(b_2\ln R_m)\right]R_m^{-\alpha_2},$$

$$\delta_{\alpha_2;j2}(\beta)=Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)\,Y^{22}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)\,Y^{21}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2),\ j=1,2.$$

Якщо покласти

$$\begin{aligned}V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)&=\mathrm{A}_1J_{\nu,\alpha_1}(b_1r)+\mathrm{B}_1N_{\nu,\alpha_1}(b_1r),\quad r\in(R_0,R_1),\\ V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)&=\mathrm{A}_2r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)+\mathrm{B}_2r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r),\ r\in(R_1,R_2),\end{aligned} \tag{23}$$

то крайові умови (21) та умови спряження (22) для визначення величин $\mathrm{A}_j,\mathrm{B}_j\ (j=1,2)$ дають однорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{gathered}u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)\,\mathrm{A}_1+u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)\,\mathrm{B}_1=0,\\ u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)\,\mathrm{A}_1+u^{12}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)\,\mathrm{B}_1-Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)\,\mathrm{A}_2-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)\,\mathrm{B}_2=0,\ j=1,2,\\ Y^{21}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)\,\mathrm{A}_2+Y^{22}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)\,\mathrm{B}_2=0.\end{gathered} \tag{24}$$

Алгебраїчна система (24) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник

$$\delta_{\nu,(\alpha)}(\beta)\equiv\delta_{\nu,\alpha_1;21}(\beta)\,\delta_{\alpha_2;12}(\beta)-\delta_{\nu,\alpha_1;11}(\beta)\,\delta_{\alpha_2;22}(\beta)=0. \tag{25}$$

Корені $\beta_n$ трансцендентного рівняння (25) утворюють дискретний спектр ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}:\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$.

У результаті розв'язання алгебраїчної системи (24) при $\beta=\beta_n$ $\left(b_j(\beta_n)=b_{jn}\right)$ знаходимо, що спектральному параметру $\beta_n$ відповідає спектральна функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n), \tag{26}$$

компоненти $V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)$ якої обчислюються за правилами:

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)=\frac{c_{21}b_{2n}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\left[u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0)\,N_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r)-u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0)\,J_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r)\right], \tag{27}$$

$$\begin{aligned}V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)&=\delta_{\nu,\alpha_1;11}(\beta_n)\left[Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_{2n},R_1)\cos(b_{2n}\ln r)-Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_{2n},R_1)\sin(b_{2n}\ln r)\right]r^{-\alpha_2}-\\ &-\delta_{\nu,\alpha_1;21}(\beta_n)\left[Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_{2n},R_1)\cos(b_{2n}\ln r)-Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_{2n},R_1)\sin(b_{2n}\ln r)\right]r^{-\alpha_2}.\end{aligned}$$

Згідно з роботою [4] маємо твердження:

*Теорема* (про зображення). Будь-яка вектор-функція

$$g(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)g_1(r)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)g_2(r)$$

з області визначення ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$ зображається абсолютно та рівномірно збіжним рядом Фур'є за системою власних вектор-функцій $\left\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_2}g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)\,d\rho\frac{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}. \quad (28)$$

У рівності (28) бере участь квадрат норми власної функції

$$\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2=\int_{R_0}^{R_1}\left[V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr+\int_{R_1}^{R_2}\left[V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr$$

та вагова функція

$$\sigma(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1},$$

$$\sigma_1=c_{11}R_1^{2\alpha_2+1}:c_{21}R_1^{2\alpha_1+1},\quad \sigma_2=1.$$

Ряд Фур'є (28) визначає пряме $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha)}$ та обернене $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha)}^{-1}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 2-го роду – Ейлера 2-го роду:

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha)}\left[g(r)\right]=\int_{R_0}^{R_2}g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)\,dr\equiv\tilde{g}_n, \quad (29)$$

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha)}^{-1}\left[\tilde{g}_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\left(\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1}\equiv g(r). \quad (30)$$

Побудований методом запровадженого формулами (29), (30) інтегрального перетворення за відомою логічною схемою [5] єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3) має структуру:

$$u_j(r)=\sum_{m=1}^{2}\int_{R_{m-1}}^{R_m}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);m}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_m(\rho)\sigma_m\varphi_m(\rho)\,d\rho+$$

$$+\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{c_{21}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\omega_{21}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^1_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\omega_{11}\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta_n)}{\alpha_{22}^2(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}R_2^{2\alpha_2+1}g_R,$$

$$\varphi_1(r)=r^{2\alpha_1+1},\quad \varphi_2(r)=r^{2\alpha_2-1},\quad Z^1_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n)=\left(\alpha_{i2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^1\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_1}; \quad (31)$$

$$i,j=1,2;\quad q^2=\max\left\{q_1^2,q_2^2\right\}.$$

Порівнюючи розв'язки (18) та (31) в силу єдиності, маємо формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n)}{(\beta_n^2+q^2)\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=\frac{1}{\sigma_k}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q),\quad j,k=1,2, \quad (32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)V_{\nu,(\alpha);1}\left(R_0,\beta_n\right)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}=\frac{1}{\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}}W_{\nu,(\alpha);1j}\left(r,q\right),\quad j=1,2, \tag{33}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)V_{\nu,(\alpha);2}\left(R_2,\beta_n\right)}{\alpha_{22}^2\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}=\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}}W_{\nu,(\alpha);2j}\left(r,q\right),\quad j=1,2, \tag{34}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^1_{\nu,(\alpha);12}\left(\beta_n\right)V_{\nu,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\Re^j_{\nu,(\alpha);21}\left(r,q\right),\quad j=1,2, \tag{35}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^1_{\nu,(\alpha);22}\left(\beta_n\right)V_{\nu,(\alpha);j}\left(r,\beta_n\right)}{\left(\beta_n^2+q^2\right)\left\|V_{\nu,(\alpha)}\left(r,\beta_n\right)\right\|^2}=-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\Re^j_{\nu,(\alpha);11}\left(r,q\right),\quad j=1,2. \tag{36}$$

**Основна теорема:** Якщо вектор-функція $f(r)=\left\{\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}\left[g_1(r)\right],\ \mathrm{B}^*_{\alpha_2}\left[g_2(r)\right]\right\}$ неперервна на множині $\mathrm{I}_1$, а вектор-функція $g(r)$ задовольняє крайові умови (3) й умови спряження (2) та виконується умова (13) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (32)-(36) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $\mathrm{M}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (19).

Якщо $\max\left\{q_1^2;q_2^2\right\}=q_1^2$, то

$$q^2=q_1^2,\ \ k_1^2=0,\ \ k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0\ \ \left(b_{1n}=\beta_n,\ b_{2n}=\sqrt{\beta_n^2+q_1^2-q_2^2}\right).$$

Якщо $\max\left\{q_1^2;q_2^2\right\}=q_2^2$, то

$$q^2=q_2^2,\ \ k_1^2=q_2^2-q_1^2,\ \ k_2^2=0\ \ \left(b_{1n}=\left(\beta_n^2+q_2^2-q_1^2\right)^{1/2},\ b_{2n}=\beta_n\right).$$

Оскільки праві частини в рівностях (32)-(36) не залежать від нерівності $\left(q_1^2-q_2^2\right)\ge 0$ або нерівності $\left(q_2^2-q_1^2\right)\ge 0$, то можна покласти $q_1^2=q_2^2\equiv q^2$ $\left(k_1^2=k_2^2=0,\ b_{1n}\equiv b_{2n}=\beta_n\right)$, звужуючи при цьому сім'ю функціональних рядів.

**Висновок**

Результати даної статті поновлюють довідкову математичну літературу й можуть бути використані при підсумовуванні функціональних рядів за власними елементами ГДО, які появляються при моделюванні фізико-технічних процесів в неоднорідних середовищах.

**Література**

1. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 61с. - (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физ.-матгиз, 1959. - 468с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328с.
4. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. - Чернівці: Прут,2001. - 228с.
5. Ленюк М.П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридних диференціальних операторів типу (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том VI. - Чернівці: Прут, 2006. - 376с.

*Одержано 20.05.2008 р.*