СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО РОСТУ ВТОМНОЇ ТРІЩИНИ

Л.С. Мельничок

STOCHASTIC MODEL OF FATIGUE CRACK DISCRETE GROWTH

L.S. Mel'nychok

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

Abstract Proceeding from the analyses of experimental data a stochastic model of a fatigue crack descrete growth has been proposed. It describes qualitatively the mechanism of damage accumulation in the process zone. This model includes characteristics of fatigue crack growth resistance of the materials, which determine the experimental scatter of specimens durability. A procedure of prediction of the probability parameters of structural elements life time under cyclic loading, which is necessary for their reliability assessment has been proposed. The mentioned procedure of life time assessment can be used for expert systems constructions.

В багатьох практичних випадках експлуатація конструкцій з тріщинами при циклічних навантаженнях є виправданою, а іноді необхідною. Це стосується великих та дорогих конструкцій при виготовленні яких внаслідок технологічних особливостей неможливо уникнути тріщиноподібних дефектів (наприклад, котли електростанцій, вали прокатних станів, несучі елементи мостів), або конструкцій, які не втрачають несучої здатності навіть при наявності в них помітних тріщин значного розміру (крила літаків). В таких випадках особливої ваги набуває здатність контролювати розвиток тріщини та прогнозувати її ріст.

Усталена схема дослідження росту тріщини при циклічному навантаженні (втомної тріщини) ґрунтується на припущенні, що її швидкість (v), тобто приріст довжини тріщини за один цикл навантаження визначається найбільшим значенням (K_{max}) і/або амплітудою (ΔK) коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) у вершині тріщини. Надалі характерний КІН позначатимемо K, вважаючи, що асиметрія циклу навантаження є експлуатаційним фактором. Величина КІН пропорційна прикладеному навантаженню і залежить від геометричних параметрів конструктивного елемента з тріщиною: $K(l) = P \times f_k(l)$, де P – навантаження. Залежність $f_k(l)$ для конкретної деталі визначають на основі моделі лінійно-пружного тіла з ідеальним розрізом, або у складних випадках експериментально. Такий підхід, починаючи з роботи Паріса, Ґомеза та Андерсона [1], покладено в основу досліджень здатності матеріалів чинити опір поширенню втомних тріщин – циклічної тріщиностійкості (ЦТ). У вказаній роботі запропоновано також представлення

$$v = C \times K^n, \text{ (закон Паріса).} \quad (1)$$

Дослідження проводять на стандартних зразках для яких залежність $K(l)$ відома. Вимірюють довжину тріщини l при відповідному числі циклів навантаження N. Нехай в результаті випробувань одержано набір даних $\{l_i, N_i\}_{i=0}^{n}$. Первинна обробка даних полягає в перетворенні цього масиву в масив $\{K_i, v_i\}_{i=1}^{n}$. З математичної точки зору задача зводиться до диференціювання залежності $l - N$. Найпростішим методом визначення швидкості росту втомної тріщини (РВТ) є метод січень:

$$v_i = (l_{i+1} - l_i)/(N_{i+1} - N_i).$$

Визначену таким способом швидкість РВТ відносять до середньої довжини тріщини $\bar{l} = (l_{i+1} + l_i)/2$, за якою визначають відповідний коефіцієнт інтенсивності напружень K_i. Графічне представлення результатів первинної обробки $\{lg(K_i), lg(v_i)\}_{i=1}^{n}$ називають діаграмою втомного руйнування (ДВР). Використання логарифмічних шкал зручне з огляду на те, що діапазон зміни швидкості РВТ охоплює 4-5 порядків, а закон Паріса (1) представляється прямою.

На другому етапі обробки даних випробувань, результати первинної обробки $\{K_i, v_i\}_{i=1}^{n}$ наближають аналітичним виразом наперед заданого виду $v=\varphi(a_1,...,a_p,K)$. Саме цей вираз в більшості публікацій називають математичною моделлю РВТ, а параметри залежності вважають характеристиками циклічної тріщиностійкості матеріалу. Для визначення параметрів наближення використовують метод найменших квадратів.

Описана схема дослідження циклічної тріщиностійкості матеріалів має кінцевою метою використання результатів для обчислення ресурсу елементів конструкцій. З вищенаведеного випливає, що цю задачу можна вирішити інтегруванням

$$N_p = \int_{l_0}^{l_c} \frac{dl}{\varphi[A, K(l)]}, \tag{2}$$

де N_p – ресурс деталі, l_0, l_c – початкова та критична довжини тріщини, $A=\{a_i\}_{i-1}^{p}$ - характеристики циклічної тріщиностійкості. Докладне дослідження виразів для представлення залежності $v=\varphi(a_1,...,a_p,K)$, як з точки зору адекватності моделі, так і зручності практичного використання проводилось раніше [2].

Відзначимо, що описаний підхід виходить з припущення про детермінований ріст втомної тріщини, хоча на практиці спостерігають суттєво стохастичний характер цього процесу. Неспівпадіння експериментальних даних та розрахунків за формулою (2) намагались обґрунтувати експериментальними похибками при визначенні параметрів моделі, однак, цього виявилось недостатньо для пояснення спостережуваного розкиду ресурсу при випробуванні зразків. Тому, важливою задачею є побудова ймовірнісної моделі для адекватного опису РВТ.

Прогнозування стохастичних параметрів ресурсу в останні десятиліття є предметом багаточисельних, як теоретичних, так і експериментальних досліджень. Якщо проаналізувати запропоновані в цих роботах підходи до вирішення задачі імовірнісного опису та прогнозування довговічності, то можна виділити два принципово різних шляхи.

У першому випадку виходять з того, що характеристики механічних властивостей матеріалу слід розглядати як випадкові величини, і тому припускається розкид їх значень при випробуванні різних зразків. Отже, припускається, що випадкова поведінка втомної тріщини зумовлена випадковістю параметрів рівняння РВТ

$$v = dl/dN = f[\{a_i\}_{i=1}^{p}, K(l)], \tag{3}$$

де dl/dN – швидкість РВТ (число циклів N вважають дійсним), $f[.,.]$ - залежність відомого вигляду, $\{a_i\}_{i=1}^{p}$ - характеристики ЦТ металу, які вважають випадковими величинами що приймають визначені для конкретного зразка значення $K(l)$ – характерний коефіцієнт інтенсивності напружень.

Очевидний недолік такого способу стохастичного опису РВТ полягає в тому, що після вибору конкретних значень випадкових параметрів тріщина росте за детермінованим законом. Тобто залежність $l = f(N)$ в такому випадку представляється гладкою кривою, що суперечить експериментальним результатам.

Другий підхід розглядається в роботі Ліна та Янга [3]. Рівняння РВТ записується у вигляді

$$v = dl/dN = f[\{a_i\}_{i=1}^{p}, K(l)] \times X(N), \tag{4}$$

де *X(N)* – невід'ємний випадковий процес, а характеристики ЦТ $\{a_i\}_{i=1}^{p}$ детерміновані. Основною проблемою при такому підході є вибір моделі для випадкового процесу *X(N)*.

Віклер та ін. [4] вивчають таку модель при умові, що $X(N_1)$ і $X(N_2)$ незалежні при $N_1 \neq N_2$. В іншому випадку приймається що *X(N) = X* – випадкова величина незалежна від *N*. Відмічено, що у першому випадку дисперсія числа циклів за яке досягається заданий розмір тріщини є найменшою, а в другому, найбільшою.

В роботі [3] допускають існування залежності між приростами довжин тріщини на протязі Δ циклів навантаження. Однак, таке припущення суперечить експериментальним даним. На основі даних одержаних при випробуванні дискових зразків з магнієвого сплаву МА18 перевірялась гіпотеза про незалежність послідовності приростів тріщин за критерієм Аббе. Не виявлено кореляції послідовних приростів при значеннях ΔN рівних 800, 1000, 3000 циклів [5]. Відсутність кореляції підтверджується також спеціально проведеними дослідженнями. Отже, припущення про залежність послідовних приростів тріщини це штучний прийом для узгодження моделі з даними випробувань.

Обидва описані підходи по суті відрізняються тим, що в першому випадку спостережуване розсіяння довговічності пояснюється відмінністю характеристик ЦТ від зразка до зразка, а в другому тільки структурною неоднорідністю матеріалу. Для обгрунтування методики дослідження ЦТ випадковим вважали приріст довжини тріщини при фіксованому числі циклів навантаження. Можна поступити навпаки: зафіксувавши величину приросту, розглядати число циклів за яке цей приріст досягається, як випадкову величину. Такий підхід видається логічним враховуючи, що остаточною метою досліджень є ресурс деталі, який буде представлений сумою незалежних випадкових величин. Експериментальні дослідження проведені таким способом описані в роботі [6].

Припустимо, що циклічний приріст (ЦП) – випадкова величина ξ зі скінченним математичним сподіванням і дисперсією, розподіл якої повністю визначається величиною *K*:

$$M(\xi) = v(K);\; D(\xi) = \sigma^2(K).$$

Приріст довжини тріщини, що спостерігається за ΔN циклів навантаження представляється сумою $\Delta l = \sum_{i=1}^{\Delta N} \xi_i$, доданки якої будем вважати незалежними. На основі даних випробувань показано що Δl і, отже, експериментальна оцінка швидкості РВТ $\bar{v} = \Delta l / \Delta N$ розподілені за нормальним законом, причому $M(\bar{v}) = v,\ D(\bar{v}) = \sigma^2 / \Delta N$. Встановлено також, що між оцінками $\bar{v}$ і $\bar{\sigma}$ існує кореляція, яка дозволяє постулювати залежність $\sigma = Av^m$, параметри якої A та m характеризують розсіяння ресурсу обумовлене структурною неоднорідністю матеріалу і можуть бути визначеними при вторинній обробці експериментальних даних. Далі припустимо, що ξ – дискретна випадкова величина, яка приймає значення 0 і Δl з ймовірностями *1-p* і *p* відповідно. Таке припущення узгоджується з результатами багатьох досліджень. Тоді

$$M(\xi) = v = p\,\Delta l;\; D(\xi) = \sigma^2 = A^2 v^{2m} = \Delta l^2 p(1-p).$$

Звідси визначимо

$$\Delta l = v + A^2 v^{2m-1};\quad p = (A^2 v^{2m-2} + 1)^{-1}. \tag{5}$$

В інженерних розрахунках необхідно обчислити ресурс N_p -- число циклів навантаження, за яке довжина тріщини зростає від початкового значення l_0 до критичного l_c При прийнятих припущеннях тріщина росте дискретно і, отже, її траекторія ділиться на ділянки довжиною $\Delta l_i\,(i = \overline{1, N_0})$ (див. рис 1).

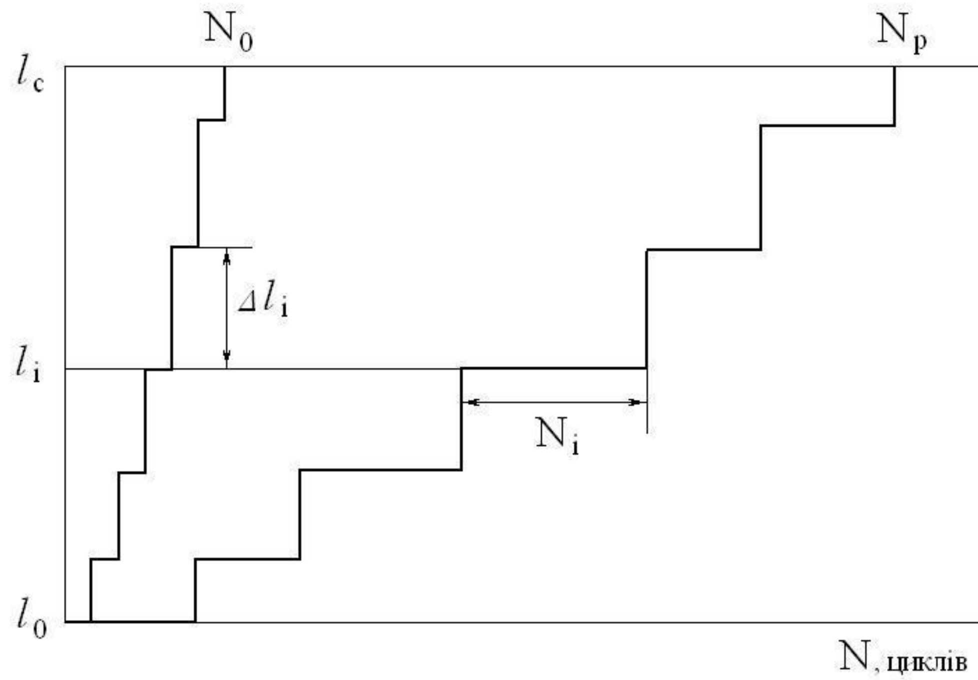

Рис. 1. Схематичне зображення дискретного росту втомної тріщини.

Як видно з формули (5), довжина тріщини може приймати фіксований ряд значень, а її ріст можна описати дискретним марківським процесом. В такому випадку задача прогнозування ресурсу зводиться до сумування чисел циклів навантаження на протязі яких тріщина перебуває в кожному стані. Інтервал між фіксованими станами тріщини Δl_i можна інтерпретувати як розмір зони перед руйнування [7].

Для неперервної апроксимації граничної кривої росту втомної тріщини можна приблизно записати рівняння $dl/dN = \Delta l$. Звідси для нижньої границі ресурсу одержимо вираз

$$N_0 = \int_{l_0}^{l_c} \frac{dl}{v + A^2 v^{2m-1}} \tag{6}$$

В загальному випадку, після досягнення тріщиною довжини $l_i = \sum_{j=1}^{i} \Delta l_j$, вона протягом N_i циклів не росте. З незалежності ЦП випливає, що N_i – цілочисельна випадкова величина з геометричним розподілом. Враховуючи (5) визначають її математичне сподівання та дисперсію. Сумуючи обчислені значення при $i = \overline{1, N_0}$, для математичного сподівання і дисперсії ресурсу можна одержати такі інтегральні представлення

$$M(N_p) = \int_{l_0}^{l_c} \frac{dl}{v}; \quad D(N_p) = A^2 \int_{l_0}^{l_c} v^{2m-3} dl, \tag{7}$$

де $v = f[K(l)]$.

Інтегральна оцінка математичного сподівання співпадає з формулою, якою користуються для обчислення довговічності в рамках детерміністичних уявлень про РВТ. Для дисперсії ресурсу отримана проста формула яка містить параметри A і m, які визначаються експериментально. Отриманий вираз свідчить, що їх можна вважати характеристиками дисперсних властивостей матеріалу.

Для вибору закону розподілу ресурсу скористаємось результатами експериментальних досліджень. Віклер і ін. [4] порівнюючи якість наближення експериментально одержаних розподілів N_p різними теоретичними законами прийшли до однозначного висновку, що для їх опису найбільше підходить трипараметричний логнормальний закон розподілу, тобто величина $lg(N_p\text{-}N_0)$ розподілена по нормальному закону $N(m_p;\ s^2)$. Математичне сподівання і дисперсія величини $lg(N_p)$ при такому розподілі можна обчислити за формулами

$$s^2 = D(\lg N_p) = \lg\left\{ \frac{D(N_p)}{\left[M(N_p) - N_0\right]^2} + 1 \right\}, \tag{8}$$

$$m_p = M(lg\, N_p) = lg[\, M(\, N_p\,) - N_0\,] - s^2\, /\, 2\, . \tag{9}$$

При довірчій ймовірності β, довірчий інтервал для N_p задається нерівностями

$$m_p - \lambda s < lg(\, N_p - N_0\,) < m_p + \lambda s \tag{10}$$

де λ – квантиль порядку (β+1)/2 нормального розподілу.

Виведені формули можна застосовувати для уточнення ймовірнісних характеристик ресурсу при поточному контролі за ростом втомної тріщини. На основі результатів спостереження можна уточнити значення параметрів розрахункової моделі і, таким чином, обмежити складову розсіяння викликану випадковими факторами пов'язаними з умовами експлуатації.

Література

1. Paris P.C., Gomez M.P., Anderson W.E. A rational analytic theory of fatique // Trend in engineering. – 1961 – 13, N16. – P. 9 - 14.
2. Мельничок Л.С. Математичне моделювання та дослідження росту втомних тріщин. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Львів, ФМІ НАНУ, 1995. – 16 с.
3. Lin Y.K., Yang J.N. On statistical moments of crack propagation // Eng. Fract. Mech. – 1983. – 18, №2. – P. 243 – 256.
4. Virkler D.A., Hillbery B.M., Goel P.K. The statistical nature of fatique crack propagation // J. Eng. Mat. and Technology. – 1979. – 101, №2. – P. 148–153.
5. Ярема С.Я., Мельничок Л.С., Попов Б.А. Рассеяние скорости роста усталостной трещины и обработка экспериментальных данных // Физ.-хим. механика материалов. – 1984. – №3. – С. 59–65.
6. Прокопенко А.В., Баумштейн М.В. Оценка усталостной живучести компрессорных лопаток ГТД в вероятностном аспекте // Проблемы прочности. – 1983. – №11. – С. 74 – 76.
7. Осташ О.П. Про побудову діаграми швидкостей росту втомної макротріщини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003.–№2.–С. 81 – 83.