

УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ТОРМОЗНОГО БАРАБАНА АВТОМОБИЛЯ

Ш.Г. Гейдаров

FATIGUE FRACTURE OF THE BRAKE DRUM OF A CAR

Sh.G. Heidarov

Азербайджанский технический университет, Азербайджан

Abstract The problem of fatigue fracture mechanics for a drum of brake system of the car has been considered. It is assumed that at multifold braking the fatigue fracture of materials caused by a contact interaction and accompanied by action temperature takes place with friction. It is considered that there are cracks near the surface of the brake drum, contact. By the methods of analytical functions theory the problem considered is reduced to the system of singular integral equations and to the infinite system of linear algebraic equations. The procedure of defining stress-intensity factors is shown. It is investigated kinetics of fatigue cracks of materials brake drum. Calculation of the period subcritical growth of fatigue crack is carried out. In the calculations the function describing the roughness of the drum surface has been assumed to be a stationary random function with a zero average value and known dispersion.

Введение. При повторно-кратковременном режиме торможения автомобиля тормозной барабан и фрикционная накладка испытывают многократное циклическое нагружение. Поэтому барабан и накладка должны иметь достаточное сопротивление усталостному разрушению при циклических воздействиях.

В связи с этим исследование кинетики усталостного разрушения и расчет периода докритического роста усталостной трещины имеют большое практическое значение, так как позволяют прогнозировать долговечность фрикционной пары в заданных условиях эксплуатации и открывают новые возможности по оптимизации работоспособности тормозной системы автомобиля.

Фрикционная пара барабан – фрикционная накладка работает в условиях сложного напряженного состояния. На пятнах фактического касания происходит сильный нагрев в тонких приповерхностных слоях, что служит причиной образования прижогов, термических пятен и очагов микротрещин.

Расчетная модель. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в барабане при торможении автомобиля. Барабан ослаблен N_0 произвольно размещенными прямолинейными трещинами длиной $2\ell_k$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$). В центрах трещин разместим начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$, оси x_k которых совпадают с линиями трещин и образуют углы α_k с осью x . Считаем, что внутренний контур барабана близок к круговому. Как известно, реальная поверхность барабана никогда не бывает абсолютно гладкой, а всегда имеет неровности, являющиеся неизбежным следствием процесса обработки. Несмотря на исключительно малые размеры неровностей, проявляющихся в виде шероховатости поверхности, роль их в трении, износе и разрушении очень велика.

Отнесем барабан к полярной системе координат r, θ , выбрав начало координат в центре концентрических дуг окружностей L_0 и L с радиусами R_0 и R . Рассмотрим некоторую реализацию шероховатой внутренней поверхности барабана. Считается, что выполняются условия плоской деформации.

Представим границу внутреннего контура L'_0 барабана в виде

$$r = \rho(\theta) = R_0 + \varepsilon H(\theta), \quad \text{где} \quad H(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^0 \cos k\theta + b_k^0 \sin k\theta); \quad \varepsilon = R_{z, \max} / R_0 \quad - \text{малый}$$

параметр; $R_{z_{\max}}$ – наибольшая высота выступа неровности внутренней поверхности барабана.

Граничные условия на внутреннем и внешнем контурах барабана и берегах трещин имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_n = -g(\theta); \quad \tau_{nr} = -fg(\theta) \quad \text{при } r = \rho(\theta) \text{ на контактной площадке} \\ \sigma_n = 0; \quad \tau_{nr} = 0 \quad \text{при } r = \rho(\theta) \text{ вне площадки контакта} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = R$$

на берегах трещин:

$$\sigma_n - i\tau_{nr} = 0 \quad (2)$$

В (1) принято, что в зоне контакта, кроме давления $g(\theta)$, действует касательное напряжение, связанное с контактным давлением по закону Кулона. Здесь σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений; f – коэффициент трения.

Формально считаем, что контактное давление $g(\theta)$, определяемое из решения контактной задачи о вдавлении накладке в барабан, нам известно [1].

При разработке расчетной методики принимаем следующие общепринятые предположения при оценке усталостной прочности:

1. Размер области пластических деформаций у вершины трещины значительно меньше ее размеров, что позволяет решать поставленную задачу в рамках механики хрупкого разрушения (уровень напряженно-деформированного состояния определяется коэффициентами интенсивности напряжений K_I , K_{II}).

2. Приложенные к барабану нагрузки циклически изменяются во времени, причем частота нагружения не слишком высокая и инерционными эффектами можно пренебречь.

3. Распространение трещины определяется максимальным коэффициентом интенсивности растягивающих напряжений K_p . Трещина будет расти в пределах одного (торможения) цикла нагружения под углом β к своей оси вдоль площадки, на которой возникают максимальные растягивающие напряжения.

4. При проведении расчетов под длиной ℓ понимается эффективная глубина трещины в барабане, равная проекции истинной ее глубины на нормаль к внутренней поверхности барабана.

5. Скорость роста трещины $v = d\ell/dN$ описывается по модифицированной формуле Ли [2]

$$\frac{d\ell}{dN} = A \left[K_{p_{\max}} (1 - R_*)^n - K_{th} \right]^m, \quad (3)$$

где величины β и K_p определяются по формулам [3, 4]

$$\beta = 2 \arctg \left[\frac{1 - \sqrt{1 + 8k^2}}{4k} \right], \quad (4)$$

$$K_p = \cos^2 \frac{\beta}{2} (K_I \cos \beta / 2 - 3K_{II} \sin \beta / 2); \quad k = \frac{K_{II}}{K_I}; \quad K_I > 0;$$

$K_{p_{\max}}$ – максимальное значение K_p ; K_{th} – пороговый коэффициент интенсивности напряжений при циклическом нагружении (порог усталости); R_* – коэффициент асимметрии цикла; A , m , n – характеристики материала, устанавливающиеся на основании эксперимента.

Определение коэффициентов интенсивности напряжений.

Задача определения температуры в тормозном барабане рассмотрена нами в [5]. Для распределения избыточной температуры имеем

$$t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \dots; \quad (5)$$

$$t^{(0)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n^{(0)}(r) \cos n\theta + M_n^{(0)}(r) \sin n\theta] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^{(0)} e^{ik\theta};$$

$$t^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n^{(1)}(r) \cos n\theta + M_n^{(1)}(r) \sin n\theta] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k^{(1)} e^{ik\theta};$$

Здесь функции $F_n^{(0)}(r)$, $M_n^{(0)}(r)$, $F_n^{(1)}(r)$ и $M_n^{(1)}(r)$ в виду громоздкости не приводятся.

Напряжения и перемещения ищем [6] в виде разложений по малому параметру.

Граничные условия задачи в нулевом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} &= -g^{(0)}(\theta); & \tau_{r\theta}^{(0)} &= -fg^{(0)}(\theta) & \text{при } r = R_0 & \text{ на площадке контакта} & (6) \\ \sigma_r^{(0)} &= 0; & \tau_{r\theta}^{(0)} &= 0 & \text{при } r = R_0 & \text{ вне площадки контакта} \\ \sigma_r^{(0)} &= 0; & \tau_{r\theta}^{(0)} &= 0 & \text{при } r = R & \end{aligned}$$

на берегах трещин:

$$\sigma_n^{(0)+} - i\tau_{nt}^{(0)+} = \sigma_n^{(0)-} - i\tau_{nt}^{(0)-} = 0 \quad |x_n| \leq \ell_n \quad (n = 1, 2, \dots, N_0) \quad (7)$$

Для первого приближения

$$\sigma_r^{(1)} = N - g^{(1)}(\theta); \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T - fg^{(1)}(\theta) \quad \text{при } r = R_0 \text{ на площадке контакта} \quad (8)$$

$$\sigma_r^{(1)} = N; \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T \quad \text{при } r = R_0 \text{ вне площадки контакта}$$

$$\sigma_r^{(1)} = 0; \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0 \quad \text{при } r = R$$

$$\sigma_n^{(1)+} - i\tau_{nt}^{(1)+} = \sigma_n^{(1)-} - i\tau_{nt}^{(1)-} = 0 \text{ на берегах трещин} \quad (9)$$

$$\text{Здесь } N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{(0)} \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} \quad \text{при } r = R_0$$

$$T = (\sigma_{\theta}^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \cdot \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r}.$$

Согласно методу возмущений коэффициенты интенсивности напряжений для окрестности кончика трещины ищутся в виде

$$K_I = K_I^{(0)} + \varepsilon K_I^{(1)} + \dots; \quad K_{II} = K_{II}^{(0)} + \varepsilon K_{II}^{(1)} + \dots;$$

Здесь $K_I^{(0)}, K_{II}^{(0)}$ - коэффициенты интенсивности напряжений для нулевого приближения, а $K_I^{(1)}, K_{II}^{(1)}$ - соответственно для первого приближения.

Для получения решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [7].

В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений определяется уравнениями

$$\Delta F^{(0)} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha t^{(0)}; \quad \Delta F^{(1)} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha t^{(1)}, \quad (10)$$

где μ - коэффициент Пуассона материала барабана; α - коэффициент линейного температурного расширения.

Решение уравнений (10) ищется методом разделения переменных.

$$F^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n^{(i)} \cos n\theta + F_n^{*(i)} \sin n\theta]; \quad (i = 0, 1)$$

Для функций $F_n^{(i)}, F_n^{*(i)}$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, частные решения которых отыскиваются методом вариации постоянных [6].

По известным формулам (1.32) [7] вычисляем соответствующие напряжения $\bar{\sigma}_r^{(0)}$, $\bar{\sigma}_{\theta}^{(0)}$, $\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}$ и компоненты перемещений $\bar{v}_r^{(0)}, \bar{v}_{\theta}^{(0)}$ в нулевом приближении.

Найденные напряжения и перемещения не удовлетворяют граничным условиям (6)-(7). Поэтому необходимо найти второе напряженно-деформированное состояние $\bar{\sigma}_r^{(0)}$, $\bar{\sigma}_\theta^{(0)}$, $\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}$, $\bar{v}_r^{(0)}$ и $\bar{v}_\theta^{(0)}$.

Граничные условия задачи для отыскания второго напряженно-деформированного состояния примут в нулевом приближении следующий вид

$$\bar{\sigma}_r^{(0)} = -g^{(0)}(\theta) - \bar{\sigma}_r^{(0)}; \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} = -fg^{(0)}(\theta) - \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \quad \text{при } r = R_0 \text{ на площадке контакта} \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}_r^{(0)} = -\bar{\sigma}_r^{(0)}; \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \quad \text{вне площадки контакта}$$

$$\bar{\sigma}_r^{(0)} = -\bar{\sigma}_r^{(0)}; \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \quad \text{при } r = R$$

на берегах трещин

$$\bar{\sigma}_n^{(0)} - i\bar{\tau}_{nt}^{(0)} = -(\bar{\sigma}_n^{(0)} - i\bar{\tau}_{nt}^{(0)}) \quad \text{при } |x_n| \leq \ell_n \quad (n = 1, 2, \dots, N_0) \quad (12)$$

Комплексные потенциалы, описывающие второе напряженно-деформированное состояние ищем в виде [8, 9]

$$\Phi^{(0)}(z) = \Phi_0^{(0)}(z) + \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z); \quad \Psi^{(0)}(z) = \Psi_0^{(0)}(z) + \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z). \quad (13)$$

Здесь $\Phi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$; $\Psi_0^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_k z^k$;

$$\Phi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_0} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \frac{g_k^{(0)}(t) dt}{t - z_k}; \quad \Psi_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_0} e^{-2i\alpha_k} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[\frac{\overline{g_k^{(0)}(t)}}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k^{(0)}(t) \right] dt;$$

$$\Phi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_0} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left[\left(-\frac{1}{z} - \frac{\bar{T}_k}{1 - z\bar{T}_k} \right) e^{i\alpha_k} g_k^{(0)}(t) + \overline{g_k^{(0)}(t)} e^{-i\alpha_k} \frac{1 - T_k \bar{T}_k}{\bar{T}_k (1 - z\bar{T}_k)^2} \right] dt;$$

$$\Psi_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N_0} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} \left\{ g_k^{(0)}(t) e^{i\alpha_k} \left[\frac{1}{zT_k} - \frac{2}{z^2} - \frac{\bar{T}_k}{z(1 - z\bar{T}_k)} + \frac{\bar{T}_k^2}{(1 - z\bar{T}_k)^2} \right] + \right. \\ \left. + \overline{g_k^{(0)}(t)} e^{-i\alpha_k} \left[\frac{1 - T_k \bar{T}_k}{z\bar{T}_k (1 - z\bar{T}_k)^2} - \frac{1}{1 - zT_k} - \frac{2(1 - T_k \bar{T}_k)}{(1 - z\bar{T}_k)^3} \right] \right\} dt.$$

Сумма (13) комплексных потенциалов описывает второе напряженно-деформированное состояние тормозного барабана с условиями (6) и заданными на N_0 отрезках разрывах смещений $g_k(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N_0$).

Удовлетворяя функциями (13) граничным условиям (6) на берегах трещин, получим систему N_0 сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k(x_k)$:

$$\sum_{k=1}^{N_0} \int_{-\ell_k}^{\ell_k} [R_{nk}(t, x) g_k^{(0)}(t) + S_{nk}(t, x) \overline{g_k^{(0)}(t)}] dt = \pi f_n^0(x) \quad (14)$$

$$f_n^0(x) = -(\bar{\sigma}_n^{(0)} - i\bar{\tau}_{nt}^{(0)}) - [\Phi_0^{(0)}(x) + \Phi_1^{(0)}(x) + x\overline{\Phi_0^{(0)'(x)} + \Psi_0^{(0)}(x)}$$

Здесь переменные x , t , z_n^0 и ℓ_n - безразмерные величины, отнесенные к R_0 ; R_{nk} , S_{nk} определяются по соотношениям (VI.61) книги [9].

К системе сингулярных интегральных уравнений для внутренних трещин следует добавить дополнительные соотношения

$$\int_{-\ell_k}^{\ell_k} g_k^{(0)}(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N_0) \quad (15)$$

Удовлетворяя краевым условиям (5), записанным через комплексные потенциалы функциями (13), получаем после некоторых преобразований бесконечную линейную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_k и a'_k потенциалов $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$. Ввиду громоздкости система алгебраических уравнений не приводится.

В правую часть этой системы входят интегралы от искомым функций $g_k^{(0)}(x_k)$. Таким образом, система сингулярных интегральных уравнений и система алгебраических уравнений относительно a_k, a'_k связаны между собой и должны решаться совместно.

Применяя метод механических квадратур [9, 10] система сингулярных интегральных уравнений (14) с дополнительными условиями (15) сводится к системе $N_0 \times M$ линейных алгебраических уравнений относительно значений искомым функций в чебышевских узлах.

После решения объединенной алгебраической системы методом Гаусса с выбором главного элемента вычислялись коэффициенты интенсивности напряжений в нулевом приближении. На основе полученного решения находим компоненты напряжений в барабане в нулевом приближении.

$$\sigma_r^{(0)} = \bar{\sigma}_r^{(0)} + \overline{\bar{\sigma}}_r^{(0)}; \quad \sigma_\theta^{(0)} = \bar{\sigma}_\theta^{(0)} + \overline{\bar{\sigma}}_\theta^{(0)}; \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} + \overline{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(0)}$$

При $r = R_0$ находим функции N и T . С помощью термоупругого потенциала $F^{(1)}(r, \theta)$ по известным формулам [7] находим соответствующие напряжения $\bar{\sigma}_r^{(1)}, \bar{\sigma}_\theta^{(1)}, \bar{\tau}_{r\theta}^{(1)}$ и компоненты перемещений $\bar{v}_r^{(1)}, \bar{v}_\theta^{(1)}$ в первом приближении. Найденные напряжения не удовлетворяют граничным условиям (8)-(9). Поэтому необходимо найти второе напряженное деформированное состояние $\overline{\bar{\sigma}}_r^{(1)}, \overline{\bar{\sigma}}_\theta^{(1)}, \overline{\bar{\tau}}_{r\theta}^{(1)}, \overline{\bar{v}}_r^{(1)}$ и $\overline{\bar{v}}_\theta^{(1)}$. Граничные условия задачи для отыскания второго напряженно-деформированного состояния с помощью формул Колосова-Мусхелишвили можно записать в виде краевых задач для отыскания комплексных потенциалов $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$. Комплексные потенциалы $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$ ищутся в виде аналогичном (13) с очевидными изменениями.

Дальнейший ход решения такой же как в нулевом приближении.

Расчет долговечности. Для определения долговечности N_g тормозного барабана кроме кинетики роста усталостной трещины необходимо еще знать ее критический размер l_* , при достижении которого наступит предельно-равновесное состояние барабана. Из критерия разрушения $K_{p_{\max}} = K_{fc}$ находим уравнение для определения критического размера l_* трещины

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} \left(K_I(l_*) \cos \frac{\beta}{2} - 3K_{II}(l_*) \sin \frac{\beta}{2} \right) = K_{fc} \quad (16)$$

где K_{fc} - критический коэффициент интенсивности напряжений при циклическом нагружении (циклическая вязкость разрушения).

Для определения долговечности тормозного барабана следует проинтегрировать дифференциальное уравнение (3) при начальном условии: $N = 0$ при $l = l_0$, где l_0 - начальный размер дефекта типа трещины, определяемый методами неразрушающего контроля.

Для определения долговечности тормозного барабана получаем следующую формулу

$$N_g = \int_{l_0}^{l_*} A^{-1} \left[K_{p_{\max}} (1 - R_*)^n - K_{th} \right]^{-m} dl \quad (17)$$

Расчет проводился с заданными шагами по фактической глубине трещины. Для этого задаем начальную глубину трещины l_0 и шаг расчета Δl . При выбранной l_0 по формуле (4) рассчитываем для начального цикла величины $K_{p_{\max}}$ и $K_{p_{\min}}$. По формуле (17) определяем приращение циклов торможения (нагружения) ΔN_1 . Находим новую эффективную длину трещины $l_1 = l_0 + \Delta l \cdot \cos \beta$. Затем расчет повторяем для второго шага, третьего и т.д. до тех пор, пока коэффициент интенсивности напряжений $K_{p_{\max}}$ не

окажется равным K_{fc} или длина трещины не станет равной критическому значению l_* . По найденным величинам числа циклов торможения до разрушения барабана находим долговечность

$$N_g = \sum_{i=1}^M \Delta N_i; \quad M = \frac{l_* - l_0}{\Delta l};$$

Расчеты проводились применительно к тормозному механизму грузового автомобиля КамАЗ – 5320.

В расчетах на основе опытных данных [2, 11] было принято:

$$l_0 = 0,25 \text{ мм}; \quad A = 2,8 \cdot 10^{-7} \left(\text{МПа}\sqrt{\text{м}} \right)^m \text{ м/цикл}; \quad m = 2,35; \quad n = 0,9$$

$$K_{fc} = 32 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}; \quad K_{th} = 7,0 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}},$$

а скорость начала торможения автомобиля считалась $V = 11,111$ м/сек.

На основании таких расчетов можно найти период безопасной эксплуатации барабана тормозного механизма автомобиля (ее остаточный ресурс) при наличии дефекта заданной формы и размера

$$t_* = \frac{N_g}{t_T},$$

где t_T - средняя частота циклических нагрузок (торможения) в условиях эксплуатации автомобиля. Используя статистические данные о среднем количестве торможений на 1000 км пробега, можно определить срок службы (пробег автомобиля) барабана.

Результаты расчетов для барабана представлены на рисунке.

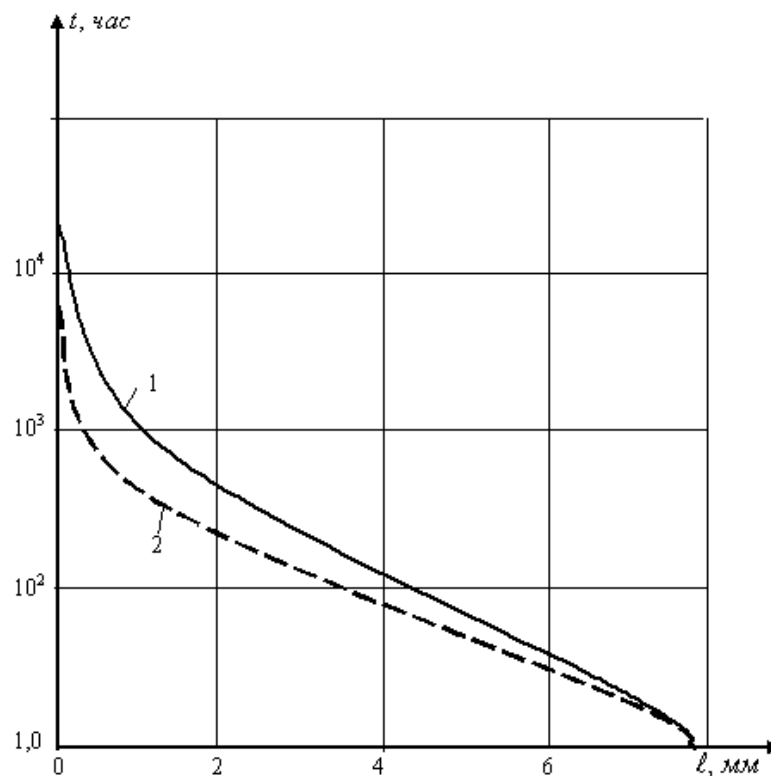


Рис. 1. Зависимость остаточного ресурса от начального размера трещины: 1 – для гладкого контура; 2- для шероховатого контура

Такие расчеты позволяют определять допустимую начальную длину трещины, которая обеспечивала бы заданный ресурс работы автомобиля. Так как тормозной барабан и накладка работают в условиях многоциклового нагружения, то консервативную оценку допустимых размеров трещин можно дать, исходя

непосредственно из условия нераспространения усталостных трещин в рабочем режиме циклического нагружения

$$K_{p \max} \leq K_{th}.$$

Численное исследование роста усталостной трещины показывает, что при небольшом числе циклов нагружения трещина имеет тенденцию к развитию параллельно контактной поверхности на небольшой глубине. С повышением контактного давления на поверхности трения усталостное сопротивление уменьшается. При большом числе циклов нагружения трещина растет в глубину вдоль радиального направления.

Расчет скорости усталостной трещины (3) показывает, что более короткие усталостные трещины растут более быстро. Для роста усталостных трещин можно выделить две стадии. На первой стадии в интервале коротких трещин наблюдаются максимум и минимум скорости роста от длины трещины. Для второй стадии зависимость скорости роста трещины монотонна. На первой стадии проявляется снижение скорости роста трещин при высоких контактных давлениях. Это объясняется, по-видимому, тем, что, начиная с некоторого значения контактного давления, сжимающие напряжения преобладают над растягивающими, и трещина стремится закрыться.

Литература

1. Гейдаров Ш.Г. Ударное взаимодействие фрикционной накладки и барабана при торможении автомобиля // Сб. статей: Динамика и прочность механических систем. Баку: Элм, 1998. с. 3-16.
2. Endo K., Goto H. Initiation and propagation of fretting fatigue cracks // Wear, 1976, v. 38. p. 311-324.
3. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1968. – 248 с.
4. Cherepanov G.P. Mechanics of brittle fracture. –N.-Y. Mc Graw Hill, 1979. – 950 p.
5. Гейдаров Ш.Г. Метод расчета температуры фрикционной накладки при торможении автомобиля // Сб. статей: Динамика и прочность механических систем. Баку: Элм, 1998. с. 52 – 62.
6. Гейдаров Ш.Г. Напряженно-деформированное состояние в тормозном барабане при торможении автомобиля // Сб. статей: Динамика и прочность механических систем. Баку: Элм, 1997. с. 5-12.
7. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. –М.: Физматлит, 1963. – 252 с.
8. Мухелишвили Н.И. Основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
9. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976. – 443 с.
10. Мирсалимов В.М. Неоднородные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
11. Миллер К. Ползучесть и разрушение. –М.: Металлургия. 1986. – 120 с.