

АЛГОРИТМ ТА КОМПЛЕКСИ ПРОГРАМ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ТРАЄКТОРІЙ ТА ШВИДКОСТІ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ВТОМНИХ ТРИЩИН В ПЛАСТИНКАХ

В.В. Божидарнік, О.В. Максимович, Я.В. Максимович

FATIGUE CRACK PATH AND CRACK GROWTH RATE IN PLATES: ALGORITHM AND PROGRAM

V.V. Bozhidarnik, O.V. Maksymovych, Ya.V. Maksymovych

Луцький державний технічний університет, Україна

Abstract Developed approach to finding of form of cracks and rate of distribution of tops of crack depending on the amount of cycles of loading, that is built on the method of surveillance, method of the integral evening and upshots to the type Grina. Influencing of size and directions of action of the external distributed loading or concentrated forces, placing, form of initial cracks is explored on the path of distribution of cracks and the rates fatigue cracks growth are expected.

Постановка задачі та огляд літератури. Відомо, що в елементах конструкцій, що перебувають в умовах циклічних навантажень виникають та поширюються втомні тріщини. Розрахунковим методам дослідження задач про розповсюдження тріщин у літературі присвячено відносно невелику кількість робіт. В роботах М.П. Саврука [3] приймалось, що поширюється тільки одна з вершин тріщини або обидві вершини розповсюджуються симетрично. В роботах Панасюка В.В., Дацишин О.П. [2] задача руйнування розглянута стосовно до поширення крайової тріщини в півплощині в процесі циклічного навантаження – рухалась тільки одна вершина. В даній роботі запропоновано загальний підхід дослідження процесу руйнування, коли обидві вершини тріщини розповсюджуються з різними швидкостями і несиметрично.

Методика розрахунку швидкості підростання втомних тріщин. Для знаходження форми тріщин в процесі руйнування залежно від кількості циклів використано метод прослідковування. В цьому методі процес поширення тріщин розбивають на окремі етапи так, щоби прирости дуг тріщин на них були малими. Прийнято, що рівень навантаження описується параметром, який будемо позначати через p , причому на n – ому етапі $p = p_n$, а початковій тріщині відповідає номер 0.

На кожному з етапів розв'язуються окремо задачі: описується форма, яку в кінці попереднього етапу набула тріщина; визначаються КІН для цієї тріщини; знаходиться приріст тріщини за рахунок руху обох вершин.

В розробленому алгоритмі рівняння тріщини, що багаторазово змінює свою форму в процесі руйнування, описувалось у параметричному вигляді. На n – ому кроці рівняння тріщини зображали у вигляді $x = \varphi_n(t)$, $y = \psi_n(t)$, де t параметр, який змінюється в межах $-1 \leq t \leq 1$. Для побудови цих функцій задавались координати точок на ній $(x_1^{(n)}, y_1^{(n)}), (x_2^{(n)}, y_2^{(n)}), \dots, (x_{N_n}^{(n)}, y_{N_n}^{(n)})$ (перша і остання точки відповідають вершинам A_n, B_n) та значення кутів нахилу дотичних у вершинах тріщини до осі Ox , які позначали через φ_n^A, φ_n^B . На основі цих даних рівняння тріщини описувались за допомогою кубічного сплайну, який є неперервним разом з двома першими похідними та має задані нахили дотичної у вершинах. За допомогою побудованого сплайну визначались також похідні від параметричних функцій, які входять в алгоритм визначення напружень.

В другому етапі методики розглядалися задана пластинка, яка послаблена системою тріщин, що розміщені вздовж кривих L_j ($j=1, \dots, I$). Приймалось, що пластинка навантажена на нескінченності (для нескінченних пластинок), зосередженими силами (X_j, Y_j) , які діють у внутрішніх точках області (a_j, b_j) ($j=1, \dots, J$), та зусиллями q_T , що прикладені до берегів тріщин, які приймаються однаковими на протилежних берегах тріщини.

Для визначення НДС пластинки використано алгоритм, який побудований на методі інтегральних рівнянь, ядра в яких є розв'язками типу Гріна. За такі розв'язки вибрано комплексні потенціали Мухелішвілі $\Phi_S(z), \Psi_S(z)$ для області S , яким відповідає вільна від навантаження межа пластинки та ці потенціали мають особливості

$$\Phi_S(z) \sim \frac{A_0}{a-z}, \quad \Psi_S(z) \sim \frac{\gamma \bar{A}_0}{a-z} - \frac{\bar{a} A_0}{(a-z)^2},$$

де A_0 – довільні комплексні сталі, $a \in S$, γ – дійсна стала, яка в основному алгоритмі рівна 1. Тут S – область, яку займає пластинка без тріщин. На основі таких функцій при $\gamma = -\bar{\chi}$ може бути розглянутий також випадок дії зосереджених сил, тому далі розглядаються випадки, коли стала γ може приймати два вказаних значення, де $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона. Такі потенціали, можуть бути записані у вигляді

$$\Phi_S(z; a, \gamma) = A_0 \Phi_0(z; a, \gamma) + \bar{A}_0 \Phi_1(z; a, \gamma), \quad \Psi_S(z; a, \gamma) = A_0 \Psi_0(z; a, \gamma) + \bar{A}_0 \Psi_1(z; a, \gamma). \quad (1)$$

Тоді комплексні потенціали для області D з тріщинами запишуться

$$\Phi(z) = \Phi_c(z) + \int_L \left[Q(t) \Phi_0(z; t, 1) + \overline{Q(t)} \Phi_1(z; t, 1) \right] ds, \quad (2)$$

$$\Psi(z) = \Psi_c(z) + \int_L \left[Q(t) \Psi_0(z; t, 1) + \overline{Q(t)} \Psi_1(z; t, 1) \right] ds,$$

$\Phi_c(z), \Psi_c(z)$ – комплексні потенціали для області S , що відповідають зосередженим силам та прикладеному навантаженню на нескінченності (для нескінченних пластинок) при вільній від навантаження межі пластинки, $L = L_1 + L_2 + \dots + L_I$. Введена невідома функція Q визначається через стрибки вектора переміщень на тріщині. Для забезпечення умови однозначності переміщень необхідно, щоби $\int_L Q ds = 0$ на кожній з тріщин.

Підставивши потенціали (2) в умову для знаходження вектора напружень на берегах тріщини при $z \in L$, отримано інтегральне рівняння для визначення функції Q . Для чисельного розв'язування цього рівняння використано метод механічних квадратур. Вводиться параметричний опис тріщини у вигляді $x = \alpha(\xi)$, $y = \beta(\xi)$, $-1 \leq \xi \leq 1$. Після заміни змінних та введення зображення $Q = U(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$, для знаходження нової функції отримано систему алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\sum_{n=1}^M A_n s_n' (U_n \alpha_{vn} + \bar{U}_n \beta_{vn}) = q_v - q_v^{(c)}, \quad v=1, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$\text{де } \alpha_{vn} = \frac{q_{vn}^{(1,0)} - i q_{vn}^{(0,1)}}{2}, \quad \beta_{vn} = \frac{q_{vn}^{(1,0)} + i q_{vn}^{(0,1)}}{2}, \quad U_n = U(\xi_n); \quad \xi_n = -\cos(\pi_N(n-1)),$$

$\pi_N = \pi/(N-1)$; $A_n = \pi_N$, при $n \neq 1, n \neq N$; $A_1 = A_N = 0,5\pi_N$; N – вибрана кількість вузлових точок, $q_v = q_T(z_v)$. Тут $q_{vn}^{(1,0)}, q_{vn}^{(0,1)}$ – вектори зусиль на контурі L , що відповідають комплексним потенціалам $\Phi_S(z), \Psi_S(z)$ в точці $z = z_v$ при $t = t_n$ на площинці, що нахилена під кутом θ_v до вісі Ox , які визначаються за формулами

$$q_{vn}^{(1,0)} = q(z_v, t_n, \theta_v), \quad \text{при } A_0=1; \quad q_{vn}^{(0,1)} = q(z_v, t_n, \theta_v), \quad \text{при } A_0=i,$$

$q_v^{(c)}$ - вектор напружень в точці z_v , який відповідає потенціалам $\Phi_c(z)$, $\Psi_c(z)$,

де $z_v = g(\tau_v)$, $t_n = g(\xi_n)$, $\tau_v = -\cos[\pi_N(v - 0,5)]$, $g(\xi) = \alpha(\xi) + i\beta(\xi)$,

$$q(z, t, \theta) = \Phi_s(z; t, 1) + \overline{\Phi_s(z; t, 1)} + \exp(-2i\theta) \left[z\Phi_s'(z; t, 1) + \Psi_s(z; t, 1) \right].$$

Після розв'язування СЛАР КІН визначаються через значення U за формулами $K_I^\pm - iK_{II}^\pm = \mp 2\pi\sqrt{\pi} |g'(\pm 1)| U(\pm 1)$, де $U(1) = U_N$, $U(-1) = U_1$, знак (-) відповідає лівій вершині (А), а (+) – правій (В).

Таким чином, для чисельної реалізації запропонованої методики достатньо розробити алгоритм визначення вектора напружень у довільних точках пластинки, що відповідає введеним розв'язкам типу Гріна. Застосовуючи розроблений алгоритм, до задачі, що виникає на кроці, визначаємо значення КІН у вершинах тріщини A_n і B_n , які позначимо через $K_{I,II}^A$, $K_{I,II}^B$ відповідно.

Розв'язування третьої задачі в запропонованому алгоритмі - визначення форми тріщини в кінці n – го кроку, проводилось на основі відомих координат вибраних вище вузлових точок на тріщині на початку кроку, та припущення, що тріщина підростає вздовж прямолінійних відрізків. При цьому виходили з силового критерію руйнування, згідно якого тріщина підростає вздовж прямої, що нахилена під кутом θ до дотичної в її вершині, який визначається за формулою

$$\theta = 2 \arctg \left[\left(K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2} \right) / 4K_{II} \right]. \quad (4)$$

де K_I, K_{II} – КІН. За допомогою рівняння (4) знаходимо кути нахилу приростів тріщини для обох вершин відносно відповідних дотичних, які позначимо через θ_n^A , θ_n^B .

Відомі в літературі [3] та виконані в роботі розрахунки показують, що в процесі руху при використанні силового критерію біля обох вершин тріщини коефіцієнти $K_{II} \approx 0$. Тобто, можна вважати, що процес руйнування відбувається за механізмом нормального відриву, для якого в літературі записані рівняння для швидкості підростання втомних тріщин вигляду

$$V = F(K_{\max}, K_{\min}, s), \quad (5)$$

де V – швидкість розповсюдження вершини тріщини, K_{\max}, K_{\min} – рівні найбільшому та найменшому значенням коефіцієнта K_I при циклічних навантаженнях, s – сукупність додаткових параметрів.

Координати вершин тріщини на новому етапі $A_{n+1}(x_{n+1}^A, y_{n+1}^A)$, $B_{n+1}(x_{n+1}^B, y_{n+1}^B)$, та час їх руху знаходимо на основі роботи [1].

Таким чином послідовно встановлюємо вузлові точки на тріщині в кінці n – го кроку, які є одночасно початковими для $n+1$ – го кроку. Знайдені вузлові точки та кути нахилу дотичних дають можливість за допомогою сплайнів будувати рівняння тріщини, далі знаходити КІН і переходити до знаходження тріщини на наступних етапах.

При розгляді конкретних задач у роботі для опису всієї ДВР використано формулу Яреми і Микитишина

$$v = v_0 \left(\frac{\Delta K_I - \Delta K_{th}}{\Delta K_{fc} - \Delta K_I} \right)^q, \quad \text{при } \Delta K_{th} \leq \Delta K_I < \Delta K_{fc}, \quad (6)$$

де $\Delta K_{th}, \Delta K_{fc}$ – відповідно пороговий і критичний розмахи КІН ΔK_I , v_0 і q – сталі матеріалу.

При прослідковуванні траєкторії тріщини згідно запропонованого підходу необхідно визначати КІН для тріщин, що можуть мати велику кількість зламів. В зв'язку з цим виконано розрахунки КІН для тріщини, точки зламу в якій лежать на дузі кола одиничного радіусу, яка обмежена кутами -45° до 315° . Виберемо на цій дузі рівномірно $K+1$ вузлових точок. З'єднавши ці точки відрізками прямої отримаємо

ламану, що складається з K відрізків. Для опису цієї ламаної використовувався сплайн так, щоб він практично точно описував тріщину. Крім цього будувався сплайн на основі тільки точок зламу із тими ж кутами нахилу дотичних у вершинах, що і в першій тріщині, якому відповідав гладкий контур. Отримані криві, що відповідають двом сплайнам при $K=2, 4, 6, 8, 10, 12$ наведені на рис.1. Проведемо тепер розрахунок напружено-деформованого стану (НДС) в пластинці для гладкої або ламаної тріщини, яка перебуває під дією всестороннього розтягу на нескінченності зусиллями p .

В таблиці 1 наведені відносні значення КІН $F_{j,A} = K_{j,A} / p\sqrt{\pi d}$, $j = I, II$, де d – піввідстань між вершинами тріщини. Для кожного з значень K у верхніх рядках наведені дані для ламаної тріщини, а в нижніх – для гладкої тріщини. Із таблиці 1 видно, що незважаючи на достатньо істотну різницю між формами двох тріщин, розраховані КІН для них виявились близькими між собою, якщо кількість зламів була вибрана достатньо великою.

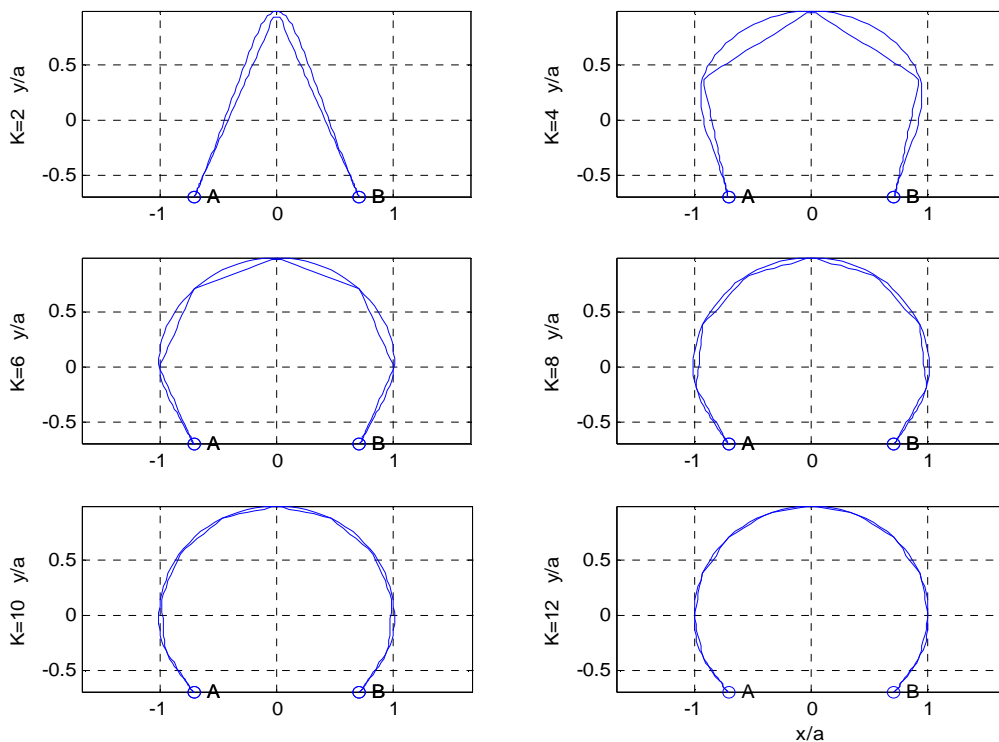


Рис. 1. Вигляд форми ламаної та згладженої тріщин з вузловими точками на дузі кола при $-\pi/4 < \varphi < 5\pi/4$ з 2~12 ланками.

Таблиця 1. Значення безрозмірних КІН для ламаної (верхні рядки) та гладкої (нижні рядки) тріщин.

K	2	4	6	8	10	12
$F_{I,A}$	0.1459	-0.2331	-0.3115	-0.3378	-0.3491	-0.3513
	0.1490	-0.2326	-0.3095	-0.3360	-0.3480	-0.3544
$F_{II,A}$	-0.6333	-0.3114	-0.1953	-0.1420	-0.1138	-0.0930
	-0.6243	-0.2825	-0.1741	-0.1269	-0.1016	-0.0861

Таким чином встановлено, що при розрахунках КІН з тріщинами складної геометрії достатньо забезпечити близькість форми тріщин тільки в околі їх вершин, що істотно спрощує реалізацію методу прослідкування.

Приклади розрахунку траєкторій та швидкості поширення втомних тріщин в пластинках різної форми.

Викладений підхід дозволяє побудувати програми для ЕОМ універсального характеру в тому сенсі, що для розгляду нового класу задач достатньо скласти окрему процедуру для обчислення відповідного розв'язку типу Гріна при незмінних всіх інших підпрограмах. При цьому такі програми вимагають мінімального часу роботи ЕОМ, оскільки граничні умови на границі пластинки задовольняються автоматично. Таким чином складені програми для дослідження пластинок різної форми. Наведемо результати розрахунків для деяких класів задач.

Розглянемо смугу $-H < y < 0$ з прямолінійною, паралельною границям тріщиною півдовжиною a , центр якої розміщений в точці $(0, -0.4H)$, коли сили прикладені в точках границі $(0.2H, 0), (0.2H, -H)$ відповідно. Результати розрахунків при 60 кроках в методі прослідковування, $a/H=0.2$, $H=1$ м, $P/H=10$ Мпа наведені на рис. 2. Тут наверху наведено траєкторії руху вершин тріщини, причому міткам 0,1,2,3,4 відповідають значення початкового та 15, 30, 45 і 60 -их кроків. На середньому графіку зображено кількість циклів (τ), які необхідні для поширення тріщини залежно від кроку. На останньому графіку наведено значення КІН K_I залежно від кроку.

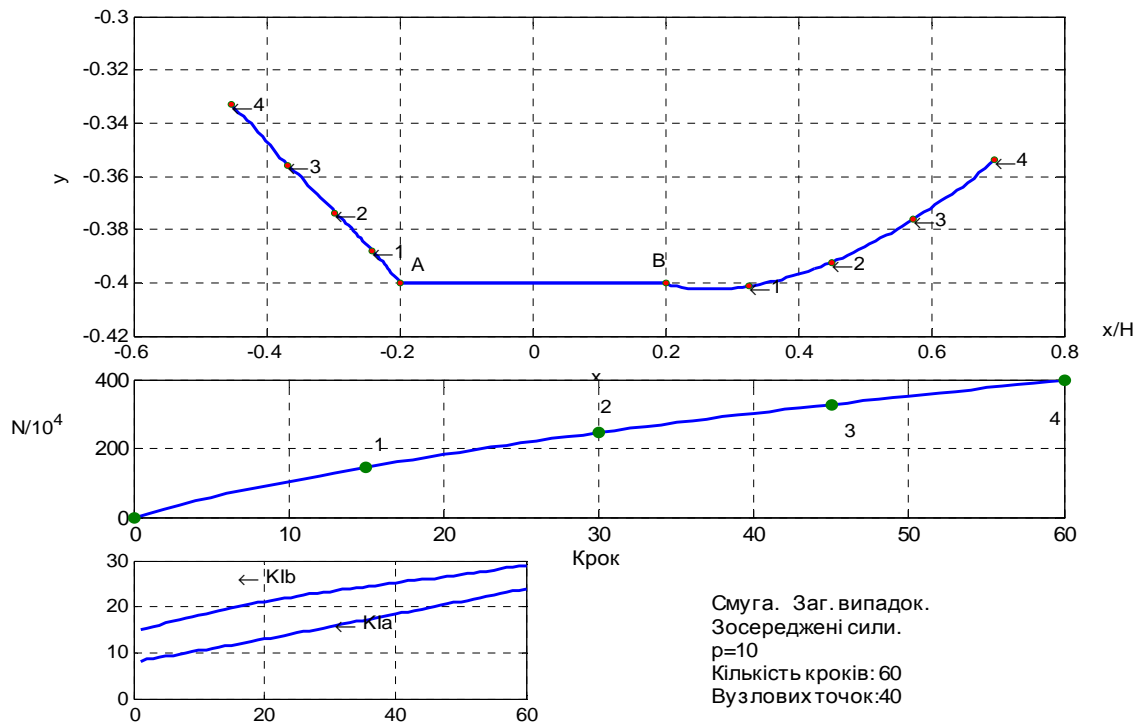


Рис. 2. Підростання втомної тріщини в смугі при несиметричному навантаженні зосередженими силами.

З верхнього рисунка бачимо, що права вершина спочатку віддаляється від ближчої до неї сили, а далі змінює напрямок руху.

Дослідимо вплив отвору на поширення втомних тріщин. Розрахунки проведені для випадку пластинки з круговим отвором з радіусом $a=1$ м та тріщиною півдовжиною 0.3 а розміщеною паралельною до вісі Ox з центром в точці $(-0.1a, -1.7a)$, пластинка перебуває в умовах всестороннього розтягу зусиллями $p=10$ МПа, результати яких подано на рис. 3.

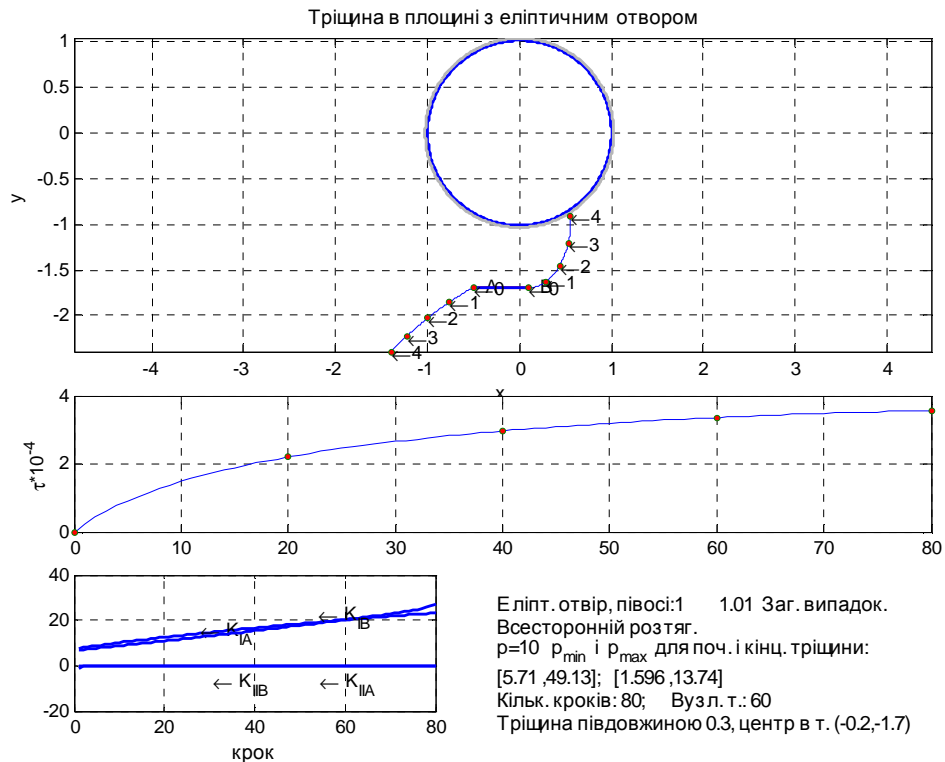


Рис. 3. Прямолінійна горизонтальна зсунута тріщина біля кругового отвору при всесторонньому розтязі.

Видно, що навіть незначна несиметрія істотно впливає на процес руйнування. Так, ближча до отвору вершина тріщини швидко наближається до границі отвору, а протилежна – віддаляється.

Висновки

Розвинено підхід до знаходження форми тріщин та швидкості розповсюдження вершин тріщини залежно від кількості циклів навантаження, що ґрунтується на методі прослідковування, методі інтегральних рівнянь і розв'язках типу Гріна. Досліджено вплив величини та напрямків дії зовнішнього розподіленого навантаження або зосереджених сил, розміщення, форми початкових тріщин і границь на траєкторії розповсюдження тріщин та розраховано швидкості їх руху.

Література

1. Максимович Я.В., Шваб'юк В.І. Розрахунок криволінійних і ламаних траєкторій квазістатичного підростання тріщин в пластинках. Наукові нотатки: Міжвузівський збірник (за напрямом "Інженерна механіка"). – Луцьк: Луцький держ. технічний ун-тет-2004, - Вип. 14-С.176-186.
2. Панасюк В.В. Механіка квазіхрупкого руйнування матеріалів. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
3. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук І.В. Численний аналіз в плоских задачах теорії тріщин. – К.: Наук.думка, 1989. – 248 с.